DODATEK 9:
KLASYCZNY RACHUNEK ZDAŃ:
INFORMACJE O
RACHUNKU SEKWENTÓW GENTZENA

Ważną metodą dowodową jest RACHUNEK SEKWENTÓW. W tym miejscu ograniczymy się jedynie do podania paru informacji o tym rachunku. Różne jego wersje znajdują istotne zastosowania np. w automatycznym przetwarzaniu informacji.

1. Reguły

Określimy relację $\Vdash$ między zbiorami formuł języka KRZ. Zachodzenie zależności $X \Vdash Y$ związane ma być z następującą intuicją: ze zbioru przesłanek X wyprowadzalna jest alternatywa elementów zbioru Y. Nie ograniczamy się do skończonych zbiorów formuł. Wyrażenia postaci $X \Vdash Y$ nazywamy ***sekwentami***.

Relację $\Vdash$ definiujemy indukcyjnie:

1. $X \Vdash^0 Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X \cap Y \neq \emptyset$
2. $X \Vdash^{n+1} Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X \Vdash^n Y$ lub istnieją zbiory formuł X_1, Y_1 oraz formuły α, β takie, że zachodzi jeden z warunków:

$$\begin{array}{rl}
(+\rightarrow) & X = X_1 \cup \{\alpha \rightarrow \beta\} \text{ i } X_1 \cup \{\beta\} \Vdash^n Y \text{ i } X_1 \Vdash^n \{\alpha\} \cup Y \\
(\rightarrow +) & Y = Y_1 \cup \{\alpha \rightarrow \beta\} \text{ i } X \cup \{\alpha\} \Vdash^n \{\beta\} \cup Y_1 \\
(+\neg) & X = X_1 \cup \{\neg\alpha\} \text{ i } X_1 \Vdash^n \{\alpha\} \cup Y \\
(\neg+) & Y = Y_1 \cup \{\neg\alpha\} \text{ i } X \cup \{\alpha\} \Vdash^n Y_1 \\
(+\wedge) & X = X_1 \cup \{\alpha \wedge \beta\} \text{ i } X_1 \cup \{\alpha, \beta\} \Vdash^n Y \\
(\wedge+) & Y = Y_1 \cup \{\alpha \wedge \beta\} \text{ i } X \Vdash^n \{\alpha\} \cup Y_1 \text{ oraz } X \Vdash^n \{\beta\} \cup Y_1 \\
(+\vee) & X = X_1 \cup \{\alpha \vee \beta\} \text{ i } X_1 \cup \{\alpha\} \Vdash^n Y \text{ oraz } X_1 \cup \{\beta\} \Vdash^n Y \\
(\vee+) & Y = Y_1 \cup \{\alpha \vee \beta\} \text{ i } X \Vdash^n \{\alpha, \beta\} \cup Y_1 \\
(+\equiv) & X = X_1 \cup \{\alpha \equiv \beta\} \text{ i } X_1 \cup \{\alpha, \beta\} \Vdash^n Y \text{ oraz } X_1 \Vdash^n \{\alpha, \beta\} \cup Y \\
(\equiv +) & Y = Y_1 \cup \{\alpha \equiv \beta\} \text{ i } X \cup \{\alpha\} \Vdash^n \{\beta\} \cup Y_1 \text{ oraz } X \cup \{\beta\} \Vdash^n \{\alpha\} \cup Y_1.
\end{array}$$

3. $X \Vdash Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X \Vdash^n Y$ dla pewnego $n \geqslant 0$.

Powszechnie stosowaną umową notacyjną w rachunku sekwentów jest pisanie X, Y zamiast $X \cup Y$ oraz pisanie $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ zamiast skończonych zbiorów formuł $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. Dla przykładu, sekwent $X \cup \{\alpha \rightarrow \beta, \alpha\}$ zapisujemy w postaci: $X, \alpha \rightarrow \beta, \alpha$.

Zwykle posługujemy się następującymi diagramami, reprezentującymi warunki określające relację $\Vdash$ (kreskę poziomą w tych diagramach odczytujemy [metajęzykowo] jako: „jeśli ..., to ...”):

$$(0) \qquad \frac{X \cap Y \neq \emptyset}{X \Vdash Y}$$

$(+\rightarrow)$	$\dfrac{X,\beta \Vdash Y;\ \ X \Vdash \alpha,Y}{X,\alpha\rightarrow\beta \Vdash Y}$	$(\rightarrow +)$	$\dfrac{X,\alpha \Vdash \beta,Y}{X \Vdash \alpha\rightarrow\beta,Y}$
$(+\neg)$	$\dfrac{X \Vdash \alpha,Y}{X,\neg\alpha \Vdash Y}$	$(\neg +)$	$\dfrac{X,\alpha \Vdash Y}{X \Vdash \neg\alpha,Y}$
$(+\wedge)$	$\dfrac{X,\alpha,\beta \Vdash Y}{X,\alpha\wedge\beta \Vdash Y}$	$(\wedge +)$	$\dfrac{X \Vdash \alpha,Y;\ \ X \Vdash \beta,Y}{X \Vdash \alpha\wedge\beta,Y}$
$(+\vee)$	$\dfrac{X,\alpha \Vdash Y;\ \ X,\beta \Vdash Y}{X,\alpha\vee\beta \Vdash Y}$	$(\vee +)$	$\dfrac{X \Vdash \alpha,\beta,Y}{X \Vdash \alpha\vee\beta,Y}$
$(+\equiv)$	$\dfrac{X,\alpha,\beta \Vdash Y;\ \ X \Vdash \alpha,\beta,Y}{X,\alpha\equiv\beta \Vdash Y}$	$(\equiv +)$	$\dfrac{X,\alpha \Vdash \beta,Y;\ \ X,\beta \Vdash \alpha,Y}{X \Vdash \alpha\equiv\beta,Y}$

Znak ; jest tu separatorem. Zauważmy, że poszczególne reguły dotyczą wprowadzania lub eliminacji stałych logicznych (tu: spójników zdaniowych).

2. Niektóre własności relacji $\Vdash$

1. Relacja $\Vdash$ jest monotoniczna, tj. dla dowolnych X, Y, X_1, Y_1:

- jeśli $X \Vdash Y$, to $X, X_1 \Vdash Y, Y_1$.

2. Jeśli $X \Vdash Y$, to istnieją skończone zbiory X_1 oraz Y_1 takie, że: $X_1 \Vdash Y_1$.

3. Wszystkie reguły wymienione w tabeli w punkcie 1 są ***odwracalne***:

$(+\rightarrow)^*$	$\dfrac{X,\alpha\rightarrow\beta \Vdash Y}{X,\beta\Vdash Y;\ \ X\Vdash\alpha,Y}$	$(\rightarrow+)^*$	$\dfrac{X\Vdash\alpha\rightarrow\beta,Y}{X,\alpha\Vdash\beta,Y}$
$(+\neg)^*$	$\dfrac{X,\neg\alpha\Vdash Y}{X\Vdash\alpha,Y}$	$(\neg+)^*$	$\dfrac{X\Vdash\neg\alpha,Y}{X,\alpha\Vdash Y}$
$(+\wedge)^*$	$\dfrac{X,\alpha\wedge\beta\Vdash Y}{X,\alpha,\beta\Vdash Y}$	$(\wedge+)^*$	$\dfrac{X\Vdash\alpha\wedge\beta,Y}{X\Vdash\alpha,Y;\ \ X\Vdash\beta,Y}$
$(+\vee)^*$	$\dfrac{X,\alpha\vee\beta\Vdash Y}{X,\alpha\Vdash Y;\ \ X,\beta\Vdash Y}$	$(\vee+)^*$	$\dfrac{X\Vdash\alpha\vee\beta,Y}{X\Vdash\alpha,\beta,Y}$
$(+\equiv)^*$	$\dfrac{X,\alpha\equiv\beta\Vdash Y}{X,\alpha,\beta\Vdash Y;\ \ X\Vdash\alpha,\beta,Y}$	$(\equiv+)^*$	$\dfrac{X\Vdash\alpha\equiv\beta,Y}{X,\alpha\Vdash\beta,Y;\ \ X,\beta\Vdash\alpha,Y}$

4. Dowodzi się następującego ***twierdzenia o cięciu***:

Dla dowolnych X_1, X_2, Y_1 i Y_2 oraz formuły α:

jeśli $X_1,\alpha \Vdash Y_1$ i $X_2 \Vdash \alpha, Y_2$, to $X_1, X_2 \Vdash Y_1, Y_2$.

Tezę tego twierdzenia zapisać można również tak:

$$\frac{X_1,\alpha \Vdash Y_1;\quad X_2 \Vdash \alpha, Y_2}{X_1, X_2 \Vdash Y_1, Y_2}.$$

3. Operacja konsekwencji

Zdefiniujemy operację C_{gen} ***konsekwencji w sensie Gentzena***:

$$C_{gen}(X) = \{\alpha \in F_{KRZ} : X \Vdash \alpha\}.$$

Tak określona operacja C_{gen} ma własności (C1)–(C4) podane na wykładach 5–7, czyli jest operacją konsekwencji (w sensie Tarskiego).

Ponadto, dla dowolnego zbioru formuł X zbiór $C_{gen}(X)$ jest domknięty na odrywanie:

jeśli $\alpha, \alpha\rightarrow\beta \in C_{gen}(X)$, to $\beta \in C_{gen}(X)$.

Relacja $\Vdash$ jest domknięta na podstawianie, w następującym sensie:

jeśli $X \Vdash Y$, to $h^e[X] \Vdash h^e[Y]$, dla dowolnego $e : Var_{KRZ} \rightarrow F_{KRZ}$.

4. Przykłady dowodów

Zwykle dowody w rachunku sekwentów Gentzena zapisuje się jako ciągi „ułamków”, w których „licznikach” występują założenia reguł, a w „mianownikach” stosowne tezy (tychże reguł).

Postąpimy tu nieco inaczej. Będziemy mianowicie reprezentować dowody przez drzewa. Bezpośrednie następniki danego wierzchołka to założenia reguły, dla której ów wierzchołek jest tezą (wnioskiem tej reguły). Liście drzewa dowodowego są zawsze postaci $X \Vdash Y$, gdzie $X \cap Y \neq \emptyset$. Dla sekwentów nie będących liśćmi podajemy (z prawej strony, w górnej frakcji) informację o zastosowanej regule.

Sekwenty postaci $\emptyset \Vdash X$ nazywamy ***tezami*** systemu Gentzena.

Udowodnimy dla przykładu, że aksjomaty systemu podanego na wykładach 5–7 są tezami systemu Gentzena.

1. Dowód formuły: $(\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$.

$$\emptyset \Vdash (\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))\ ^{(\to+)}$$
$$\alpha \to \beta \Vdash (\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)\ ^{(\to+)}$$
$$\alpha \to \beta, \beta \to \gamma \Vdash \alpha \to \gamma\ ^{(\to+)}$$
$$\alpha, \alpha \to \beta, \beta \to \gamma \Vdash \gamma\ ^{(+\to)}$$
$$\alpha, \beta, \beta \to \gamma \Vdash \gamma\ ^{(+\to)} \qquad \alpha, \beta \to \gamma \Vdash \alpha, \gamma$$
$$\alpha, \beta, \gamma \Vdash \gamma \qquad \alpha, \beta \Vdash \beta, \gamma$$

2. Dowód formuły: $\alpha \to (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta)$.

$$\emptyset \Vdash \alpha \to (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta)\ ^{(\to+)}$$
$$\alpha \to (\alpha \to \beta) \Vdash \alpha \to \beta\ ^{(\to+)}$$
$$\alpha, \alpha \to (\alpha \to \beta) \Vdash \beta\ ^{(+\to)}$$
$$\alpha, \alpha \to \beta \Vdash \beta\ ^{(+\to)} \qquad \alpha \Vdash \alpha, \beta$$
$$\alpha, \beta \Vdash \beta \qquad \alpha \Vdash \alpha, \beta$$

3. Dowód formuły: $\alpha \to (\beta \to \alpha)$.

$$\emptyset \Vdash \alpha \to (\beta \to \alpha)\ ^{(\to+)}$$
$$\alpha \Vdash \beta \to \alpha\ ^{(\to+)}$$
$$\alpha, \beta \Vdash \alpha$$

4. Dowód formuły: $(\alpha \wedge \beta) \to \alpha$.

$$\emptyset \Vdash (\alpha \wedge \beta) \to \alpha \;^{(\to+)}$$
$$\alpha \wedge \beta \Vdash \alpha \;^{(+\wedge)}$$
$$\alpha, \beta \Vdash \alpha$$

5. Dowód formuły: $(\alpha \wedge \beta) \to \beta$.

$$\emptyset \Vdash (\alpha \wedge \beta) \to \beta \;^{(\to+)}$$
$$\alpha \wedge \beta \Vdash \alpha \;^{(+\wedge)}$$
$$\alpha, \beta \Vdash \beta$$

6. Dowód formuły: $(\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \gamma) \to (\alpha \to (\beta \wedge \gamma)))$.

$$\emptyset \Vdash (\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \gamma) \to (\alpha \to (\beta \wedge \gamma))) \;^{(\to+)}$$
$$\alpha \to \beta \Vdash (\alpha \to \gamma) \to (\alpha \to (\beta \wedge \gamma)) \;^{(\to+)}$$
$$\alpha \to \beta, \alpha \to \gamma \Vdash \alpha \to (\beta \wedge \gamma) \;^{(\to+)}$$
$$\alpha, \alpha \to \beta, \alpha \to \gamma \Vdash \beta \wedge \gamma \;^{(\wedge+)}$$
$$\alpha, \alpha \to \beta, \beta \to \gamma \Vdash \;^{(+\to)} \qquad \alpha, \alpha \to \beta, \alpha \to \gamma \Vdash \gamma \;^{(+\to)}$$
$$\alpha, \beta, \alpha \to \gamma \Vdash \beta \quad\; \alpha, \alpha \to \gamma \Vdash \alpha, \beta \qquad \alpha, \alpha \to \beta, \gamma \Vdash \gamma \quad\; \alpha, \alpha \to \beta \Vdash \alpha, \gamma$$

7. Dowód formuły: $\alpha \to (\alpha \vee \beta)$.

$$\emptyset \Vdash \alpha \to (\alpha \vee \beta) \;^{(\to+)}$$
$$\alpha \Vdash \alpha \vee \beta \;^{(\vee+)}$$
$$\alpha \Vdash \alpha, \beta$$

8. Dowód formuły: $\alpha \to (\beta \vee \alpha)$.

$$\emptyset \Vdash \alpha \to (\beta \vee \alpha) \;^{(\to+)}$$
$$\alpha \Vdash \beta \vee \alpha \;^{(\vee+)}$$
$$\alpha \Vdash \beta, \alpha$$

9. Dowód formuły: $(\alpha \to \gamma) \to ((\beta \to \gamma) \to ((\alpha \vee \beta) \to \gamma))$.

$$\emptyset \Vdash (\alpha \to \gamma) \to ((\beta \to \gamma) \to ((\alpha \vee \beta) \to \gamma))\ ^{(\to +)}$$

$$\alpha \to \gamma \Vdash (\beta \to \gamma) \to ((\alpha \vee \beta) \to \gamma)\ ^{(\to +)}$$

$$\alpha \to \gamma, \beta \to \gamma \Vdash (\alpha \vee \beta) \to \gamma\ ^{(\to +)}$$

$$\alpha \vee \beta, \alpha \to \gamma, \beta \to \gamma \Vdash \gamma\ ^{(+\vee)}$$

$$\alpha, \alpha \to \gamma, \beta \to \gamma \Vdash \gamma \qquad \beta, \beta \to \gamma, \alpha \to \gamma \Vdash \gamma$$

10. Dowód formuły: $(\alpha \equiv \beta) \to (\alpha \to \beta)$.

$$\emptyset \Vdash (\alpha \equiv \beta) \to (\alpha \to \beta)\ ^{(\to +)}$$

$$\alpha \equiv \beta \Vdash \alpha \to \beta\ ^{(\to +)}$$

$$\alpha, \alpha \equiv \beta \Vdash \beta\ ^{(+\equiv)}$$

$$\alpha, \alpha, \beta \Vdash \beta \qquad \alpha \Vdash \alpha, \beta, \beta$$

11. Dowód formuły: $(\alpha \equiv \beta) \to (\beta \to \alpha)$.

$$\emptyset \Vdash (\alpha \equiv \beta) \to (\beta \to \alpha)\ ^{(\to +)}$$

$$\alpha \equiv \beta \Vdash \beta \to \alpha\ ^{(\to +)}$$

$$\beta, \alpha \equiv \beta \Vdash \alpha\ ^{(+\equiv)}$$

$$\beta, \alpha, \beta \Vdash \alpha \qquad \beta \Vdash \alpha, \beta, \alpha$$

12. Dowód formuły: $(\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \alpha) \to (\alpha \equiv \beta))$.

$$\emptyset \Vdash (\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \alpha) \to (\alpha \equiv \beta))\ ^{(\to +)}$$

$$\alpha \to \beta \Vdash (\beta \to \alpha) \to (\alpha \equiv \beta)\ ^{(\to +)}$$

$$\alpha \to \beta, \beta \to \alpha \Vdash \alpha \equiv \beta\ ^{(\equiv +)}$$

$$\alpha, \alpha \to \beta, \beta \to \alpha \Vdash \beta \qquad \beta, \alpha \to \beta, \beta \to \alpha \Vdash \alpha$$

13. Dowód formuły: $(\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)$.

$$
\begin{array}{c}
\emptyset \Vdash (\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)\ ^{(\to +)} \\
| \\
\neg\beta \to \neg\alpha \Vdash \alpha \to \beta\ ^{(\to +)} \\
| \\
\alpha, \neg\beta \to \neg\alpha \Vdash \beta\ ^{(\to +)} \\
\swarrow \qquad \searrow \\
\begin{array}{cc}
\alpha, \neg\alpha \Vdash \beta\ ^{(+\neg)} & \alpha \Vdash \beta, \neg\beta\ ^{(\neg +)} \\
| & | \\
\alpha \Vdash \alpha, \beta & \alpha, \beta \Vdash \beta
\end{array}
\end{array}
$$

5. Związki z innymi operacjami konsekwencji

Można pokazać, że dla dowolnego zbioru formuł X języka KRZ:

$$C_{gen}(X) = C_{krz}(X).$$

Oznacza to, że konsekwencja w sensie Gentzena jest identyczna z każdą z pozostałych podanych w tych wykładach operacji konsekwencji:

$$C_{gen}(X) = C_{krz}(X) = C_{jas}(X) = C_{rez}(X) = C_{tab}(X) = C_{\mathfrak{B}_2}(X).$$

Oznacza to także, że konsekwencja w sensie Gentzena jest ***trafna*** oraz ***pełna***.

Wykorzystywana literatura

Gentzen, G. 1935. Untersuchungen über das logische Schliessen. *Mathematische Zeitschrift* **39**, 176–210, 405–431.

Rasiowa, H., Sikorski, R. 1963. *The Mathematics of Metamathematics.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Pogorzelski, W.A. 1981. *Klasyczny rachunek kwantyfikatorów. Zarys teorii.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Smullyan, R. 1968. *First-Order Logic.* Springer Verlag, Berlin.

* * *

JERZY POGONOWSKI
Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl