O przekonaniach i przekonywaniu (6)

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl
pogon@amu.edu.pl

4 kwietnia 2007

Plan na dziś:

- indukcja enumeracyjna;
- wnioskowania z analogii;
- indukcja eliminacyjna (kanony Milla);
- wnioskowania statystyczne;
- paradoksy statystyczne.

Wnioskowania indukcyjne

Znają Państwo niebezpieczeństwa zawierzeniu, iż jesteśmy *intuicyjnymi statystykami* [np. *The Monty Hall Problem*].
Z drugiej strony, jesteście oczywiście świadomi, iż zarówno w naukach empirycznych, jak i w codziennych staraniach, aby utrzymywać się na szczycie Wielkiego Łańcucha Pokarmowego Planety, nie ograniczamy się do wnioskowań dedukcyjnych, bazujących na niezawodnych regułach wnioskowania.
Uznawanie pewnych reguł zawodnych za poprawne nie jest niezgodne z zasadami racjonalności. Trzeba jednak w miarę precyzyjnie określić kryteria owej poprawności.

Jednym z takich kryteriów jest zalecenie, aby stopień pewności, z jakim przyjmujemy wniosek nie przewyższał stopnia pewności z którym uznajemy przesłanki oraz stopnia ufności w stosowane reguły inferencji.

Wnioskowania niemonotoniczne

Z elementarnego kursu logiki pamiętamy, że klasyczny operator konsekwencji Cn jest monotoniczny:
jeśli $X \subseteq Y$, to $Cn(X) \subseteq Cn(Y)$.
Oznacza to, że zwiększając zbiór przesłanek nie pomniejszamy zbioru wniosków.

Jest tak w przypadku wnioskowań dedukcyjnych.
Zwróćmy jednak uwagę, że przeprowadzamy także wnioskowania w sytuacjach, gdy nasza wiedza się zmienia — np. gdy zbiór akceptowanych przesłanek się zwiększa.
Nowa wiedza może kazać odrzucić pewne uznawane dotąd wnioski.

W takich sytuacjach mamy do czynienia z wnioskowaniami niemonotonicznymi.

Wnioskowania indukcyjne

Ograniczymy się tu do bardzo tradycyjnego wyliczenia podstawowych typów wnioskowań **uprawdopodobniających**, tj. wnioskowań, w których wniosek (choć nie wynika logicznie z przesłanek, to) przyjmowany jest z pewnym prawdopodobieństwem prawdziwości:

- indukcja enumeracyjna;
- wnioskowania z analogii;
- indukcja eliminacyjna (kanony Milla).

Indukcja enumeracyjna

Indukcja enumeracyjna. Jest to typ rozumowania, w którym z tego, iż pewna liczba przedmiotów danego rodzaju posiada jakąś cechę (i przy braku przykładu, iż jakiś przedmiot rozważanego rodzaju tejże cechy nie posiada) wnioskujemy, że wszystkie przedmioty tego rodzaju mają daną cechę.

Przedmiot x_1 rodzaju A ma cechę W.
Przedmiot x_2 rodzaju A ma cechę W.
Przedmiot x_3 rodzaju A ma cechę W.
$\vdots$
Przedmiot x_n rodzaju A ma cechę W.
($\ast$) Nie znaleziono przedmiotów rodzaju A nie posiadających cechy W.

Zatem: wszystkie przedmioty rodzaju A mają cechę W.

Indukcja enumeracyjna — przykłady

Powyższy schemat to schemat indukcji enumeracyjnej zupełnej. Jeśli pominiemy przesłankę $(*)$, to otrzymamy schemat indukcji enumeracyjnej niezupełnej.

- Cyjanek potasu dobrze rozpuszcza się w wodzie. Cyjanek potasu dobrze rozpuszcza się w mleku. Cyjanek potasu dobrze rozpuszcza się w winie. Nie jest znana ciecz, w której cyjanek potasu nie byłby dobrze rozpuszczalny. Zatem cyjanek potasu dobrze rozpuszcza się w każdej cieczy. Smacznego!
- Ciało stałe A_1 po podgrzaniu rozszerzyło się. Ciało stałe A_2 po podgrzaniu rozszerzyło się. Ciało stałe A_3 po podgrzaniu rozszerzyło się. ... Zatem każde ciało stałe po podgrzaniu rozszerza się.
- Jędrzej G. jest fanatykiem. Jego syn, Maciej G. jest fanatykiem. Jego syn, Roman G. jest fanatykiem. Zatem wszyscy męscy potomkowie w rodzinie G. są fanatykami.

Wnioskowania z analogii

Wnioskowanie z analogii. Jest to typ rozumowania, w którym z tego, iż pewna liczba przedmiotów danego rodzaju posiada jakąś cechę (i przy braku przykładu, iż jakiś przedmiot rozważanego rodzaju tejże cechy nie posiada) wnioskujemy, że następny z przedmiotów tego rodzaju ma rozważaną cechę.

$$
\begin{array}{c}
\text{Przedmiot } x_1 \text{ rodzaju } A \text{ ma cechę } W. \\
\text{Przedmiot } x_2 \text{ rodzaju } A \text{ ma cechę } W. \\
\text{Przedmiot } x_3 \text{ rodzaju } A \text{ ma cechę } W. \\
\vdots \\
\text{Przedmiot } x_n \text{ rodzaju } A \text{ ma cechę } W. \\
(*) \text{ Nie znaleziono przedmiotów rodzaju } A \text{ nie posiadających cechy } W. \\
\hline
\text{Zatem: przedmiot } x_{n+1} \text{ rodzaju } A \text{ ma cechę } W.
\end{array}
$$

Wnioskowania z analogii — przykłady

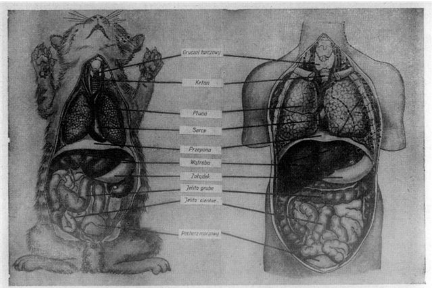
Uwaga. Za wnioskowania z analogii uważa się także wnioskowania przeprowadzane wedle następującego schematu:

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Każdy przedmiot rodzaju } A \text{ ma cechę } W.\\ \text{Przedmiot } x_1 \text{ jest rodzaju } A.\end{array}}{\text{Zatem: przedmiot } x_1 \text{ ma cechę } W.}$$

- Na każdej planecie, na której znajduje się woda, jest też życie. Na Marsie znajduje się woda. Zatem na Marsie jest życie.
- I Rzeczpospolita upadła. II Rzeczpospolita upadła. III Rzeczpospolita upadła. Zatem IV Rzeczpospolita upadnie.
- Jędrzej G. jest fanatykiem. Jego syn, Maciej G. jest fanatykiem. Jego syn, Roman G. jest fanatykiem. Zatem syn Romana G. jest fanatykiem.

Wnioskowania z analogii

O wnioskowaniach z analogii mówi się także, gdy dokonujemy porównań strukturalnych:



Rozmieszczenie wnętrzności kota i człowieka

Indukcja eliminacyjna

Indukcja eliminacyjna (Kanony Milla).
To rozumowania, które odwołują się do związku przyczynowego.
Tradycyjnie, wyróżnia się następujące typy indukcji eliminacyjnej:

- kanon jedynej różnicy;
- kanon jedynej zgodności;
- kanon reszt;
- kanon zmian towarzyszących.

Poniżej, $\overline{A}$ oznacza niezachodzenie zjawiska A
(ew.: zdarzenie przeciwne do A).

Podajemy cytaty z tłumaczenia *A System of Logic, Ratiocinative and Inductive* (1843) Johna Stuarta Milla dokonanego w 1879 roku przez Adolfa Dygasińskiego.

Indukcja eliminacyjna

Kanon jedynej zgodności.

$$\begin{array}{c}
\text{Współwystępują: } A,\ C,\ D,\ B. \\
\text{Współwystępują: } A,\ \overline{C},\ D,\ B. \\
\text{Współwystępują: } A,\ C,\ \overline{D},\ B. \\
\text{Współwystępują: } A,\ \overline{C},\ \overline{D},\ B. \\
\hline
\text{Zatem: } A \text{ jest przyczyną } B.
\end{array}$$

Uwaga o zasadzie caeteris paribus: w rozważaniu wpływu jednych wyróżnionych zjawisk na drugie zakłada się, że pozostałe, nie brane pod uwagę czynniki są takie same (a więc ich obecność można ignorować).

Kanon jedynej zgodności — przykłady

„Jeśli dla dwóch lub więcej przypadków badanego zjawiska wspólną jest jedna tylko okoliczność, wtedy okoliczność, w której zgadzają się wszystkie przypadki, jest przyczyną (lub skutkiem) danego zjawiska."

- Tęczowe barwy ukazujące się w bańkach mydlanych, tłuszczu lub smole rozlanych na wodzie, w blaszkach miki, w starych szybach lub przyciśniętych do siebie taflach szklanych.
- Przy przechodzeniu substancji ze stanu ciekłego w stały, substancje te krystalizują się.
- A jak rzecz się ma z ciepłem? Wytwarza się ono przy tarciu lub spalaniu, źródłem ciepła może być elektryczność lub ciśnienie. Czy można tu wnioskować o jednej przyczynie?

Indukcja eliminacyjna

Kanon jedynej różnicy.

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Współwystępują: } A, C, D, B.\\ \text{Współwystępują: } \overline{A}, C, D, \overline{B}.\end{array}}{\text{Zatem: } A \text{ jest przyczyną } B.}$$

Uwaga. Za pomocą tego kanonu sprawdzamy nie tylko okoliczności zachodzenia skutku, lecz także okoliczności jego niezachodzenia (istotną rolę odgrywają tu tzw. eksperymenty kontrolne).

Kanon jedynej różnicy — przykłady

„Jeżeli przypadek, w którym mające się badać zjawisko występuje i przypadek, w którym ono nie występuje, zgadzają się we wszystkich okolicznościach — prócz jednej — spotykającej się tylko w pierwszym przypadku, to okoliczność, stanowiąca jedyną różnicę dwóch przypadków, jest skutkiem albo przyczyną, albo niezbędną częścią przyczyny zjawiska."

- Powstawanie rosy (doświadczenie Wells'a).
- Występowanie dźwięku zależne od obecności powietrza (Hawkesbee 1705).
- Podanie środka przeciwbólowego powoduje znieczulenie na ból.

Indukcja eliminacyjna

Kanon zgodności i różnicy.
Dwa powyższe kanony łączy się czasem w jeden wspólny:

„Jeżeli dwa lub więcej przypadków, w których występuje zjawisko, — przedstawia jednę okoliczność wspólną, — podczas gdy dwa lub więcej przypadków, w których nie występuje zjawisko, nie przedstawia nic wspólnego oprócz nieobecności tej okoliczności, — wówczas okoliczność, w której jedynie różnią się oba szeregi przypadków, jest skutkiem albo przyczyną, albo też niezbędną częścią przyczyny zjawiska."

- Podwójne załamanie światła w niektórych kryształach (np. kalcyt): własność ta występuje tylko w ciałach krystalicznych, o nierównych osiach krystalograficznych.

Indukcja eliminacyjna

Kanon reszt.

$$\frac{\text{Współwystępują: } A,\ B,\ C,\ X,\ Y. \quad \text{Współwystępują: } A,\ B,\ Y.}{\text{Zatem: } C \text{ jest przyczyną } X.}$$

Uwaga. Ten kanon właściwie redukuje się do kanonu różnicy.

Kanon reszt — przykłady

„Trzeba odjąć od jakiegoś zjawiska tę część, którą się zna według poprzednich indukcyj, jako skutek pewnych poprzedników, a reszta zjawiska będzie skutkiem pozostałych poprzedników."

- Gdy ważymy ciecz, odejmujemy wagę pustego naczynia od wagi naczynia wypełnionego cieczą.
- „Naprzykład fizycy, oznaczywszy rachunkiem chyżość dźwiękowej fali, przekonali się, iż w rzeczywistości dźwięk rozchodzi się szybciej, niźli to wskazuje rachunek. Ten nadmiar lub reszta chyżości jest następnik, posiadający odpowiedni poprzednik; poprzednik ten, według Laplaca, jest cieplik, wywiązujący się od zgęszczenia fali dźwiękowej; pierwiastek ten, wprowadzony w rachunek, najściślejsze wydał rezultaty." (Taine *Filozofia pozytywna w Anglii*, wyd. pol. 1883).

Indukcja eliminacyjna

Kanon zmian towarzyszących.
Niech A_i (dla $i = 1, 2, 3, \ldots$) oznacza stopnie intensywności czynnika A. Jeśli zmianom intensywności czynnika A odpowiadają zmiany intensywności czynnika B, to między tymi czynnikami zachodzi zależność, będąca prawdopodobnie związkiem przyczynowym.

$$\begin{array}{c}
\text{Współwystępują: } A_1,\ C,\ D,\ B_1. \\
\text{Współwystępują: } A_2,\ C,\ D,\ B_2. \\
\text{Współwystępują: } A_3,\ C,\ D,\ B_3. \\
\hline
\text{Zatem: istnieje zależność między } A \text{ i } B.
\end{array}$$

A im bardziej Puchatek zaglądał do środka, tym bardziej Prosiaczka tam nie było.

Kanon zmian towarzyszących — przykłady

„Każde zjawisko, zmieniające się w jakikolwiek sposób, — przy zmianie innego zjawiska w sposób szczególny — jest albo przyczyną, albo skutkiem tego zjawiska, lub łączy się z niem przez jakikolwiek przyczynowy związek."

- Intensywność zorzy polarnej oraz burz magnetycznych jest związana z występowaniem plam na Słońcu.
- Przy zachowaniu masy oraz temperatury gazu, jego objętość zmienia się odwrotnie proporcjonalnie do ciśnienia.
- Przy ustalonej podaży wzrasta cena towaru w miarę wzrostu popytu.
- Przypływy i odpływy zależne są od pozycji Księżyca.

Wyjaśnianie probabilistyczne

Wyjaśnianie probabilistyczne. Niech prawdopodobieństwo zachodzenia zdarzenia Z w warunkach W, tj. $P(Z/W)$ wynosi p. Schemat wyjaśniania probabilistycznego ma postać:

$$\begin{array}{c} W \\ P(Z/W) = p \\ \hline\hline Z \end{array}$$

(podwójna kreska ma tu oznaczać, że wnioskowanie ma charakter probabilistyczny: wniosek przyjmujemy z prawdopodobieństwem p). Kiedy takie wyjaśnienie uznajemy za wystarczające? Jest to pytanie o wartość p, dla której będziemy skłonni akceptować tego typu wyjaśnienia.

Wyjaśnianie probabilistyczne — przykłady

Wyjaśnianie probabilistyczne stosować możemy zarówno w przypadku zajścia pojedynczego zdarzenia, jak i w przypadku zjawisk masowych.

- Dlaczego Jaś zachorował na AIDS? Jaś bawił się z Kasią, chorą na AIDS. Prawdopodobieństwo zachorowania na AIDS przez wspólne zabawy wynosi 0.7.
- Gdy w drugim pokoleniu mieszańców danej populacji jedna cecha występuje z częstością 0.25, a druga, alternatywna do pierwszej, z częstością 0.75, to uznajemy, że sytuacja jest wyjaśniona przez prawa Mendla.
- Czy wyjaśnienia probabilistyczne mają takie samo zastosowanie w każdej skali? Pomyśl o mechanice kwantowej.

Przewidywanie probabilistyczne

Przewidywanie probabilistyczne. Gdy mamy do czynienia z próbą przewidzenia, jak prawdopodobne jest, że dane zjawisko Z zajdzie w warunkach W, to schematem takiego wnioskowania jest:

$$\frac{\begin{array}{c} W \\ P(Z/W) = p \end{array}}{Z}$$

(przesłanki takiego wnioskowania to jego praedicens, zaś jego wniosek to praedicandum).

Przewidywanie probabilistyczne — przykłady

Uwaga. Metodolodzy spierają się, czy między schematami wyjaśniania probabilistycznego i przewidywania probalistycznego zachodzi symetria. Zauważmy, że w wyjaśnianiu mamy do czynienia ze zdarzeniem przeszłym (lub teraźniejszym), a w przewidywaniu — ze zdarzeniem przyszłym.

- Jaś bawił się z Kasią, chorą na AIDS. Prawdopodobieństwo zachorowania na AIDS przez wspólne zabawy wynosi 0.7. Jaś zachoruje zatem na AIDS.
- Jak to jest z tym barometrem? Silny spadek wskazań barometru pozwala przewidywać burzę. Ale czy możemy wyjaśnić burzę, odwołując się do wskazań barometru?
- A jak rzecz się ma ze samospełniającymi się przekonaniami? Czy wiara, że kuracja będzie działać przyczynia się do skuteczności kuracji? [kogutacji, lustracji, itp.]

Prawa statystyczne

Prawa statystyczne. Rachunek prawdopodobieństwa zaczęto stosować w formułowaniu praw nauki około połowy XIX wieku.
Niektórzy filozowie wzdragali się przed uznaniem, iż prawa statystyczne adekwatnie opisują prawidłowości przyrody. (*Bóg nie gra w kości.* A może: *Bóg rozdaje karty w naszej grze w pokera z Naturą*?)
Pytanie, czy prawa statystyczne są adekwatne wiąże się oczywiście z problemem determinizmu.
Obecnie z prognoz statystycznych korzystamy nagminnie także w naukach społecznych, by nie wspomnieć o manipulowaniu opinią publiczną za pomocą stosownie spreparowanych sondaży statystycznych.
Z punktu widzenia filozofii nauki istotne jest to, że dla opisu pewnych sfer zjawisk jedynym aparatem pojęciowym (matematycznym), którego możemy używać, jest opis probabilistyczny.

Prawa statystyczne

Przykłady praw statystycznych.
Twierdzenie Boltzmanna: $S = k \cdot \log W$
(entropia jest wprost proporcjonalna do prawdopodobieństwa mikrostanu gazu; tu: S — entropia danej porcji gazu, W — prawdopodobieństwo jej mikrostanu, k — stała Boltzmanna).

Zasada nieoznaczoności Heisenberga: $\triangle p \cdot \triangle x \leqslant \hbar$
(nie jest możliwy **dokładny** pomiar jednocześnie: pędu p oraz położenia x cząstki — im dokładniej mierzymy jedną z tych wielkości, tym bardziej nieokreślona staje się wartość drugiej; ich iloczyn nie może być mniejszy od stałej Plancka $\hbar$).

Prawa statystyczne

Definicja ilości informacji według Shannona:

$$I = p \cdot \log p$$

(tu ilość informacji jest wyznaczona przez parametr probabilistyczny p).

Prawa statystyczne występują powszechnie w takich dyscyplinach empirycznych, jak np.:

- ekonomia;
- socjologia;
- psychologia;
- biologia (np.: Każdy gatunek jest jako całość dobrze przystosowany do środowiska, w jakim żyje).

Wnioskowania statystyczne

W argumentacjach używamy często zdań statystycznych, reprezentujących naszą wiedzę o świecie.
Zdania takie odnoszą się do różnych zbiorowości traktowanych jako całości.

Zdania statystyczne bywają często mylnie rozumiane, a zawarte w nich informacje — mylnie interpretowane.
Nieumiejętność analizowania rozumowań, w których występują zdania statystyczne bywa wykorzystywana do celów manipulacyjnych.

Do precyzyjnej analizy wnioskowań ze zdaniami statystycznymi jest często niezbędny zaawansowany aparat matematyczny.
Trzeba nie tylko umieć dodawać i mnożyć ułamki (brrr!), ale także czasem posłużyć się jakimś, za przeproszeniem, pierwiastkiem, albo — zgroza! — nawet całką.

Wnioskowania statystyczne

Ograniczymy się tu do przywołania kilku jedynie pojęć, związanych z wnioskowaniami statystycznymi:

- frakcja (ułamek, odsetek, proporcja);
- zależność statystyczna;
- wartość średnia;
- odchylenie standardowe;
- próba reprezentatywna;
- zależność statystyczna a przyczynowość.

Wykorzystujemy rozdział 11 książki:

- Szymanek, K., Wieczorek, K.A., Wójcik, A. 2003. *Sztuka argumentacji. Ćwiczenia w badaniu argumentów.* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Wnioskowania statystyczne

Frakcja (ułamek, odsetek, proporcja) elementów posiadających cechę C w populacji P jest to liczba określająca, jaka część elementów populacji P posiada cechę C. Frakcję cechy C w populacji P oblicza się dzieląc liczbę wszystkich przedmiotów posiadających cechę C przez liczebność populacji P. Niech $\ell(C)$ będzie liczbą elementów posiadających cechę C, a $\ell(P)$ liczebnością populacji P. Wtedy frakcja C w P to ułamek $\frac{\ell(C)}{\ell(P)}$.

- Co siedemnasta kobieta to lesbijka.
- Jedna trzecia społeczeństwa jest bezrobotna.
- W Polsce nie występują tsunami.
- Słonie mają trąby.
- Większość Polaków to katolicy.
- Względnie wielu Polaków zamierza wyemigrować z kraju. [!Uwaga!]

Wnioskowania statystyczne

Zależność statystyczna między cechami A i B w obrębie populacji ma miejsce wtedy, gdy informacja o posiadaniu przez wybrany element jednej z tych cech ma (dodatni lub ujemny) wpływ na ocenę szansy posiadania przez ten sam element drugiej cechy.

- Cecha A jest zależna pozytywnie od cechy B (w populacji P), gdy: $\frac{\ell(A)}{\ell(P)} < \frac{\ell(A \cap B)}{\ell(B)}$.
- Cecha A jest zależna negatywnie od cechy B (w populacji P), gdy: $\frac{\ell(A)}{\ell(P)} > \frac{\ell(A \cap B)}{\ell(B)}$.
- Cechy A i B są niezależne (w populacji P), gdy: $\frac{\ell(A)}{\ell(P)} = \frac{\ell(A \cap B)}{\ell(B)}$.

Wnioskowania statystyczne

Gdy A jest zależna pozytywnie (negatywnie) od B, to B jest oczywiście zależna negatywnie (pozytywnie) od A.

W przypadku pozytywnej zależności cechy A od cechy B mówi się też, że A i B są zbieżne, a w przypadku zależności negatywnej A od B, że A i B są rozbieżne.

Zależność statystyczna jest stopniowalna.

Inna jeszcze (równoważna poprzedniej) definicja:
cecha A jest zbieżna z cechą B, gdy odsetek obiektów posiadających cechę A jest większy wśród obiektów posiadających cechę B niż pośród obiektów nie posiadających cechy B.

Wnioskowania statystyczne

Ćwiczenie. Wśród 100 studentów jest 66 kobiet i 34 mężczyzn. Pośród kobiet 22 pali papierosy, pośród mężczyzn 17. Czy w tej grupie S są statystycznie zależne cechy:

- bycia osobą palącą P i bycia mężczyzną M;
- bycia osobą niepalącą N i bycia kobietą K;
- bycia kobietą K i bycia mężczyzną M.

Odpowiedź.

- P i M zbieżne: $\frac{\ell(P)}{\ell(S)} = \frac{39}{100} < \frac{\ell(P \cap M)}{\ell(M)} = \frac{17}{34}$;
- N i K zbieżne: $\frac{\ell(N)}{\ell(S)} = \frac{39}{100} < \frac{\ell(N \cap K)}{\ell(K)} = \frac{44}{66}$;
- K i M rozbieżne: $\frac{\ell(K)}{\ell(S)} = \frac{66}{100} > \frac{\ell(K \cap M)}{\ell(M)} = \frac{0}{34}$.

Wnioskowania statystyczne

Niech każdemu elementowi x populacji P będzie przyporządkowana jakaś wielkość liczbowa $f(x)$.

Wartość średnia (wartość oczekiwana, wartość przeciętna) parametru f w populacji P dana jest wzorem:

$$m_f = \frac{1}{\ell(P)} \cdot \sum_{i=1}^{\ell(P)} f(x_i).$$

Wartością średnią posługujemy się w zdaniach statystycznych mówiących np., że przeciętny Rosjanin wypija ćwierć litra alkoholu rocznie, przeciętny Polak zużywa rocznie pół mydła, przeciętny Szkot jest bardziej rozrzutny od przeciętnego Poznaniaka, itp.

Slogan wyborczy: Doprowadzimy do tego, że każdy obywatel będzie zarabiał powyżej średniej krajowej!

Wnioskowania statystyczne

Ćwiczenie.

- W pewnym kraju 1% mieszkańców zarabia 1000$ miesięcznie, a pozostałych 99% zarabia 5$ miesięcznie. Ile wynosi średni zarobek w tym kraju?
- Wykazać, że może istnieć kraj, w którym przeciętna długość życia mieszkańca wynosi 40 lat, a jednocześnie ponad połowa mieszkańców dożywa starości.

Odpowiedź.

- Mamy: $m_f = \frac{1}{100} \cdot (1 \cdot 1000 + 99 \cdot 5) = 14.95$.
- Gdyby np. 49% populacji umierało w wieku 1 roku, a pozostałych 51% dożywało (starczego!) wieku 77 lat, to średnia długość życia wynosiłaby 40 lat.

Wnioskowania statystyczne

Odchylenie standardowe σ_f parametru f w populacji P wyraża się liczbą:

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{1}{\ell(P)} \cdot \sum_{i=1}^{\ell(P)} (f(x_i) - m_f)^2}.$$

Odchylenie standardowe stanowi liczbową miarę „rozproszenia" („rozrzutu") wartości parametru f wokół średniej m_f.
Jeśli odchylenie standardowe jest niewielkie, to oznacza to, iż wartość $f(x)$ dla przypadkowo wybranego x jest bliska wartości średniej m_f.
Przedział liczbowy $(m_f - \sigma_f, m_f + \sigma_f)$ nazywamy czasem obszarem zmienności parametru f.

Reguła trzech sigm. Dla co najmniej 88% wszystkich elementów x populacji zachodzą nierówności: $m_f - 3\sigma_f < f(x) < m_f + 3\sigma_f$.

Wnioskowania statystyczne

- Jeśli średnia zarobków wynosi $m_f = 1000\$$, a odchylenie standardowe $\sigma_f = 20$, to zarobki co najmniej 88% ludności zawierają się w przedziale $(940, 1060)$.

Ćwiczenie. Czy w poniższych zdaniach mowa o: frakcji, zależności statystycznej, średniej, odchyleniu standardowym?

- Ludzie zażywający witaminę C rzadziej się przeziębiają.
- Kobiety są cierpliwe.
- Mężczyźni są bardziej od kobiet podatni na choroby serca.
- Anglicy są flegmatyczni.
- Statystyczny Francuz zjada $13 - 16$ żab miesięcznie.
- Przesyłki pocztowe wędrują do adresata przeciętnie $2 - 4$ dni.

Odpowiedź: na stronie 143 cytowanej książki.

Wnioskowania statystyczne

Nie zawsze mamy dostęp do całej populacji. Wnioskujemy wtedy np. na podstawie próby.
Uzyskiwanie informacji o populacji z próby jest sensowne wtedy, gdy próba w jakiś sposób odzwierciedla skład populacji. Najbardziej ogólne warunki nakładane na próby, to:

- reprezentatywność — próba w odniesieniu do dowolnej cechy zawiera taki sam odsetek elementów o tej cesze, jak cała populacja;
- dostateczna liczebność — wiarygodne oszacowania statystyczne wymagają prób liczących (z reguły) od kilkunastu do kilkuset elementów.

Próbę losową otrzymujemy, gdy każdy z elementów populacji ma identyczne szanse znalezienia się w próbie.
Mówimy, że cecha A jest w próbie nadreprezentowana, gdy odsetek elementów ją posiadających jest większy w próbie niż w populacji.

Wnioskowania statystyczne

Zależność statystyczna może wskazywać na istnienie związku przyczynowego. Często stosuje się argumentację o schemacie:

$$\frac{A \text{ jest zbieżne z } B}{A \text{ i } B \text{ są powiązane przyczynowo.}}$$

lub, w wersji skróconej:

$$\frac{\text{Znaczny odsetek } A \text{ jest } B}{A \text{ jest przyczyną } B.}$$

Uwaga. Do uzasadnienia zbieżności między A oraz B nie wystarczy informacja, że znaczny odsetek A jest B! Trzeba jeszcze wiedzieć, jaki jest odsetek B wśród ogółu elementów nie posiadających cechy A.

Wnioskowania statystyczne

We wnioskowaniach statystycznych na temat frakcji istotne bywają oszacowania odsetka cechy w populacji dokonywane na podstawie próby.

Przy ocenie argumentu statystyczno-kauzalnego powinna być wykluczona możliwość wytłumaczenia zbieżności cech A i B istnieniem tzw. trzeciego czynnika, czyli takiej cechy C, która jest „odpowiedzialna" za istnienie znacznej liczby elementów posiadających obie cechy A i B.

Zainteresowanych tą problematyką zachęcamy do sięgnięcia po stosowne podręczniki statystyki matematycznej, teorii podejmowania decyzji, itp.

Wnioskowania statystyczne

Ostatnie ćwiczenie. Oceń argumenty:

- Osoby rzadko chodzące do lekarza żyją dłużej od innych. Kto nie chodzi do lekarza, dożywa zatem sędziwego wieku.
- Im więcej jednostek straży pożarnej gasi pożar, tym większe straty pożar powoduje.
- W Wielkiej Brytani w pociągach, które uległy wypadkowi jechało z reguły mniej pasażerów niż zwykle. Zatem wielu Brytyjczyków obdarzonych jest zmysłem prekognicji.
- Wegetarianizm wcale nie jest zdrowy. Aż 40% wegetarian w wieku 50 lat choruje na różne przewlekłe choroby.
- U wszystkich chorych na chorobę Heiflera wykryto w jelitach bakterię Escherichia coli. Świadczy to niezbicie, że bakteria ta może wywoływać tę chorobę.

Wnioskowania statystyczne

- Nie jedzcie żywności zmodyfikowanej genetycznie. W zeszłym roku w USA bezpośrednio po spożyciu takiej żywności zmarło 37 osób.
- Od 40 lat leczę uzależnionych od heroiny. Spośród moich pacjentów aż 90% paliło marihuanę przed uzależnieniem się od heroiny. Dowodzi to, że zażywanie narkotyków „miękkich" prowadzi do późniejszego sięgnięcia po „twarde".

I jeszcze odpowiedź pewnego lekarza na pytanie dziennikarza, ile w swojej karierze przeprowadził sekcji na zwłokach:

„**Wszystkie** sekcje przeprowadziłem na zwłokach".

Paradoksy statystyczne

„Paradoksy statystyczne" — np. paradoks Condorceta polega na tym, że globalne preferencje wyborców mogą być cykliczne — czyli że relacja *większość preferuje* X *nad* Y **nie jest** przechodnia, nawet jeśli dla każdego wyborcy z osobna jego preferencje (*dany wyborca preferuje* X *nad* Y) są przechodnie.

Preferencje wyborców dla kandydatów A, B, C:

- Wyborca 1 — $A \geqslant B \geqslant C$
- Wyborca 2 — $B \geqslant C \geqslant A$
- Wyborca 3 — $C \geqslant A \geqslant B$

Wtedy $\frac{2}{3}$ wyborców uważa że A jest lepszy niż B, $\frac{2}{3}$ uważa że B jest lepszy niż C, i $\frac{2}{3}$ uważa że C jest lepszy niż A. Nie ma zwycięskiej koalicji większościowej.

Twierdzenie Arrowa

Twierdzenie Arrowa.
Jest to twierdzenie o niemożności ustalenia globalnej preferencji grupowej, przy naturalnych (!) założeniach dotyczących preferencji indywidualnych. Pokazuje więc ono, że w pewnych warunkach podjęcie racjonalnej decyzji grupowej (a więc podjętej np. na drodze demokratycznego głosowania) nie jest wykonalne.

Można poszukiwać interpretacji Twierdzenia Arrowa odnoszących się do systemów wiedzy (zespołów przekonań).
Sformułujemy Twierdzenie Arrowa w wersji popularnej, bez odwoływania się do formalizmu matematycznego. Najpierw założenia (o preferencjach [wyborach, głosowaniach] indywidualnych i grupowych):

Twierdzenie Arrowa

- **Uniwersalność.** Procedura głosowania musi na podstawie rankingu preferencji każdego z głosujących wybrać w sposób deterministyczny (bez udziału elementu losowego) ranking preferencji grupy.
- **Suwerenność.** Każdy wynik powinien być możliwy do osiągnięcia przez pewną kombinację głosów. Wykluczamy więc procedury, w których rozstrzygnięcia są narzucone.
- **Brak dyktatury.** Wynik głosowania zależy od głosów więcej niż jednego uczestnika.

Twierdzenie Arrowa

- **Monotoniczność.** Jeśli wyborca zmieni preferencje podnosząc ranking jednej z opcji, wynik musi albo zwiększyć ranking tej opcji, albo pozostawić go na tym samym miejscu, nie może go zaś obniżyć.
- **Niezależność nieistotnych alternatyw.** Jeśli ograniczymy zakres opcji do dowolnego podzbioru, względna kolejność opcji w wyniku musi pozostać taka sama jak w pełnym zbiorze. Dla przykładu: jeśli pełny zakres opcji to A, B, C, D, E, i wynikiem procedury jest kolejność CDEAB, to względna kolejność CAB musi zostać taka sama niezależnie od tego jak zmieniałyby się preferencje dla D i E.

Twierdzenie Arrowa

Teza Twierdzenia Arrowa mówi, że jeśli jest przynajmniej dwóch głosujących i przynajmniej trzy możliwości, to **nie da** się zbudować takiej metody grupowego podejmowania decyzji, która spełniałaby powyższe kryteria.

W większości systemów podejmowania decyzji poszczególne z wymienionych założeń są naruszane.
Twierdzenie Arrowa ma istotne konsekwencje dla teorii podejmowania decyzji. W szczególności, obnaża pewne mity na temat demokracji. Uwidacznia bowiem konflikty między preferencjami indywidualnymi a globalnymi. Kwestionuje też potoczne przekonanie o „demokratyczności" wszelkich decyzji podejmowanych metodą głosowania.

Koniec

To całkiem wystarczy na dziś, prawda? Weź Psa, idź na spacer!

W następnych wykładach zajmiemy się:

- uczciwymi chwytami argumentacyjnymi;
- nieuczciwymi chwytami argumentacyjnymi.