

Cudowne obiekty patologiczne

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM

www.logic.amu.edu.pl

pogon@amu.edu.pl

26 marca 2014

Nie ma brzydkiej matematyki

- To nie jest odczyt dla zawodowych matematyków. Rozważane przykłady są zrozumiałe dla średnio zdolnej maturzystki.
- Staramy się zwrócić uwagę na fakt, że *patologie pełnią twórczą rolę w matematyce*. Matematyka rozwija się m.in. poprzez *oswajanie patologii*. Czasem najpierw sama *kreuje* patologie, potem je oswaja.
- Kontekst odkrycia w matematyce: kryteria estetyczne, niezbędność i skuteczność, cenzura logiki (czasem: inspiracje empiryczne).
- Matematyka dostarcza wyzwolenia z obmierzłej potoczności, epistemologicznie otępiającej.

Dodatkiem do tej darmowej prezentacji jest darmowy handout dla słuchaczy obecnych w sali, zawierający m.in. ilustracje dostępne w sieci.

Normalne a niespodziewane

- Rola intuicji i praktyki matematycznej w ustalaniu standardów.
 - Metoda genetyczna i metoda aksjomatyczna.
 - Twierdzenia o klasyfikacji i twierdzenia o reprezentacji.
 - Postacie normalne, kanoniczne, standardowe.
 - Badanie obiektów przez morfizmy: niezmienniki i symetrie.
-
- „Dobre zachowanie” obiektów matematycznych – przykłady.
 - Rozumienie i osvajanie się w matematyce (*dictum* von Neumanna).
 - Matematyka a nauki empiryczne: inżynier, fizyk, matematyk.
 - Porażki myślenia życzeniowego: znikoma liczebność standardów, wszechobecność (w sensie liczebności lub miary) patologii.

Matematyczni figlarze

- **Wyjątki:** obiekty o szczególnym zestawie własności, bądź obiekty nie mieszczące się w ustalonej klasyfikacji. Np.: grupy sporadyczne, wielokomórki foremne.
- **Kontrprzykłady:** obiekty pozwalające na odróżnienie zakresów własności lub zakresów prawdziwości twierdzeń. Np.: obiekty różnicujące klasy struktur algebraicznych lub przestrzeni topologicznych.
- **Niespodzianki:** nieoczekiwane, acz „niezłośliwe” obiekty/twierdzenia. Np.: hipoteza Borsuka, hipoteza Mertensa.
- **Patologie:** obiekty „niechciane” bądź konstruowane specjalnie, dla ukazania ograniczeń (pojęć, metod, intuicji). Przykłady poniżej.

Rozejść się, obywatele!

- Bijekcję $c : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ określamy wzorem:
 - $$c(x, y) = y + \sum_{i=0}^{x+y} i = y + \frac{1}{2}(x+y)(x+y+1).$$
 - Funkcja c^{-1} daje wyliczenie $c^{-1}(0)$, $c^{-1}(1)$, $c^{-1}(2)$, ... wszystkich (nieujemnych) liczb wymiernych.
-
- Funkcja c umożliwia ustawienie w jeden przeliczalny ciąg przeliczalnie wielu przeliczalnych ciągów. Nie można jednak ustawić w jeden ciąg przeliczalny wszystkich gałęzi pełnego drzewa dwójkowego.
 - Cantor pokazał przeliczalność zbioru liczb algebraicznych.
 - Cantor podał dwa dowody nieprzeliczalności zbioru liczb rzeczywistych. Pokazał też, że przedział $(0, 1)$ jest równoliczny z \mathbb{R}^n , dla wszystkich $n \geq 1$. *Je le vois, mais je ne le crois pas!*

Tak wielu, a jakby nikogo nie było...

- $[0, 1]$, $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$, $C_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{3}{9}] \cup [\frac{6}{9}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1], \dots$
 - $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$, czyli: $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=0}^{3^{n-1}-1} ([0, \frac{3k+1}{3^n}] \cup [\frac{3k+2}{3^n}, 1])$.
-
- Zbiór C jest: domknięty, nieprzeliczalny, zwarty, doskonały, nigdzie gęsty, całkowicie niespójny. Jest zupełną przestrzenią metryczną, ma miarę Lebesgue'a równą zero, nie zawiera żadnego niepustego przedziału. Jest homeomorficzny z produktem $2^{\mathbb{N}}$, jest samopodobny, jego wymiar Hausdorffa równy jest $\frac{\ln 2}{\ln 3}$.
 - Każda zwarta przestrzeń metryczna jest ciągłym obrazem zbioru C . Każda nieprzeliczalna ośrodkowa i metryzowalna w sposób zupełny przestrzeń topologiczna zawiera jako podprzestrzeń przestrzeń Cantora.

Liczydła i ultraprodukty

- Długie i trudne osvajanie liczb: ujemnych, zespolonych, rzeczywistych. Z kolei kwaterniony, oktoniony, liczby p -adyczne, itd. miały bardziej szczęśliwe dzieciństwo (bo urodziły się w XIX wieku).
 - Do czego służą liczby? Jak je reprezentujemy? Własności: arytmetyczne, algebraiczne, porządkowe, topologiczne.
 - Między ciałem liczb wymiernych a ciałem liczb nadrzeczywistych – granice naturalności pojęcia liczby. Które *działania* są naturalne?
-
- Aksjomat Archimedesesa. Jak uporządkowane jest ciało funkcji wymiernych? Jak mierzyć kąty krzywoliniowe?
 - Stopnie nieskończoności: podejścia Cantora i Du Bois Reymonda.
 - Model niestandardowy Skolema: pierwsze zastosowanie ultraprodktu.

Regularności a punkty widzenia

- Jednoznaczność rozkładu. W pierścieniu $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ mamy:
 $2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5}) = 6$, $(2 + \sqrt{-5})(2 - \sqrt{-5}) = 9 = 3 \cdot 3$.
 - Dzielniki zera. W pierścieniu macierzy 2×2 mamy:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
 - Które własności operacji algebraicznych (łączność, przemienność, rozdzielność, antyprzemienność, identyczność Jacobiego, istnienie modułu działania, itd.) są naturalne?
-
- nieskończenie wymiarowe przestrzenie liniowe – bazy i rozkłady. Istnieje nieskończenie wymiarowa ośrodkowa przestrzeń Banacha nie posiadająca bazy (Enflo 1973).
 - Grupy-potwory Tarskiego: grupy nieskończone, których każda nietrywialna podgrupa jest grupą cykliczną rzędu p (p pierwsza).

Gdy precyzja zastępuje intuicję, rodzą się potwory

- Figlarne sinusy: sinus topologiczny oraz okrąg warszawski.
 - Krzywa Weierstrassa: ciągła, nigdzie nie różniczkowalna.
 - Funkcje: Thomae i Dirichleta (indykatory zbioru liczb wymiernych).
-
- Krzywe Peana i Hilberta: ciągłe, nigdzie nie różniczkowalne, wypełniające swoim wykresem kwadrat jednostkowy.
 - Krzywa Volterra: wszędzie różniczkowalna, której pochodna jest ograniczona, ale nie jest całkowalna w sensie Riemanna.

Oraz całe mnóstwo różnorodnych obiektów fraktalnych, na których można grzecznie zarobić, publikując prace z estetycznymi rysunkami. Paprocie, kalafiory, chmury, płatki śniegu, pejzaże, itd.

Wizje Eulera, Riemanna, Cauchy'ego, Lebesgue'a...

- Przepisy BHP dla szeregów nieskończonych: rodzaje i kryteria zbieżności. Jak uzasadniano, że $\infty < -1$?
- Róg Gabriela: nieskończona powierzchnia ograniczająca skończoną objętość. Szereg harmoniczny. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.
- Zadanie dla Lakoffa i Núñeza: przy użyciu *Basic Metaphor of Infinity* (czyli metodą: *mówisz-masz*) skonstruować szereg najwolniej rozbieżny.
- Całkowanie na diabelskich schodach – funkcje: Lebesgue'a-Cantora (ciągła, o pochodnej prawie wszędzie równej zero) oraz Minkowskiego (ściśle rosnąca oraz ciągła o pochodnej równej zero dla każdego argumentu wymiernego).
- Funkcja różniczkowalna o *nieprzeliczalnym* zbiorze punktów krytycznych.

Prosta, płaszczyzna, przestrzeń

- Konstrukcje Sierpińskiego (znane): trójkąt, choinka, dywan, itd. Krzywa uniwersalna. Ważewski: dendryt uniwersalny.
 - Sierpiński: istnieje zbiór na płaszczyźnie, który ma z każdą prostą dokładnie dwa punkty wspólne.
 - Sztuczka: połączenie przeciwległych wierzchołków kwadratu rozłącznymi spójnymi obrazami łuków.
 - Miotłka Cantora i miotłka harmoniczna.
-
- Czworoscian nie jest równoważny przez rozkład z sześcianiem (np. naroże sześciangu jednostkowego nie jest równoważne przez rozkład z sześcianiem o boku $\frac{1}{\sqrt[3]{6}}$), ale...
 - Koło jest równoważne przez rozkład z kwadratem (Laczkovich).
 - Twierdzenie Banacha-Tarskiego o paradoksalnym rozkładzie kuli.

Kształty widzialne i niewidzialne

- Dzikie łuki Artina-Foxa: szatańskie zapętlenie.
 - Naszyjnik Antoine'a: torus, w którym są zapętłone torusy, w których są zapętłone torusy, w których są zapętłone torusy, w których...
 - Jeziora Wady: krzywa, będąca wspólnym brzegiem trzech obszarów na płaszczyźnie.
-
- Hawajski kolczyk i topologiczna \aleph_0 -róża: jak odróżnić bliźniaczki?
 - Sfera rogata Alexandera: homeomorficzna z S^2 , o grzecznym wnętrzu i dzikim zewnątrz.
 - Twierdzenie Smale'a: sferę dwuwymiarową można przenicować (bez rozrywania) w \mathbb{R}^3 .

Tajemnica tkwi w fakcie, że $2 + 2 = 4$

- Porządny świat powierzchni: pełna klasyfikacja. Orientowalność i charakterystyka Eulera. Podstawowe „cegietki”: sfera, torus, płaszczyzna rzutowa.
 - Każda jednospójna przestrzeń Riemanna ma jeden z trzech typów geometrii: Euklidesową, sferyczną lub hiperboliczną.
 - Różności w 3D: program geometryzacji Thurstona. 8 geometrii.
-
- Trudności w 4D: problem ustalenia czy dwie triangulowalne 4-różności są homeomorficzne jest nierozstrzygalny.
 - Sfery egzotyczne: np. w 7 wymiarach jest ich 28.
 - Egzotyczna \mathbb{R}^4 : jedyna egzotyczna R^n (ale za to posiadająca kontinuum wzajem niedyfeomorficznych struktur).

Trzeba znać miarę. . .

- Zbiór Vitaliego: każdy selektor rodziny \mathbb{R}/\approx , gdzie $x \approx y \equiv x - y \in \mathbb{Q}$. Nie jest mierzalny w sensie Lebesgue'a.
 - B jest zbiorem Bernsteina, gdy $B \cap X \neq \emptyset$ oraz $(\mathbb{X} - B) \cap X \neq \emptyset$ dla każdego zbioru Borelowskiego X (w nieprzeliczalnej przestrzeni polskiej \mathbb{X}). Nie jest mierzalny w sensie Lebesgue'a.
 - Mierzenie długości: uciekamy przed zbrocenią po spirali Besicovitcha.
 - Mierzenie powierzchni i objętości: sfera Besicovitcha (dowolnie mała powierzchnia ograniczająca dowolnie dużą objętość).
-
- Obracanie igły: drzewo Perrona i zbiór Kakeyi.
 - Kula jednostkowa o nieskończonej mierze. W nieskończonej wymiarowej przestrzeni Hilberta nie może istnieć nietrywialna miara Borelowska niezmiennicza na przesunięcia.

Złudzenia i przesady probabilistyczne

- Ciągi całkowicie losowe. Nieistniejące ciągi von Misesa. Ile losowości potrafimy uzyskać?
 - Liczby normalne, a przy okazji: liczby Liouville'a i miara niewymierności.
-
- Niezależność zdarzeń nie jest cechą samych zdarzeń, ale zależy od miary. Patrz: handout.
-
- Skończony zbiór liczb spełnia *prawo Benforda*, jeśli częstość występowania pierwszych cyfr tych liczb (zapisanych w bazie b) wyraża się wzorem: $P(k) = \log_b(1 + \frac{1}{k})$. Większość danych statystycznych spełnia prawo Benforda, co ułatwia np. wykrycie oszustw podatkowych.

Niespodzianki logiczne

- Logiki modalne czy teorie modalności? Matematyczne modele modalności.
 - Modele niestandardowe: arytmetyka i analiza. Czy istnieją *prawdziwe* liczby rzeczywiste?
 - Patologie (?) klas spełniania: czy *aksjomatyczna* teoria prawdy daje wyniki zaskakujące?
-
- Ezoteryczne konstrukcje w teorii rekursji. Jaką wiedzę o obliczalności uzyskujemy, badając skomplikowane twory nieobliczalne?
 - Pytanie Harveya Friedmana: czy patologie odpowiedzialne są za niezupełność teorii?

Światy zbiorów

- Szukanie „złotego środka” dla zbioru potęgowego: pomiędzy $\wp_{def}(x)$ a $\wp(x)$. Jakiej części $\wp(x)$ potrzebuje matematyka?
 - Weźmy dowolny przeliczalny przechodni model (wystarczająco dużego fragmentu) teorii mnogości. . . A dalej *metodą siłową*.
 - Mnogość zdań nierozstrzygalnych w ZF. Program Woodina dotyczący hipotezy kontinuum.
-
- Duże liczby kardynalne. Opinie Hausdorffa, Zermela, Grothendiecka o liczbach mocno nieosiągalnych. Wyniki Banacha, Ulama, Solovaya o liczbach mierzalnych.
 - Aksjomat Martina. Drzewa: Suslina, Aronszajna, Kurepy. Diament Jensena.

Twórcza rola patologii

- Obiekty patologiczne bywają osławiane; często prowadzą do nowych teorii. Matematyk nigdy nie traktuje obojętnie patologii.
- Nie zajmowali się „ślepych uliczek” w matematyce: poglądami porzucanymi (np.: aksjomat ograniczenia Fraenkla). Pamiętajmy o żywotach *nieskończenie małych* (życie–unicestwienie–wskrzeszenie).
- Pamiętajmy też, że np. teorię mnogości uważano za:
 - raj, z którego nie damy się wypędzić (Hilbert)
 - zarazę, z której matematyka się wyleczy (Kronecker)
 - dziwną kandydatkę na podstawy matematyki (Skolem)
 - teorię, która będzie (?) podobna do topologii ogólnej (Mostowski)
 - paradygmat, który zniknie, gdy wymrą jego przedstawiciele (Awodey).
- Aksjomaty ekstremalne i modele zamierzone teorii: nadzieje i rozczarowania. Optymizm poznawczy matematyków.

Znane listy kontrprzykładów:

- Gelbaum, B.R., Olmsted, J.M.H. 1990. *Theorems and Counterexamples in Mathematics*. Springer-Verlag, New York.
- Gelbaum, B.R., Olmsted, J.M.H. 2003. *Counterexamples in Analysis*. Dover Publications, Inc., Mineola, New York.
- Steen, L.A., Seebach, J.A., Jr. 1995. *Counterexamples in Topology*. Dover Publications, Inc., New York.
- Wise, G.L., Hall, E.B. 1993. *Counterexamples in Probability and Real Analysis*. Oxford University Press, New York.

Ciekawe dyskusje i materiały dostępne w sieci:

- <http://mathoverflow.net/>
- <http://math.stackexchange.com>
- <http://mathforum.org/library/>