

Imię i nazwisko: ..... KORSARZE ATLANTYKU

A. Zdanie  $\forall x (P(x) \rightarrow \exists y (Q(y) \wedge R(x, y)))$  jest:

1. prawdziwe w interpretacji:

Uniwersum: zbiór wszystkich liczb naturalnych

$P(x)$ :  $x$  jest liczbą parzystą

$Q(x)$ :  $x$  jest liczbą nieparzystą

$R(x, y)$ :  $x$  jest mniejsza od  $y$ .

2. fałszywe w interpretacji:

Uniwersum: zbiór wszystkich liczb rzeczywistych

$P(x)$ :  $x$  jest liczbą dodatnią

$Q(x)$ :  $x$  jest liczbą wymierną

$R(x, y)$ :  $x$  jest kwadratem  $y$ .

B. Udowodnij, że zdanie  $(\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)) \rightarrow \exists x (P(x) \wedge Q(x))$  nie jest tautologią klasycznego rachunku predykatów.

Wystarczy wskazać interpretację, w której poprzednik tej implikacji jest prawdziwy, a jej następnik fałszywy. Dla przykładu:

1. Uniwersum: zbiór wszystkich liczb całkowitych

2.  $P(x)$ :  $x$  jest liczbą parzystą

3.  $Q(x)$ :  $x$  jest liczbą nieparzystą.

W rozważanym uniwersum istnieją liczby parzyste oraz istnieją liczby nieparzyste, ale żadna liczba nie jest jednocześnie parzysta i nieparzysta.

C. Niech  $\mathbb{N}$  będzie zbiorem wszystkich liczb naturalnych,  $+$  operacją dodawania, a  $<$  relacją mniejszości. Podaj przykład wartościowania formuły  $x_1 + x_3 < x_2$  w strukturze  $(\mathbb{N}, +, <)$ , które:

1. spełnia tę formułę: każde wartościowanie  $(w_1, w_2, w_3, w_4, \dots)$ , dla którego zachodzi warunek  $w_1 + w_3 < w_2$ , czyli np. wartościowanie  $(1, 100, 1, 1, 1, \dots)$ .

2. nie spełnia tej formuły: każde wartościowanie  $(w_1, w_2, w_3, w_4, \dots)$ , dla którego nie zachodzi warunek  $w_1 + w_3 < w_2$ , czyli np. wartościowanie  $(100, 1, 333, 2, 2, 2, \dots)$ .

D. Używając predykatów „być liczbą parzystą”, „być liczbą nieparzystą”, „być podzielna przez”, predykatu identyczności oraz funkcji mnożenia zapisać zdanie: *Pewna liczba parzysta jest podzielna przez iloczyn dwóch różnych liczb nieparzystych.*

Wprowadzamy oznaczenia:

1.  $P(x)$ :  $x$  jest liczbą parzystą

2.  $N(x)$ :  $x$  jest liczbą nieparzystą

3.  $D(x, y)$ :  $x$  dzieli bez reszty  $y$

4.  $I(x, y)$ :  $x$  jest identyczna z  $y$

5.  $\otimes$ : dwuargumentowy symbol funkcyjny mnożenia.

Wtedy rozważane zdanie ma następującą postać:

$$\exists x (P(x) \wedge \exists y \exists z (\neg I(y, z) \wedge N(y) \wedge N(z) \wedge D(\otimes(y, z), x)))$$

Imię i nazwisko: ..... PIRACI PACYFIKU

A. Zdanie  $\exists x (P(x) \wedge \forall y (Q(y) \rightarrow R(x, y)))$  jest:

1. prawdziwe w interpretacji:

Uniwersum: zbiór wszystkich liczb naturalnych

$P(x)$ :  $x$  jest liczbą parzystą

$Q(x)$ :  $x$  jest liczbą podzielną przez 4

$R(x, y)$ :  $x$  dzieli bez reszty  $y$ .

2. fałszywe w interpretacji:

Uniwersum: zbiór wszystkich liczb naturalnych

$P(x)$ :  $x$  jest liczbą parzystą

$Q(x)$ :  $x$  jest liczbą nieparzystą

$R(x, y)$ :  $x$  dzieli bez reszty  $y$ .

B. Udowodnij, że zdanie  $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x) \vee \forall x Q(x))$  nie jest tautologią klasycznego rachunku predykatów.

Wystarczy wskazać interpretację, w której poprzednik tej implikacji jest prawdziwy, a jej następnik fałszywy. Dla przykładu:

1. Uniwersum: zbiór wszystkich liczb całkowitych

2.  $P(x)$ :  $x$  jest liczbą parzystą

3.  $Q(x)$ :  $x$  jest liczbą nieparzystą.

W rozważanym uniwersum każda liczba jest parzysta lub nieparzysta, ale nie jest prawdą, że wszystkie liczby są parzyste lub wszystkie liczby są nieparzyste.

C. Niech  $\mathbb{N}$  będzie zbiorem wszystkich liczb naturalnych,  $+$  operacją dodawania, a  $<$  relacją mniejszości. Podaj przykład wartościowania formuły  $w_3 < w_1 + w_2$  w strukturze  $(\mathbb{N}, +, <)$ , które:

1. spełnia tę formułę: każde wartościowanie  $(w_1, w_2, w_3, w_4, \dots)$ , dla którego zachodzi warunek  $w_3 < w_1 + w_2$ , czyli np. wartościowanie  $(100, 101, 1, 2, 2, 2, \dots)$

2. nie spełnia tej formuły: każde wartościowanie  $(w_1, w_2, w_3, w_4, \dots)$ , dla którego nie zachodzi warunek  $w_3 < w_1 + w_2$ , czyli np. wartościowanie  $(1, 2, 10000, 7, 7, 7, 7, \dots)$ .

D. Używając predykatów „być liczbą parzystą”, „być liczbą nieparzystą”, „być podzielną przez”, predykatu identyczności oraz funkcji dodawania zapisać zdanie: *Każda liczba nieparzysta jest podzielna przez sumę dwóch różnych liczb parzystych.*

1.  $P(x)$ :  $x$  jest liczbą parzystą

2.  $N(x)$ :  $x$  jest liczbą nieparzystą

3.  $D(x, y)$ :  $x$  dzieli bez reszty  $y$

4.  $I(x, y)$ :  $x$  jest identyczna z  $y$

5.  $\oplus$ : dwuargumentowy symbol funkcyjny dodawania.

Wtedy rozważane zdanie ma następującą postać:

$$\forall x (N(x) \rightarrow \exists y \exists z (\neg I(y, z) \wedge P(y) \wedge P(z) \wedge D(\oplus(y, z), x)))$$