Metalogika (13)

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl
pogon@amu.edu.pl

Uniwersytet Opolski

Plan wykładu

Kontynuujemy elementarne wprowadzenie do teorii modeli. Niniejszy wykład zawiera m.in.:

- informacje dotyczące typów elementów oraz związanych z nimi pojęć,
- kilka twierdzeń charakteryzujących realizowanie oraz omijanie typów,
- informacje o niektórych rodzajach modeli, wyznaczonych przez liczbę realizowanych w nich typów,
- Twierdzenie Morleya, wraz z dowodem.

- Pełny tekst, wraz z dowodami wszystkich twierdzeń oraz przykładami zawiera przygotowywany podręcznik ***Wstęp do teorii modeli***.

Powtarzamy: to tylko wprowadzenie do Elementarza

- Nie jesteśmy tak zarozumiali i bezczelni, aby twierdzić, iż ta i poprzednia prezentacja stanowi wystarczające wprowadzenie w problematykę teorii modeli. Staramy się jedynie przybliżyć słuchaczom niektóre wybrane pojęcia i twierdzenia tej teorii.
- Nadto, ponieważ wykłady przeznaczone są dla filozofów, unikamy epatowania skomplikowanymi przykładami matematycznymi. Prezentacja na tym oczywiście traci, ale sądzimy, iż wystarczająco realizuje zamierzony cel dydaktyczny.
- W obecnej wersji niniejszej prezentacji ***pomijamy*** systematyczne omówienie zagadnień ***współczesnej*** teorii modeli.

Czytelnik poważnie zainteresowany teorią modeli zechce zajrzeć choćby do prac wymienionych na końcu prezentacji.

Lokalne własności modeli

Typy to pewne zbiory formuł ze zmiennymi wolnymi, dla których zachodzą określone warunki związane ze spełnianiem formuł w modelach. Formuły ze zmiennymi wolnymi definiują pewne podzbiory uniwersum modelu (lub jakiejś potęgi kartezjańskiej tego uniwersum). Badanie typów to zatem badanie zbiorów definiowalnych w modelach.

- Zdania opisują modele jako całości. Natomiast elementy (uniwersum) modelu charakteryzowane mogą być przez formuły (z jedną zmienną wolną), które są o tych elementach prawdziwe.
- Tak więc, element $a \in dom(\mathfrak{A})$ może zostać scharakteryzowany przez zbiór tych formuł $\psi(x)$, dla których $\mathfrak{A} \models \psi(x)[a]$.
- Ogół takich formuł opisuje więc „miejsce, które a zajmuje w modelu $\mathfrak{A}$." Podobnie dla układów n elementów uniwersum modelu, dla dowolnej n.

Przypomnienie: algebry Lindenbauma

Jak pamiętamy, w zbiorze wszystkich zdań dowolnej teorii T wprowadzić można relację równoważności $\equiv_T$ w sposób następujący: $\psi \equiv_T \varphi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $T \vdash \psi \equiv \varphi$. Zbiór ilorazowy tej relacji to uniwersum ***algebry Lindenbauma*** dla teorii T, oznaczanej przez $\mathcal{L}_T$.

Podobnie, w zbiorze formuł Fml_n^T (o ***co najwyżej*** n zmiennych wolnych) języka teorii T można wprowadzić (dla każdej n) relację równoważności $\equiv_T^n$: $\psi \equiv_T^n \varphi$ dokładnie wtedy, gdy

- $T \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n \, (\psi(x_1, \ldots, x_n) \equiv \varphi(x_1, \ldots, x_n))$.

Ten warunek jest z kolei równoważny temu, że:

- dla każdego modelu $\mathfrak{A}$ dla T oraz każdego ciągu $(a_1, \ldots, a_n)$ elementów $dom(\mathfrak{A})$: $\mathfrak{A} \models (\psi \equiv \varphi)[a_1, \ldots, a_n]$.

Algebry Lindenbauma

Dla każdej formuły $\psi \in Fml_n^T$, niech $[\psi]_T^n$ będzie jej $\equiv_T^n$-klasą równoważności. Rodzina klas równoważności relacji $\equiv_T^n$ jest algebrą Boole'a, nazywaną również ***algebrą Lindenbauma***. Oznaczmy ją przez $\mathcal{L}_T^n$. Ponieważ $\equiv_T^n$ jest kongruencją w algebrze formuł Fml_n^T, więc operacje Boolowskie w $\mathcal{L}_T^n$ określamy w znany sposób.

- Z każdym filtrem F w $\mathcal{L}_T^n$ można stowarzyszyć zbiór: $\Phi_F = \{\psi \in Fml_n^T : [\psi]_T^n \in F\}$.
- Zachodzą następujące fakty, dla każdej n, każdego filtru F w $\mathcal{L}_T^n$ oraz dowolnych $\varphi, \psi \in Fml_n^T$:
  - $\bot \notin \Phi_F$ (tu $\bot$ jest stałą ***falsum***).
  - Jeśli $\varphi \in \Phi_F$ oraz $T \models \varphi \rightarrow \psi$, to $\psi \in \Phi_F$.
  - Jeśli $\varphi, \psi \in \Phi_F$, to $\varphi \wedge \psi \in \Phi_F$.
  - Jeśli F jest ultrafiltrem, to $\neg\psi \in \Phi_F$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\psi \notin \Phi_F$.

Algebry Lindenbauma

Ponadto, dla każdej n, każdego filtru F w $\mathcal{L}^n_T$ oraz dowolnej $\psi \in Fml^T_n$:

- $T \subseteq \Phi_F$.
- Jeśli $\Phi_F \models \psi$, to $\psi \in \Phi_F$.
- Dla dowolnego $\Psi \subseteq Fml^T_n$, jeśli:
  1. $T \subseteq \Psi$ oraz
  2. dla każdej $\varphi \in Fml_n$, jeśli $\Psi \models \varphi$, to $\varphi \in \Psi$,

  to istnieje filtr F w $\mathcal{L}^n_T$ taki, że $\Psi = \Phi_F$.

- Na mocy powyższego stwierdzamy, że odwzorowanie $F \mapsto \Phi_F$ jest bijekcją pomiędzy zbiorem wszystkich filtrów w $\mathcal{L}^n_T$, a teoriami niesprzecznymi rozszerzającymi T. Ponadto, Φ_F jest teorią zupełną wtedy i tylko wtedy, gdy F jest ultrafiltrem.

Algebry Lindenbauma

Przypomnijmy jeszcze niektóre fakty dotyczące algebr Boole'a:

- W dowolnej algebrze Boole'a, jej element jest atomem wtedy i tylko wtedy, gdy filtr główny generowany przez ten element jest ultrafiltrem. W konsekwencji, ultrafiltr w algebrze Boole'a jest główny dokładnie wtedy, gdy zawiera jakiś atom.
- Dla dowolnej algebry Boole'a $\mathbf{A}$, niech $S(\mathbf{A})$ oznacza rodzinę wszystkich jej ultrafiltrów.
- Dowolna algebra Boole'a $\mathbf{A}$ jest izomorficzna z ciałem podzbiorów zbioru $S(\mathbf{A})$.

Algebry Lindenbauma

- Dla dowolnej algebry Boole'a $\mathbf{A}$ można w zbiorze $S(\mathbf{A})$ wprowadzić topologię, której bazę tworzą zbiory o postaci $a^* = \{U \in S(\mathbf{A}) : a \in U\}$. Przy tej topologii $S(\mathbf{A})$ jest całkowicie rozłączną zwartą przestrzenią Hausdorffa, a zbiory o postaci a^*, dla $a \in \mathbf{A}$, są dokładnie zbiorami domknięto-otwartymi. Nadto, każda algebra Boole'a $\mathbf{A}$ jest izomorficzna z algebrą wszystkich domknięto-otwartych podzbiorów $S(\mathbf{A})$.
- Dla dowolnej algebry Boole'a $\mathbf{A}$, następujące warunki są równoważne:
    1. $\mathbf{A}$ jest skończona.
    2. $S(\mathbf{A})$ jest skończony.
    3. Każdy element $S(\mathbf{A})$ jest ultrafiltrem głównym.

Rodzaje typów

Dla dowolnej struktury $\mathfrak{A}$ sygnatury σ, teorii T w języku $L(\sigma)$ oraz ciągu n-elementowego $\overrightarrow{a}$ elementów uniwersum struktury $\mathfrak{A}$ niech:

$$Tp_{\mathfrak{A}}(\overrightarrow{a}) = \{\psi \in Fml_n^T : \mathfrak{A} \models \psi[\overrightarrow{a}]\}.$$

- Zbiór $Tp_{\mathfrak{A}}(\overrightarrow{a})$ nazywamy ***n*-typem elementu** $\overrightarrow{a}$ (w strukturze $\mathfrak{A}$). Czasami mówimy krótko: typ elementu $\overrightarrow{a}$, gdy liczba n jest jasna z kontekstu lub nieistotna.
- Wprost z definicji widzimy, że typ elementu $\overrightarrow{a}$ w strukturze $\mathfrak{A}$ to ogół formuł spełnionych w $\mathfrak{A}$ przy wartościowaniu zmiennych wolnych tych formuł elementami ciągu $\overrightarrow{a}$. Oczywiście, różne ciągi $\overrightarrow{a}$ mogą mieć w strukturze $\mathfrak{A}$ ten sam typ.

Rodzaje typów

Dla dowolnej $n > 0$, dowolnego $\Psi \subseteq Fml_n^T$ oraz dowolnej teorii T, mówimy, że:

- Ψ jest ***n-typem*** teorii T, gdy istnieje model $\mathfrak{A}$ teorii T oraz n-elementowy ciąg $\overrightarrow{a}$ elementów jego uniwersum takie, że $\Psi \subseteq Tp_{\mathfrak{A}}(\overrightarrow{a})$;
- Ψ jest ***domkniętym n-typem*** teorii T, gdy Ψ jest n-typem dla T oraz $T \subseteq \Psi$ i dla każdej $\psi \in Fml_n^T$, jeśli $\Psi \models \psi$, to $\psi \in \Psi$;
- Ψ jest ***zupełnym n-typem*** teorii T, gdy Ψ jest domkniętym n-typem teorii T oraz dla każdej $\psi \in Fml_n^T$, $\neg\psi \in \Psi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\psi \notin \Psi$.
- Typy teorii T, które nie są zupełne nazywamy jej typami ***częściowymi***.

Rodzaje typów

Bezpośrednio z tej definicji wynikają następujące ustalenia. Niech $\Psi \subseteq Fml_n^T$ i niech $\overrightarrow{c}$ będzie ciągiem nowych stałych, a $L(\overrightarrow{c})$ rozszerzeniem języka L o te stałe. Wreszcie, niech $\Psi(\overrightarrow{c}) = \{\psi(\overrightarrow{c}) : \psi \in \Psi\}$. Wtedy dla dowolnej $n > 0$, dowolnego $\Psi \subseteq Fml_n^T$ oraz dowolnej teorii T w języku L:

- Ψ jest n-typem teorii T dokładnie wtedy, gdy $T \cup \Psi(\overrightarrow{c})$ jest niesprzecznym zbiorem zdań w języku $L(\overrightarrow{c})$.
- Ψ jest domkniętym n-typem teorii T dokładnie wtedy, gdy $\Psi(\overrightarrow{c})$ jest niesprzeczną teorią (w języku $L(\overrightarrow{c})$), rozszerzającą T.
- Ψ jest zupełnym n-typem teorii T dokładnie wtedy, gdy $\Psi(\overrightarrow{c})$ jest zupełną teorią (w języku $L(\overrightarrow{c})$), rozszerzającą T.
- Ψ jest zupełnym n-typem teorii T dokładnie wtedy, gdy $\Psi = Tp_{\mathfrak{A}}(\overrightarrow{a})$ dla pewnego modelu $\mathfrak{A}$ dla T oraz pewnego ciągu $\overrightarrow{a}$ elementów $dom(\mathfrak{A})$.

Rodzaje typów

Dla dowolnej teorii T i formuły $\psi(\overrightarrow{x})$ języka tej teorii, mówimy, że $\psi(\overrightarrow{x})$ jest ***T-niesprzeczna***, gdy nie zachodzi $T \models \neg\psi(\overrightarrow{x})$ (lub, równoważnie, gdy nie zachodzi $T \models \forall \overrightarrow{x}\ \neg\psi(\overrightarrow{x})$).

- $\psi(\overrightarrow{x})$ jest T-niesprzeczna wtedy i tylko wtedy, gdy $[\psi(\overrightarrow{x})]^n_T \neq \mathbf{0}_{\mathcal{L}^n_T}$.
- $\psi(\overrightarrow{x})$ jest T-niesprzeczna wtedy i tylko wtedy, gdy $T \cup \{\exists \overrightarrow{x}\ \psi(\overrightarrow{x})\}$ jest niesprzeczna.
- Jeśli T jest zupełna, to $\psi(\overrightarrow{x})$ jest T-niesprzeczna wtedy i tylko wtedy, gdy $T \models \exists \overrightarrow{x}\ \psi(\overrightarrow{x})$.

Rodzaje typów

Dla dowolnej $n > 0$, dowolnego $\Psi \subseteq Fml_n$ oraz dowolnej teorii T, następujące warunki są równoważne (co wynika dość prosto z definicji):

- Ψ jest n-typem dla T.
- Koniunkcja każdego skończonego podzbioru zbioru Ψ jest T-niesprzeczna.
- Rodzina $\{[\psi]^n_T : \psi \in \Psi\}$ ma własność przekrojów skończonych w $\mathcal{L}^n_T$.

Jest widoczne, że atomem w $\mathcal{L}^n_T$ jest każdy taki element $[\psi]^n_T$, że ψ jest T-niesprzeczna, ale nie istnieje formuła $\varphi \in Fml^T_n$ dla której:

- zachodzi $T \models \varphi \to \psi$ oraz
- nie zachodzi $T \models \psi \to \varphi$.

Rodzaje typów

Dla dowolnej $n > 0$, dowolnej teorii T oraz dowolnej $\psi(\overrightarrow{x}) \in Fml_n^T$, następujące warunki są równoważne:

- $[\psi(\overrightarrow{x})]_T^n$ jest atomem w $\mathcal{L}_T^n$.
- Dla wszystkich $\varphi(\overrightarrow{x}) \in Fml_n^T$: $T \models \psi(\overrightarrow{x}) \rightarrow \varphi(\overrightarrow{x})$ lub $T \models \psi(\overrightarrow{x}) \rightarrow \neg\varphi(\overrightarrow{x})$.
- $\{\varphi(\overrightarrow{x}) : T \models \psi(\overrightarrow{x}) \rightarrow \varphi(\overrightarrow{x})\}$ jest zupełnym n-typem dla T.

- Każdą formułę $\psi(\overrightarrow{x})$ spełniającą któryś (dowolny) z powyższych warunków nazywamy ***formułą zupełną*** (względem T).
- Dla dowolnej teorii T, dowolnej $n > 0$ i dowolnego n-typu Ψ dla T, mówimy, że: Ψ jest ***główny***, gdy istnieje T-niesprzeczna formuła $\psi(\overrightarrow{x})$ taka, że dla wszystkich $\varphi \in \Psi$ zachodzi $T \models \psi \rightarrow \varphi$. W takim przypadku ψ nazywamy ***generatorem*** Ψ.

Rodzaje typów

Typy główne nazywamy także ***izolowanymi***. Zauważmy, że w ogólności generator typu głównego nie musi być jego elementem, ale gdy T jest zupełna, to generator typu głównego zawsze do niego należy. Jeśli bowiem Ψ jest typem zupełnym w T, a $\psi(\overrightarrow{x})$ jego generatorem, to (na mocy T-niesprzeczności $\psi(\overrightarrow{x})$): $T \vdash \exists \overrightarrow{x}\ \psi(\overrightarrow{x})$. To z kolei implikuje, że ***nie*** zachodzi: $T \vdash \forall \overrightarrow{x}\ (\psi(\overrightarrow{x}) \rightarrow \neg\psi(\overrightarrow{x}))$. Tak więc, $\neg\psi(\overrightarrow{x})$ nie należy do Ψ. Ponieważ Ψ jest typem zupełnym, do Ψ musi należeć $\psi(\overrightarrow{x})$.

Zupełne n-typy główne odpowiadają dokładnie głównym ultrafiltrom w algebrze $\mathcal{L}^n_T$. Ponadto, zachodzą następujące fakty:

- Ψ nie jest główny wtedy i tylko wtedy, gdy kres dolny zbioru $\{[\psi]^n_T : \psi \in \Psi\}$ jest zerem algebry $\mathcal{L}^n_T$.
- Jeśli T jest zupełna, to Ψ jest główny wtedy i tylko wtedy, gdy zawiera formułę zupełną.

Rodzaje typów

Dla dowolnej teorii T, niech $S^n(T)$ oznacza ***zbiór wszystkich jej n-typów zupełnych***. Wtedy $S^n(T)$ jest zbiorem wszystkich n-typów o postaci $Tp_{\mathfrak{A}}(\overrightarrow{a})$, gdzie $\mathfrak{A}$ jest modelem T, a $\overrightarrow{a}$ ciągiem n elementów z $dom(\mathfrak{A})$. Istnieje bijekcja między $S^n(T)$ a rodziną wszystkich ultrafiltrów w algebrze $\mathcal{L}^n_T$. Dla dowolnej teorii T oraz dowolnej n następujące warunki sa równoważne:

- Algebra $\mathcal{L}^n_T$ jest skończona.
- T ma tylko skończenie wiele zupełnych n-typów.
- Każdy n-typ dla T jest główny.

- Dla dowolnej teorii T, dowolnej n oraz dowolnej $\psi \in Fml^T_n$, jeśli ψ jest T-niesprzeczna, to: $[\psi]^n_T$ nie jest atomem w $\mathcal{L}^n_T$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $\varphi \in Fml_n$ taka, że zarówno $\psi \wedge \varphi$ jak i $\psi \wedge \neg\varphi$ są T-niesprzeczne.

Realizowanie typów

Dla dowolnego modelu $\mathfrak{A}$ teorii T oraz n-typu Ψ:

- Mówimy, że Ψ jest ***realizowany w*** $\mathfrak{A}$, gdy istnieje ciąg $\overrightarrow{a}$ elementów $dom(\mathfrak{A})$ taki, że $\Psi \subseteq Tp_{\mathfrak{A}}(\overrightarrow{a})$. Mówimy w takim przypadku, że $\overrightarrow{a}$ ***realizuje*** Ψ w $\mathfrak{A}$.
- Mówimy, że ***realizowalny***, gdy jest realizowany w jakimś modelu $\mathfrak{A}$. Ten termin może niezbyt zręcznie brzmi po polsku. Powiemy, że typ jest ***niesprzeczny***, gdy istnieje model, który go realizuje.
- Jeśli Ψ nie jest realizowany w $\mathfrak{A}$, to mówimy, że $\mathfrak{A}$ ***omija*** Ψ.

Realizowanie typów

Wprost z definicji wynika, że każdy typ dla T jest realizowany w ***jakimś*** modelu teorii T. Z (dolnego) twierdzenia Löwenheima-Skolema wynika ponadto, że Ψ jest n-typem dla T wtedy i tylko wtedy, gdy jest realizowany w pewnym ***przeliczalnym*** modelu teorii T.

Mamy bowiem równoważność następujących warunków, dla dowolnego zbioru formuł Ψ, których zmienne wolne są wśród $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

- Ψ jest realizowany w jakimś modelu.
- $\Psi(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ jest spełnialny (czyli istnieje model $\mathfrak{A}$ taki, że $\mathfrak{A} \models \Psi(c_1, c_2, \ldots, c_n)$). Tu $c_1, c_2, \ldots, c_n$ są nowymi stałymi nie występującymi w Ψ, a $\Psi(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ otrzymujemy z Ψ poprzez zastąpienie wystąpień wszystkich zmiennych wolnych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ w formułach z Ψ przez, odpowiednio, $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Realizowanie typów

Przede wszystkim, zwróćmy uwagę na różnicę między:

- $\mathfrak{A} \models \Psi$
- $\mathfrak{A}$ realizuje Ψ.

- W pierwszym przypadku, gdy $\Psi \subseteq Fml_n^T$, to $\mathfrak{A} \models \Psi$ oznacza, że dla każdej formuły $\psi(\overrightarrow{x}) \in \Psi$ mamy $\mathfrak{A} \models \psi(\overrightarrow{x})$. To ostatnie ma miejsce dokładnie wtedy, gdy $\mathfrak{A} \models \forall \overrightarrow{x}\ \psi(\overrightarrow{x})$. Na mocy definicji relacji $\models$ zachodzi to, gdy dla ***wszystkich*** ciągów $\overrightarrow{a}$ elementów $dom(\mathfrak{A})$ mamy: $\mathfrak{A} \models \psi(\overrightarrow{x})[\overrightarrow{a}]$.
- Z drugiej strony, to, że $\mathfrak{A}$ realizuje Ψ oznacza, dla ***co najmniej jednego*** ciągu $\overrightarrow{a}$ elementów $dom(\mathfrak{A})$ mamy: $\mathfrak{A} \models \psi(\overrightarrow{x})[\overrightarrow{a}]$.

Realizowanie typów

Nadto, na mocy twierdzenia o zwartości otrzymujemy natychmiast:

- Niech Ψ będzie zbiorem formuł, których zmienne wolne znajdują się wśród $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Ψ jest realizowany w jakimś modelu dokładnie wtedy, gdy każdy skończony podzbiór Ψ jest realizowany w jakimś modelu.
- $(*)$ W konsekwencji, jeśli T jest teorią zupełną oraz Ψ jest zbiorem formuł, których zmienne wolne znajdują się wśród $x_1, x_2, \ldots, x_n$, to: Ψ jest n-typem dla T dokładnie wtedy, gdy każdy skończony podzbiór Ψ jest n-typem dla T.

Przykłady 1–2

- 1. Struktura $(\mathbb{Q}, <)$, gdzie $\mathbb{Q}$ jest zbiorem liczb wymiernych, a $<$ zwykłym porządkiem tych liczb jest modelem teorii gęstych liniowych porządków bez końców. Przypominamy, że teoria ta ma własność eliminacji kwantyfikatorów. Rozważmy jakiekolwiek np. cztery liczby wymierne a_1, a_2, a_3, a_4 takie, że $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$. Wtedy do 4-typu ciągu (a_1, a_2, a_3, a_4) należą formuły: $x_1 \underline{<} x_2$, $x_2 \underline{<} x_3$ oraz $x_3 \underline{<} x_4$ (tu interpretacją predykatu $\underline{<}$ jest relacja $<$). Tak więc, 4-typ liczb (a_1, a_2, a_3, a_4) jest taki sam, jak 4-typ dowolnego innego ciągu ściśle rosnącego jakichkolwiek czterech liczb wymiernych.
- 2. W teorii gęstych liniowych porządków bez końców mamy trzy zupełne 2-typy tej teorii, zawierające odpowiednio formuły: $x_1 \underline{<} x_2$, $x_1 \doteq x_2$ oraz $x_2 \underline{<} x_1$. W ogólności, dla każdej n istnieje skończenie wiele n-typów tej teorii. W szczególności natomiast, istnieje tylko jeden 1-typ zupełny tej teorii.

Przykłady 3–4

- 3. Niech T będzie aksjomatyczną teorią arytmetyki (arytmetyką Peana). Rozważmy zbiór:

$$\Psi_x = \{x \neq 0, x \neq s(0), x \neq s(s(0)), \ldots\}.$$

Model standardowy $\mathfrak{N}_0$ omija ten typ. Wszystkie modele niestandardowe realizują ten typ.

- 4. Rozważmy teorię $Th((\omega, s, 0))$, czyli teorię liczb naturalnych z zerem i funkcją następnika. Dla każdej liczby naturalnej n mamy term $\overline{n}$, czyli liczebnik nazywający liczbę n (term ten otrzymujemy poprzez n-krotne zastosowanie operacji następnika do stałej 0). W teorii tej istnieje co najmniej przeliczalnie wiele zupełnych 1-typów Ψ_n zawierających, odpowiednio, formułę $x \doteq \overline{n}$, dla każdej $n \in \omega$.

Przykład 5

- 5. Rozważmy teorię $Th(\mathfrak{N}_0)$, czyli zupełną teorię standardowego modelu arytmetyki. Niech P oznacza zbiór wszystkich liczb pierwszych. Dla dowolnego zbioru $X \subseteq P$ niech:

$$\Psi_X = \{\exists y\ (p \cdot y \doteq x) : p \in X\} \cup \{\neg\exists y\ (p \cdot y \doteq x) : p \in P - X\}.$$

Wtedy każdy zbiór Ψ_X jest 1-typem rozważanej teorii. Jeśli $X \neq Y$, to zbiory Ψ_X oraz Ψ_Y są nieporównywalne (względem inkluzji), a więc zawierają się w różnych typach zupełnych. Tak więc, liczba typów zupełnych teorii $Th(\mathfrak{N}_0)$ jest równa $2^{\aleph_0}$. Realizowane w modelu standardowym są jedynie zbiory Ψ_X dla skończonych zbiorów X. Pozostałe zbiory o postaci Ψ_X są realizowane w modelach niestandardowych teorii $Th(\mathfrak{N}_0)$.

Przykłady 6–7

- 6. Niech T będzie teorią ciał uporządkowanych, a Ψ_x zbiorem:

$$\{1 \leqslant x, 1+1 \leqslant x, 1+1+1 \leqslant x, \ldots\}.$$

Ciało uporządkowane omija ten typ dokładnie wtedy, gdy jest archimedesowe. Tak więc, ciała uporządkowane liczb rzeczywistych oraz liczb wymiernych omijają ten typ.

- 7. Niech T będzie teorią grup przemiennych, a Ψ_x zbiorem:

$$\{x \neq 0, 2x \neq 0, 3x \neq 0, \ldots\}.$$

Wtedy grupa przemienna, która omija ten typ jest grupą torsyjną.

Przykład 8

- 8. Niech $\mathfrak{A}$ będzie modelem jednej relacji równoważności E, w którym relacja ta ma klasę równoważności o n elementach dla każdej $n > 0$ oraz żadnych innych klas. Wtedy każda z tych klas równoważności wyznacza jednoznacznie 1-typ teorii $Th(\mathfrak{A})$. Niech bowiem $\psi_n(x)$ będzie formułą stwierdzającą, że istnieje dokładnie n elementów w uniwersum $\mathfrak{A}$, które są E-równoważne z x. Niech Ψ^n będzie 1-typem dowolnego elementu z klasy równoważności relacji E zawierającej dokładnie n elementów (czyli $\Psi^n = Tp_{\mathfrak{A}}(a)$, gdzie a należy do klasy równoważności relacji E zawierającej dokładnie n elementów; dla dowolnych a, b z tej klasy mamy: $Tp_{\mathfrak{A}}(a) = Tp_{\mathfrak{A}}(b)$). Wtedy $\psi_n(x) \in \Psi^n$ dla każdej n oraz Ψ^n jest jedynym 1-typem zawierającym formułę $\psi_n(x)$. Dla dowolnego $a \in dom(\mathfrak{A})$ należącego do E-klasy o n elementach, typ $Tp_{\mathfrak{A}}(a)$ (tożsamy z Ψ^n) jest realizowany w $\mathfrak{A}$. Nadto, $\mathfrak{A}$ nie realizuje żadnych innych 1-typów.

Przykład 8

- Istnieją jednak inne jeszcze 1-typy zupełne w tej teorii. Rozważmy mianowicie zbiór $\Phi_x = \{\neg\psi_n(x) : n \in \omega\}$.
  Dla dowolnego skończonego podzbioru Δ zbioru Φ_x istnieje (odpowiednio duża) liczba m taka, że $\Delta \subseteq \Psi^m$.
  W konsekwencji, na mocy $(*)$ powyżej, Φ_x jest 1-typem teorii $Th(\mathfrak{A})$.
  Nie jest on realizowany w $\mathfrak{A}$, ale jest realizowany w strukturze $\mathfrak{B}$ takiej, że:
  - $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$
  - W $\mathfrak{B}$ mamy dokładnie jedną klasę E-równoważności o przeliczalnej liczbie elementów (i żadnych innych nieskończonych klas E-równoważności).

Przykład 8

- Rozważmy teraz 2-typy teorii $Th(\mathfrak{A})$. Każdy 2-typ zawiera formuły o co najwyżej dwóch zmiennych wolnych, powiedzmy x_1 oraz x_2. Dla każdych $m, n \in \omega$ niech $\varphi_{m,n}(x_1, x_2)$ będzie formułą stwierdzającą, że istnieje dokładnie m elementów E-równoważnych z x_1 oraz dokładnie n elementów E-równoważnych z x_2. Wtedy formuła $\varphi_{m,n}(x_1, x_2)$ jednoznacznie wyznacza zupełny 2-typ $\Psi_{m,n}$, który zawiera 1-typy Ψ_m oraz Ψ_n. Każda formuła w $\Psi_{m,n}$ jest logiczną konsekwencją $Th(\mathfrak{A}) \cup \Psi_m \cup \Psi_n$. W szczególności, formuła atomowa $E(x_1, x_2)$ należy do $\Psi_{m,n}$ dokładnie wtedy, gdy $m = n$.
  Rozważmy teraz 2-typ $\Phi_{x_1,x_2} = \Phi_{x_1} \cup \Phi_{x_2}$. Nie jest on zupełny (choć jest sumą dwóch typów zupełnych). Możemy go rozszerzyć do typu zupełnego dodając formułę $\neg E(x_1, x_2)$. Wtedy $\Phi_{x_1,x_2} \cup \{\neg E(x_1, x_2)\}$ nie jest realizowany ani w $\mathfrak{A}$, ani w $\mathfrak{B}$, ale jest realizowany w rozszerzeniu $\mathfrak{C}$ struktury $\mathfrak{A}$, które zawiera dokładnie dwie przeliczalne klasy relacji E-równoważności.

Jeszcze o realizowaniu typów

- *Jeśli T jest teorią zupełną, a Ψ jej n-typem, to dla dowolnego modelu $\mathfrak{A}$ dla T istnieje* ***elementarne*** *rozszerzenie modelu $\mathfrak{A}$, w którym Ψ jest realizowany.*

- Zauważmy bowiem, że jeśli $c_1, \ldots, c_n$ są stałymi nie występującymi w elementarnym diagramie $D(\mathfrak{A})$, to (na mocy twierdzenia Robinsona) zbiór $D(\mathfrak{A}) \cup \Psi(c_1, \ldots, c_n)$ jest niesprzeczny, a zatem (na mocy twierdzenia o istnieniu modelu) ma model, powiedzmy $\mathfrak{B}$.
- Wtedy oczywiście Ψ jest realizowany w $\mathfrak{B}$ oraz $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$.

Jeszcze o realizowaniu typów

- *Jeśli T jest zupełna, a Ψ jest jej typem izolowanym, to Ψ jest realizowany w każdym modelu T.*

- Skoro bowiem Ψ jest typem głównym T, a T jest zupełna, to generator $\psi(\overrightarrow{x})$ typu Ψ jest T-niesprzeczną formułą i w dodatku należy do Ψ. Wtedy $T \models \exists \overrightarrow{x}\ \psi(\overrightarrow{x})$. Tak więc, dla dowolnego modelu $\mathfrak{A}$ dla T istnieje ciąg $\overrightarrow{a}$ elementów $dom(\mathfrak{A})$ taki, że $\mathfrak{A} \models \psi[\overrightarrow{a}]$. Ponieważ dla wszystkich $\varphi \in \Psi$ mamy $T \models \psi \rightarrow \varphi$, więc mamy również $\mathfrak{A} \models \varphi[\overrightarrow{a}]$ dla wszystkich $\varphi \in \Psi$, a to oznacza, że Ψ jest realizowany w $\mathfrak{A}$.
- Jeśli rozważana sygnatura jest przeliczalna, to zachodzi również implikacja odwrotna: jeśli typ jest realizowany w każdym modelu teorii T (w języku przeliczalnym), to typ ten jest główny.

Twierdzenie o omijaniu typów

- **Twierdzenie o omijaniu typów.**
  Niech Ψ będzie typem dla T, który nie jest główny. Istnieje wtedy przeliczalny model teorii T, który omija Ψ.

- **Szkic Dowodu.** Zbudujemy potrzebny model korzystając z metody Henkina konstruowania modelu ze stałych, używanej w dowodzie twierdzenia o istnieniu modelu (zobacz poprzedni wykład).
- Zakładamy, że teoria T jest sformułowana w języku L. Niech $C = \{c_i : i \in \omega\}$ będzie zbiorem nowych stałych indywidualnych i niech L' będzie językiem L powiększonym o zbiór C.

Dowód twierdzenia o omijaniu typów

Zbudujemy teorię T' w języku L', która będzie miała następujące własności:

- (1) $T \subseteq T'$.
- (2) T' jest zupełna w L'.
- (3) Jeśli $\psi(x_0)$ jest formułą z L', to istnieje liczba i taka, że formuła $\exists x_0\, \psi(x_0) \rightarrow \psi(c_i)$ należy do T'.
- (4) Jeśli $(d_0, d_1, \ldots, d_{n-1})$ jest ciągiem długości n elementów zbioru C, to istnieje formuła $\psi(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ należąca do Ψ taka, że: $\neg\psi(d_0, d_1, \ldots, d_{n-1})$ należy do T'.

Istnienie teorii T' spełniającej warunki (1)–(3) wynika ze stosownej konstrukcji podanej w dowodzie twierdzenia o istnieniu modelu; poniżej podamy konstrukcję T' jako sumy teorii T_k, tworzonych przez indukcję, wychodząc od teorii T. Później zbudujemy model ilorazowy ze zbioru stałych C i pokażemy, że jego redukt do L omija typ Ψ.

Dowód twierdzenia o omijaniu typów

Przed konstrukcją teorii T' ustalmy:

- wyliczenie $(\kappa_i)_{i\in\omega}$ wszystkich domkniętych formuł z L';
- wyliczenie $(\gamma_i(x_0))_{i\in\omega}$ wszystkich formuł z L' z jedną zmienną wolną;
- wyliczenie $(g_i)_{i\in\omega}$ wszystkich ciągów długości n stałych z C.

Budujemy teraz, przez indukcję po k, ciąg $(T_k)_{k\in\omega}$ teorii, które będą miały następujące własności:

- dla wszystkich k, teoria T_k jest sumą T oraz skończonego zbioru formuł domkniętych z L';
- dla wszystkich k, teoria T_k jest niesprzeczna;
- dla wszystkich k oraz m, jeśli $k \leqslant m$, to $T_k \subseteq T_m$.

Dowód twierdzenia o omijaniu typów

Zaczynamy od $T_0 = T$. Niech teraz $k \geqslant 0$ i załóżmy, że zbudowaliśmy już T_m dla $m \leqslant k$. Definicja T_{k+1} podana jest w trzech przypadkach, w zależności od tego, czy k przystaje modulo 3 do 0, 1 lub 2.

- *Przypadek $k = 3i$ dla pewnego i.* Jeśli $T_k \cup \{\kappa_i\}$ jest teorią niesprzeczną, to niech $T_{k+1} = T_k \cup \{\kappa_i\}$. W przeciwnym przypadku (ponieważ wtedy $T_k \cup \{\neg\kappa_i\}$ jest teorią niesprzeczną, na mocy założenia indukcyjnego, iż T_k jest teorią niesprzeczną), niech $T_{k+1} = T_k \cup \{\neg\kappa_i\}$.
- *Przypadek $k = 3i + 1$ dla pewnego i.* Wybieramy liczbę j taką, że c_j nie występuje ani w T_k, ani w γ_i, co jest możliwe, ponieważ T_k jest sumą teorii T, w której w ogóle nie występują stałe z C oraz skończonej liczby formuł. Niech: $T_{k+1} = T_k \cup \{\exists x_0\, \gamma(x_0) \rightarrow \gamma(c_j)\}$. Wtedy teoria T_{k+1} jest niesprzeczna (na mocy argumentacji w dowodzie twierdzenia o istnieniu modelu).

Dowód twierdzenia o omijaniu typów

Przypadek $k = 3i + 2$ dla pewnego i. Przypuśćmy, że $d_0, d_1, \ldots, d_{n-1}$ są takimi stałymi z C, że $g_i = (d_0, d_1, \ldots, d_{n-1})$. Na mocy założenia indukcyjnego, istnieje formuła domknięta φ z L' taka, że T_k jest równoważna z $T \cup \{\varphi\}$. Ponadto, φ jest postaci:

$$\delta(d_0, d_1, \ldots, d_{n-1}, e_0, e_1, \ldots, e_{m-1}),$$

gdzie $\delta(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{m-1})$ jest formułą z L oraz d_i jest różna od e_j dla $0 \leqslant i \leqslant n-1$, $0 \leqslant j \leqslant m-1$ oraz $e_j \in C$.

Niech teraz $\eta(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ będzie następującą formułą:

$$\exists x_n \exists x_{n+1} \ldots \exists x_{n+m}\, \delta(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m-1}).$$

Dowód twierdzenia o omijaniu typów

Wtedy formuła $\exists x_0 \exists x_1 \ldots \exists x_{n-1}\, \eta(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ jest konsekwencją teorii T. Ponieważ jest to formuła domknięta, a teoria T jest zupełna, więc dostajemy:

$$T \vdash \exists x_0 \exists x_1 \ldots \exists x_{n-1}\, \eta(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

Ponieważ Ψ nie jest typem izolowanym, więc zawiera on formułę

$$\psi(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$$

taką, że teoria:

$$T \cup \{\neg \forall x_0 \forall x_1 \ldots \forall x_{n-1}\, (\eta(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \rightarrow \psi(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}))\}$$

jest niesprzeczna. Stąd otrzymujemy kolejno, że:

Dowód twierdzenia o omijaniu typów

- teoria $T \cup \{\exists x_0 \ldots \exists x_{n-1} (\exists x_n \ldots \exists x_{n+m-1}\, \delta(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n, \ldots, x_{n+m-1}) \wedge \neg\psi(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}))\}$ jest niesprzeczna;
- teoria $T \cup \{\exists x_0 \exists x_1 \ldots \exists x_{n+m-1} (\delta(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n, \ldots, x_{n+m-1}) \wedge \wedge \neg\psi(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}))\}$ jest niesprzeczna;
- teoria $T \cup \{\delta(d_0, d_1, \ldots, d_{n-1}, e_0, e_1, \ldots, e_{m-1}) \wedge \neg\psi(d_0, d_1, \ldots, d_{n-1})\}$ jest niesprzeczna (ponieważ stałe z C nie występują w teorii z poprzedniego wiersza wyliczenia).

- Przyjmujemy zatem w tym przypadku:

$$T_{k+1} = T \cup \{\neg\psi(d_0, d_1, \ldots, d_{n-1})\}.$$

Dowód twierdzenia o omijaniu typów

Niech T' będzie sumą wszystkich teorii T_k. Oczywiście $T \subseteq T'$. Na mocy twierdzenia o zwartości, T' jest niesprzeczna. Wprost z konstrukcji T' widać też, że spełniony jest warunek (4) podany na początku dowodu.

Budujemy teraz wymagany w tezie twierdzenia model. Zdefiniujmy relację R na zbiorze stałych C:

- $R(c_i, c_j)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $T' \vdash c_i \doteq c_j$.

Wtedy R jest relacją równoważności. Dla dowolnej $d \in C$, przez $[d]_R$ oznaczamy klasę R-równoważności elementu d. Niech A będzie rodziną wszystkich klas równoważności relacji R. Możemy wtedy (jak w dowodzie twierdzenia o istnieniu modelu) zbudować model $\mathfrak{A}'$ taki, że:

Dowód twierdzenia o omijaniu typów

- $dom(\mathfrak{A}') = A$
- Dla każdej n, wszystkich $d_0, d_1, \ldots, d_{n-1}$ należących do C i każdej formuły $\psi(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ z L' następujące warunki są równoważne:
  1. $\mathfrak{A}' \models \psi[[d_0]_R, [d_1]_R, \ldots, [d_{n-1}]_R]$
  2. $\psi(d_0, d_1, \ldots, d_{n-1}) \in T'$.

Niech $\mathfrak{A}$ będzie reduktem $\mathfrak{A}'$ do L. Wykorzystując warunek (4) (spełniony przez teorię T') pokażemy, że $\mathfrak{A}$ omija typ Ψ. Niech $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ będzie ciągiem elementów z $dom(\mathfrak{A})$ i niech $a_i = [d_i]_R$. Na mocy (4), istnieje formuła $\psi(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ należąca do Ψ taka, że $\neg\psi(d_0, d_1, \ldots, d_{n-1})$ należy do T'. Wtedy $\mathfrak{A} \models \neg\psi[a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}]$. Inaczej mówiąc, żaden ciąg elementów z $dom(\mathfrak{A})$ nie realizuje Ψ, czyli $\mathfrak{A}$ omija Ψ, co kończy dowód.

Dowód twierdzenia o omijaniu typów

Twierdzenie to zachodzi również w mocniejszej wersji:

- *Niech $\{\Psi_j : j \in \omega\}$ będzie rodziną typów, które nie są główne. Zakładamy tu, że każdy Ψ_j jest n_j-typem. Wtedy istnieje przeliczalny model teorii T, który omija wszystkie typy Ψ_j, dla $j \in \omega$.*

- Można podać też algebraiczny dowód twierdzenia o omijaniu typów, wykorzystujący twierdzenie Rasiowej-Sikorskiego o zachowywaniu kresów (zob. Hinman 2005, 687).
- Widzimy zatem, że:
  - typy główne są realizowane w każdym modelu;
  - dla dowolnego typu, który nie jest główny istnieje model, który go omija.

Twierdzenie Rylla-Nardzewskiego

Przypomnijmy, że teoria T jest $\aleph_0$-kategoryczna, gdy ma model przeliczalny oraz wszystkie jej modele przeliczalne są izomorficzne. Teorie $\aleph_0$-kategoryczne mają szereg interesujących własności. Nadto, można je scharakteryzować w terminach czysto algebraicznych, poprzez warunki nakładane na zbiory ich n-typów.

Twierdzenie Rylla-Nardzewskiego.

- *Dla dowolnej teorii zupełnej T następujące warunki są równoważne:*
  1. *T jest $\aleph_0$-kategoryczna.*
  2. *Dla każdej $n > 0$, każdy niesprzeczny n-typ jest izolowany.*
  3. *Dla każdej $n > 0$, każdy zupełny n-typ jest izolowany.*
  4. *Dla każdej $n > 0$, zbiór $S^n(T)$ jest skończony.*
  5. *Dla każdej $n > 0$, zbiór $\mathcal{L}^n_T$ jest skończony.*

Dowód twierdzenia Rylla-Nardzewskiego

Lemat 1. *Dla dowolnej teorii zupełnej T oraz jej n-typu Ψ następujące warunki są równoważne:*

1. *Istnieje przeliczalny model T, który realizuje Ψ.*
2. *Istnieje model T, który realizuje Ψ.*
3. *Dla każdej formuły $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ należącej do Ψ mamy: $T \vdash \exists x_1 \ldots \exists x_n \psi(x_1, \ldots, x_n)$.*

Dowód lematu 1. Oczywiście 1) implikuje 2). Pokażemy, że 2) implikuje 3). Niech $\mathfrak{A}$ będzie modelem T, $(a_1, \ldots, a_n)$ ciągiem elementów $dom(\mathfrak{A})$ oraz niech $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ należy do Ψ. Wtedy $\mathfrak{A} \models \psi(x_1, \ldots, x_n)[a_1, \ldots, a_n]$, a zatem (na mocy definicji relacji $\models$): $\mathfrak{A} \models \exists x_1 \ldots \exists x_n \psi(x_1, \ldots, x_n)$. Ponieważ T jest teorią zupełną, wszystkie jej modele są elementarnie równoważne, a to implikuje, iż $T \vdash \exists x_1 \ldots \exists x_n \psi(x_1, \ldots, x_n)$.

Dowód twierdzenia Rylla-Nardzewskiego

Wreszcie, załóżmy, iż zachodzi 3). Rozszerzamy język L teorii T o nowe stałe $c_1, \ldots, c_n$ i rozważamy teorię:
$T' = T \cup \{\psi(c_1, \ldots, c_n) : \psi(x_1, \ldots, x_n) \in \Psi\}$. Teoria ta jest niesprzeczna. W przeciwnym bowiem przypadku, na mocy twierdzenia o zwartości istniałby skończony podzbiór Ψ_0 zbioru Ψ taki, że sprzeczna byłaby $T \cup \{\psi(c_1, \ldots, c_n) : \psi(x_1, \ldots, x_n) \in \Psi_0\}$. Niech $\psi_0(x_1, \ldots, x_n)$ oznacza koniunkcję wszystkich formuł z Ψ_0. Skoro Ψ jest domknięty na koniunkcję, to formuła $\psi_0(x_1, \ldots, x_n)$ należy do Ψ. Mamy więc wtedy:
$T \vdash \neg\psi_0(c_1, \ldots, c_n)$. Ponieważ stałe $c_1, \ldots, c_n$ nie występują w T, więc wynika z tego, że $T \vdash \neg\exists x_1 \ldots \exists x_n \psi_0(x_1, \ldots, x_n)$, a to przeczy 3). Istotnie więc T' jest niesprzeczna.
Na mocy twierdzenia Löwenheima-Skolema istnieje przeliczalny model $\mathfrak{A}'$ dla T'. Niech $a_1, \ldots, a_n$ będą interpretacjami w tym modelu, odpowiednio, $c_1, \ldots, c_n$. Wreszcie, niech $\mathfrak{A}$ będzie reduktem modelu $\mathfrak{A}'$ do sygnatury języka L. Wtedy ciąg $(a_1, \ldots, a_n)$ realizuje typ Ψ w $\mathfrak{A}$.

Dowód twierdzenia Rylla-Nardzewskiego

Lemat 2. *Jeśli teoria zupełna T jest $\aleph_0$-kategoryczna, to każdy typ niesprzeczny jest izolowany.*

Dowód lematu 2. Przypuśćmy bowiem, że istnieje typ niesprzeczny Ψ, który nie jest izolowany.
Istnieje wtedy model przeliczalny $\mathfrak{A}$ dla T, który realizuje Ψ. Ponieważ Ψ nie jest izolowany, na mocy twierdzenia o omijaniu typów istnieje model przeliczalny $\mathfrak{B}$ dla T, który omija Ψ.
Modele $\mathfrak{A}$ oraz $\mathfrak{B}$ nie mogą być izomorficzne, a więc T nie byłaby wtedy $\aleph_0$-kategoryczna.

Dowód twierdzenia Rylla-Nardzewskiego

Lemat 3. *Jeśli teoria zupełna T jest $\aleph_0$-kategoryczna, to dla każdej n zbiór $S^n(T)$ jest skończony.*

Dowód lematu 3. Jeśli Ψ jest typem zupełnym, to jest izolowany. Nadto, istnieje generator ψ_Ψ typu Ψ należący do Ψ.
Zauważmy, że jeśli Ψ oraz Φ są różnymi n-typami zupełnymi, to $\neg\psi_\Psi$ należy do Φ. Gdyby bowiem było inaczej, to mielibyśmy $\psi_\Psi \in \Phi$, na mocy zupełności Φ. Wtedy dla dowolnej $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ koniunkcja $\neg\psi(x_1, \ldots, x_n) \wedge \psi_\Psi(x_1, \ldots, x_n)$ byłaby sprzeczna, na mocy własności ψ_Ψ. To z kolei implikuje, że $\psi(x_1, \ldots, x_n) \in \Phi$, na mocy zupełności Φ. Pokazaliśmy zatem, że w takim przypadku mielibyśmy $\Psi \subseteq \Phi$. Skoro Φ i Ψ są zupełne, implikuje to, iż $\Psi = \Phi$, wbrew założeniu. Tak więc, istotnie $\neg\psi_\Psi$ należy do Φ.

Dowód twierdzenia Rylla-Nardzewskiego

Przypuśćmy teraz, dla dowodu nie wprost, że dla pewnej n zbiór $S^n(T)$ jest nieskończony. Rozszerzamy język L o nowe stałe $c_1, \ldots, c_n$. Teoria

$$T' = T \cup \{\neg\psi_\Psi(c_1, \ldots, c_n) : \Psi \in S^n(T)\}$$

jest wtedy niesprzeczna. Aby tego dowieść wystarczy, na mocy twierdzenia o zwartości, pokazać, że dla każdego skończonego podzbioru X zbioru $S^n(T)$, niesprzeczna jest teoria: $T_X = T \cup \{\neg\psi_\Psi(c_1, \ldots, c_n) : \Psi \in X\}$. Wybierzmy zupełny n-typ Φ, który nie należy do X (co jest możliwe na mocy przypuszczenia, iż $S^n(T)$ jest nieskończony, a X skończony) oraz model $\mathfrak{A}$ i ciąg $(a_1, \ldots, a_n)$ elementów $dom(\mathfrak{A})$ takie, że: $\Phi = Tp_\mathfrak{A}(a_1, \ldots, a_n)$. Ponieważ dla wszystkich $\Psi \in X$ mamy $\neg\psi_\Psi \in \Phi$, więc $\mathfrak{A} \models \neg\psi_\Psi[a_1, \ldots, a_n]$. Wystarczy teraz interpretować stałe $c_1, \ldots, c_n$ w modelu $\mathfrak{A}$ jako, odpowiednio, elementy $a_1, \ldots, a_n$ i otrzymujemy model dla T_X.

Dowód twierdzenia Rylla-Nardzewskiego

Tak więc, istnieje również (na mocy twierdzenia o zwartości) model $\mathfrak{B}$ dla T' oraz elementy $b_1, \ldots, b_n$ w $dom(\mathfrak{B})$ takie, iż dla wszystkich $\Psi \in S^n(T)$ zachodzi:

$$\mathfrak{B} \models \neg\psi_\Psi[b_1, \ldots, b_n].$$

Oznacza to, że $Tp_{\mathfrak{B}}(b_1, \ldots, b_n)$ nie należy do $S^n(T)$, co daje sprzeczność.

Ostatecznie więc, przypuszczenie, iż $S^n(T)$ jest nieskończony trzeba odrzucić i teza lematu 3 została udowodniona.

Dowód twierdzenia Rylla-Nardzewskiego

Lemat 4. *Załóżmy, że dla każdej n każdy zupełny n-typ teorii zupełnej T jest izolowany. Niech* $\mathfrak{A}$ *oraz* $\mathfrak{B}$ *będą dwoma modelami T i niech* $(a_1, \ldots, a_n)$ *i* $(b_1, \ldots, b_n)$ *będą ciągami z, odpowiednio,* $dom(\mathfrak{A})$ *oraz* $dom(\mathfrak{B})$ *takimi, że:* $Tp_{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) = Tp_{\mathfrak{B}}(b_1, \ldots, b_n)$.
Wtedy dla każdego $a \in dom(\mathfrak{A})$ *istnieje* $b \in dom(\mathfrak{B})$ *taki, że:* $Tp_{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n, a) = Tp_{\mathfrak{B}}(b_1, \ldots, b_n, b)$.

Dowód lematu 4. Niech:

- $\Psi = Tp_{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)$
- $\Phi = Tp_{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n, a)$.

Dowód twierdzenia Rylla-Nardzewskiego

Niech $\psi_1(x_1, \ldots, x_n)$ oraz $\psi_2(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ będą generatorami, odpowiednio, Ψ oraz Φ.

Wtedy formuła $\exists x_{n+1}\, \psi_2(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ jest elementem Ψ. Ponieważ z założenia $\Psi = Tp_{\mathfrak{B}}(b_1, \ldots, b_n)$, więc:

$$\mathfrak{B} \models \exists x_{n+1}\, \psi_2(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})[b_1, \ldots, b_n].$$

Niech zatem b będzie elementem $dom(\mathfrak{B})$ takim, że $\mathfrak{B} \models \psi_2[b_1, \ldots, b_n, b]$. Wtedy $\Phi = Tp_{\mathfrak{B}}(b_1, \ldots, b_n, b)$. To kończy dowód lematu 4.

Dowód twierdzenia Rylla-Nardzewskiego

Lemat 5. *Załóżmy, że dla każdej n każdy zupełny n-typ teorii zupełnej T jest izolowany. Niech $\mathfrak{A}$ oraz $\mathfrak{B}$ będą dwoma przeliczalnymi modelami dla T i niech $(a_1, \ldots, a_n)$ i $(b_1, \ldots, b_n)$ będą ciągami z, odpowiednio, $dom(\mathfrak{A})$ oraz $dom(\mathfrak{B})$ takimi, że:*

$$Tp_{\mathfrak{A}}(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) = Tp_{\mathfrak{B}}(b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}).$$

Wtedy istnieje izomorfizm f z $\mathfrak{A}$ na $\mathfrak{B}$ taki, że $f(a_i) = b_i$ dla wszystkich $1 \leqslant i \leqslant n-1$.

Dowód lematu 5. Niech:

- $(c_i : i \in \omega)$ będzie wyliczeniem elementów $dom(\mathfrak{A})$
- $(d_i : i \in \omega)$ będzie wyliczeniem elementów $dom(\mathfrak{B})$.

Dowód twierdzenia Rylla-Nardzewskiego

Poszukiwany izomorfizm f zostanie zdefiniowany w podobny sposób jak w dowodzie, iż dowolne dwa przeliczalne modele teorii gęstego liniowego porządku bez końców są izomorficzne.

Przypuśćmy, że f został już określony na zbiorze $\{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\} \subseteq dom(\mathfrak{A})$. Rozszerzymy f przez indukcję po k, definiując elementy $a_{n+k} \in dom(\mathfrak{A})$ oraz $b_{n+k} \in dom(\mathfrak{B})$ w taki sposób, aby zachodziła równość:

$$(*) \quad Tp_{\mathfrak{A}}(a_0, a_1, \ldots, a_{n+k}) = Tp_{\mathfrak{B}}(b_0, b_1, \ldots, b_{n+k}).$$

Załóżmy, że dla $i < n + k$ zdefiniowano już elementy a_i oraz b_i. Definiując teraz a_{n+k} oraz b_{n+k} rozważymy dwa przypadki.

Dowód twierdzenia Rylla-Nardzewskiego

- *k jest parzysta:* $k = 2i$. Wtedy niech $a_{n+k} = c_i$. Na mocy hipotezy indukcyjnej mamy:

$$(*) \quad Tp_{\mathfrak{A}}(a_0, a_1, \ldots, a_{n+k-1}) = Tp_{\mathfrak{B}}(b_0, b_1, \ldots, b_{n+k-1}).$$

Z kolei, na mocy lematu 4 istnieje element b_{n+k} taki, że:

$$(*) \quad Tp_{\mathfrak{A}}(a_0, a_1, \ldots, a_{n+k}) = Tp_{\mathfrak{B}}(b_0, b_1, \ldots, b_{n+k}).$$

- *k jest nieparzysta:* $k = 2i + 1$. Wtedy niech $b_{n+k} = d_i$. Jak poprzednio, na mocy lematu 4 otrzymujemy element a_{n+k} taki, że:

$$(*) \quad Tp_{\mathfrak{A}}(a_0, a_1, \ldots, a_{n+k}) = Tp_{\mathfrak{B}}(b_0, b_1, \ldots, b_{n+k}).$$

Dowód twierdzenia Rylla-Nardzewskiego

Zauważmy teraz, że dla dowolnych liczb r oraz s mamy: $a_r = a_s$ dokładnie wtedy, gdy $b_r = b_s$. Jeśli bowiem na przykład $s \geqslant r$, to następujące warunki są równoważne:

- $a_r = a_s$
- formuła atomowa $x_r \doteq x_s$ należy do $Tp_{\mathfrak{A}}(a_0, a_1, \ldots, a_s)$
- formuła atomowa $x_r \doteq x_s$ należy do $Tp_{\mathfrak{B}}(b_0, b_1, \ldots, b_s)$
- $b_r = b_s$.

Odwzorowanie $f(a_m) = b_m$ jest zatem bijekcją z $\{a_m : m \in \omega\}$ na $\{b_m : m \in \omega\}$. Fakt, że jest to surjekcja wynika wprost z definicji rozważanych ciągów.

Dowód twierdzenia Rylla-Nardzewskiego

Wreszcie, fakt, iż f jest izomorfizmem z $\mathfrak{A}$ na $\mathfrak{B}$ wynika z tego, że następujące warunki są równoważne, dla każdej formuły $\psi(x_0, x_1, \ldots, x_{m-1})$:

- $\mathfrak{A} \models \psi[a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}]$
- $\psi(x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}) \in Tp_{\mathfrak{A}}(a_0, a_1, \ldots, a_{m-1})$
- $\psi(x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}) \in Tp_{\mathfrak{B}}(b_0, b_1, \ldots, b_{m-1})$
- $\mathfrak{B} \models \psi[b_0, b_1, \ldots, b_{m-1}]$.

To kończy dowód lematu 5.

Dowód twierdzenia Rylla-Nardzewskiego

Lemat 6. *Jeśli T zupełna i dla każdej n każdy n-typ zupełny jest izolowany, to T jest $\aleph_0$-kategoryczna.*

Dowód lematu 6. Niech $\mathfrak{A}$ oraz $\mathfrak{B}$ będą dwoma przeliczalnymi modelami T. Wtedy $Th(\mathfrak{A})$ równy jest zupełnemu typowi realizowanemu w $\mathfrak{A}$ przez ciąg pusty.
Ponieważ T jest zupełna, $Th(\mathfrak{A}) = Th(\mathfrak{B})$. Tak więc, zupełny typ realizowany w $\mathfrak{A}$ przez ciąg pusty jest równy zupełnemu typowi realizowanemu w $\mathfrak{B}$ przez ciąg pusty.
Na mocy lematu 5, istnieje wtedy izomorfizm między $\mathfrak{A}$ oraz $\mathfrak{B}$, czyli T jest $\aleph_0$-kategoryczna.

Dowód twierdzenia Rylla-Nardzewskiego

Zauważmy przy okazji, że inną konsekwencją lematu 5 jest:

- (†) Niech $\mathfrak{A}$ będzie przeliczalnym modelem $\aleph_0$-kategorycznej teorii zupełnej T. Niech $(a_1, \ldots, a_n)$ i $(b_1, \ldots, b_n)$ będą ciągami z $dom(\mathfrak{A})$ takimi, że:

  $$Tp_{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) = Tp_{\mathfrak{B}}(b_1, \ldots, b_n).$$

  Wtedy istnieje automorfizm f modelu $\mathfrak{A}$ taki, że $f(a_i) = b_i$ dla wszystkich $1 \leqslant i \leqslant n$.

Dowód twierdzenia Rylla-Nardzewskiego

Lemat 7. *Jeśli dla każdej n zbiór* $\mathcal{L}_T^n$ *jest skończony, to dla każdej n każdy zupełny n-typ jest izolowany.*

Dowód lematu 7. Pokażemy, że jeśli istnieje n-typ zupełny, który nie jest izolowany, to zbiór $\mathcal{L}_T^n$ jest nieskończony.
Niech zatem Ψ będzie n-typem zupełnym, który nie jest izolowany.
Zbudujemy, przez indukcję po k, ciąg $(\psi_k(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}))_{k\in\omega}$ formuł należących do Ψ takich, że dla wszystkich k:

- $T \vdash \forall x_0 \forall x_1 \ldots \forall x_{n-1}\ (\psi_{k+1}(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \rightarrow \psi_k(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}))$ oraz
- $T \vdash \neg\forall x_0 \forall x_1 \ldots \forall x_{n-1}\ (\psi_k(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \rightarrow \psi_{k+1}(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}))$.

Dowód twierdzenia Rylla-Nardzewskiego

Wybieramy dowolną formułę $\psi_0(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ należącą do Ψ. Załóżmy teraz, że formuła $\psi_k(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ została już zdefiniowana. Ponieważ Ψ nie jest izolowany, więc istnieje formuła $\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ należąca do Ψ taka, że:

$$T \vdash \neg\forall x_0 \forall x_1 \ldots \forall x_{n-1} \, (\psi_k(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \rightarrow \varphi(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})).$$

Niech $\psi_{k+1}(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ będzie formułą:

$$\psi_k(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \wedge \varphi(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

Wtedy jest widoczne, iż wszystkie tak zdefiniowane formuły $\psi_k(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ są parami dowodliwie T-nierównoważne.

Dowód twierdzenia Rylla-Nardzewskiego

Lemat 8. *Jeśli dla każdej n, zbiór $S^n(T)$ jest skończony, to zbiór $\mathcal{L}^n_T$ jest skończony.*

Dowód lematu 8. Dla dowolnej formuły $\psi(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ niech $S^n(\psi) = \{\Psi \in S^n(T) : \psi \in \Psi\}$. Wtedy, jeśli formuły ψ oraz φ są T-równoważne, to $S^n(\psi) = S^n(\varphi)$. Jeśli natomiast ψ oraz φ nie są T-równoważne, to istnieje model $\mathfrak{A}$ dla T oraz ciąg $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ elementów $dom(\mathfrak{A})$ który spełnia jedną z tych formuł, ale nie pozostałą. Niech np. $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ spełnia ψ w $\mathfrak{A}$:

$$\mathfrak{A} \models \psi(x_0, x_1, \ldots, x_n)[a_0, a_1, \ldots, a_n].$$

Wtedy $Tp_{\mathfrak{A}}(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ należy do $S^n(\psi)$, a nie należy do $S^n(\varphi)$. Tak więc, $\mathcal{L}^n_T$ nie może mieć więcej elementów niż jest podzbiorów zbioru $S^n(T)$. W konsekwencji, jeśli $S^n(T)$ jest skończony, to $\mathcal{L}^n_T$ jest skończony.

Dowód twierdzenia Rylla-Nardzewskiego

Wróćmy do dowodu Twierdzenia Rylla-Nardzewskiego. Powyższe lematy pozwalają stwierdzić, że:

- Implikacja $1 \Rightarrow 2$ zachodzi na mocy lematu 2.
- Implikacja $2 \Rightarrow 3$ jest oczywista.
- Implikacja $3 \Rightarrow 1$ zachodzi na mocy lematu 6.
- Implikacja $1 \Rightarrow 4$ zachodzi na mocy lematu 3.
- Implikacja $4 \Rightarrow 5$ zachodzi na mocy lematu 8.
- Implikacja $5 \Rightarrow 3$ zachodzi na mocy lematu 7.

Konsekwencje twierdzenia Rylla-Nardzewskiego

Powiemy, że struktura $\mathfrak{A}$ jest ***$\aleph_0$-kategoryczna***, gdy $Th(\mathfrak{A})$ jest $\aleph_0$-kategoryczna. Wśród konsekwencji Twierdzenia Rylla-Nardzewskiego mamy następującą charakterystykę (przeliczalnych) struktur $\aleph_0$-kategorycznych w terminach czysto algebraicznych. Niech $\mathfrak{A}$ będzie przeliczalną strukturą $\aleph_0$-kategoryczną. Dla każdego n definiujemy dwuargumentową relację r_n na zbiorze $dom(\mathfrak{A})^n$ w sposób następujący:

- $r_n((a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n))$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje automorfizm f struktury $\mathfrak{A}$ taki, że $f(a_i) = b_i$ dla $1 \leqslant i \leqslant n$.

Relacja r_n jest równoważnością. Na mocy (†) powyżej, jeśli dwa ciągi n-elementowe z $dom(\mathfrak{A})$ realizują ten sam typ zupełny, to są one równoważne względem relacji r_n. Natomiast z Twierdzenia Rylla-Nardzewskiego wynika, że jeśli $\mathfrak{A}$ jest $\aleph_0$-kategoryczna, to każda z relacji r_n ma tylko skończenie wiele klas równoważności.

Konsekwencje twierdzenia Rylla-Nardzewskiego

- *Niech $\mathfrak{A}$ będzie strukturą przeliczalną. Wtedy następujące warunki są równoważne:*
  1. *$\mathfrak{A}$ jest $\aleph_0$-kategoryczna.*
  2. *Dla każdej n, relacja r_n ma tylko skończoną liczbę klas równoważności.*

Implikacja $1 \Rightarrow 2$ została wyżej udowodniona. Dla dowodu implikacji $2 \Rightarrow 1$ załóżmy, że dla każdej n relacja r_n ma tylko skończoną liczbę klas równoważności. Pokażemy, że $T = Th(\mathfrak{A})$ jest $\aleph_0$-kategoryczna. Ustalmy liczbę n. Jeśli ciągi $(a_1, \ldots, a_n)$ oraz $(b_1, \ldots, b_n)$ są r_n-równoważne, to realizują ten sam typ zupełny. Istnieje zatem jedynie skończenie wiele typów zupełnych realizowanych w $\mathfrak{A}$. Niech $\{\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_k\}$ będzie zbiorem tych wszystkich typów zupełnych. Pokażemy, że zbiór ten jest identyczny z $S^n(T)$.

Konsekwencje twierdzenia Rylla-Nardzewskiego

Przypuśćmy, dla dowodu nie wprost, że istnieje $\Phi \in S^n(T) - \{\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_k\}$. Wtedy Φ zawiera formułę $\psi(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ taką, że dla wszystkich i:

$$\neg\psi(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \Psi_i.$$

Formuła $\exists x_0 \exists x_1 \ldots \exists x_{n-1}\ \psi(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ należy do T, a zatem istnieją elementy $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ w $dom(\mathfrak{A})$ takie, że $\mathfrak{A} \models \psi[a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}]$. To jednak jest niemożliwe, ponieważ dla pewnej i takiej, że $1 \leqslant i \leqslant k$ ciąg $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ musi realizować któryś z typów Ψ_i.

Przypuszczenie dowodu nie wprost trzeba zatem odrzucić. Ostatecznie, dla każdej n zbiór $S^n(T)$ jest skończony (bo jest identyczny z $\{\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_k\}$) i T jest $\aleph_0$-kategoryczna na mocy Twierdzenia Rylla-Nardzewskiego.

Rodzaje modeli

Modele danej teorii mogą być „małe" lub „duże", „ubogie" bądź „bogate". Pojęcia wprowadzone poniżej oraz charakteryzujące je twierdzenia mają zdać sprawę z tej różnorodności. Modele atomowe to modele „ubogie". Z kolei, modele uniwersalne i modele nasycone to modele „duże" i „bogate".

- Niech T będzie teorią zupełną (w języku przeliczalnym), która ma modele nieskończone. Jeśli zbiór wszystkich typów zupełnych teorii T, czyli zbiór $S(T)$, jest przeliczalny, to czasem mówimy, że T jest ***małą*** teorią. Przypominamy, że $S(T)$ jest zbiorem wszystkich typów zupełnych, które zawierają T jako podzbiór.
- Pokażemy, że jeśli T jest mała, to wśród modeli T istnieje przeliczalny model „najmniejszy" oraz przeliczalny model „największy". Nie chodzi przy tym oczywiście o moc uniwersum modelu, lecz o liczbę typów w nim realizowanych.

Rodzaje modeli

Na mocy Twierdzenia Rylla-Nardzewskiego, każda teoria $\aleph_0$-kategoryczna jest mała. Teoria modelu $\mathfrak{A}$ rozważanego w przykładzie 8 w punkcie *Realizowanie typów* jest mała, gdyż dla każdej n zbiór $S^n(Th(\mathfrak{A}))$ jest przeliczalny, a więc także zbiór $S(Th(\mathfrak{A}))$ jest przeliczalny.

- Teoria struktury uporządkowanych liczb rzeczywistych $(\mathbb{R}, <)$ jest mała: struktura ta jest modelem teorii gęstych liniowych porządków bez końców.
- Niech $\mathbb{Q}$ będzie zbiorem liczb wymiernych i rozważmy przeliczalny zbiór stałych $C = \{c_a : a \in \mathbb{Q}\}$. Rozważmy rozszerzenie $(\mathbb{R}, <, \mathbb{Q})$ struktury $(\mathbb{R}, <)$, w których każdą stałą c_a interpretujemy jako liczbę wymierną a. Wtedy teoria $Th((\mathbb{R}, <, \mathbb{Q}))$ nie jest mała, choć nadal jest teorią w języku przeliczalnym.

Rodzaje modeli

Model $\mathfrak{A}$ jest ***atomowy***, gdy każdy typ zupełny $Tp_{\mathfrak{A}}(\overrightarrow{a})$ jest typem izolowanym teorii $Th(\mathfrak{A})$, dla każdego ciągu $\overrightarrow{a}$ elementów $dom(\mathfrak{A})$.

- Jest dość oczywiste, że jeśli teoria zupełna T jest mała, to istnieje jej przeliczalny model atomowy.
- Istotnie, na mocy Twierdzenia o Omijaniu Typów istnieje model dla T, który omija wszystkie typy niegłówne.
- Dalej, na mocy Dolnego Twierdzenia Löwenheima-Skolema, istnieje też przeliczalny model o tej własności.

Modele atomowe to zatem te modele, które realizują jedynie te typy, które muszą być zrealizowane.

Rodzaje modeli: przykłady 1–2

- 1. Model dla jednej relacji równoważności, mającej n-elementową klasę równoważności dla każdej $n > 0$ (i żadnych innych klas) rozważany w przykładzie 8 w *Realizowanie typów* jest atomowy. Istotnie, każdy typ realizowany w tym modelu jest izolowany przez którąś z formuł ψ_n, stwierdzających, że istnieje dokładnie n elementów w danej klasie równoważności (czyli formuła ψ_n jest generatorem takiego typu).

- 2. Teoria $Th((\mathbb{R}, <, \mathbb{Q}))$ rozważana powyżej ma przeliczalny model atomowy. Mianowicie zbiór liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ wraz z naturalnym porządkiem $<$ oraz interpretacją każdej stałej c_a jako liczby wymiernej a jest takim właśnie modelem. Generatorem każdego 1-typ realizowanego w tej strukturze jest formuła atomowa $x \doteq c_a$, dla $a \in \mathbb{Q}$. Tak więc, każdy typ realizowany w tej strukturze jest główny.

Rodzaje modeli: przykład 3

3. Rozważmy sygnaturę złożoną z przeliczalnej liczby predykatów jednoargumentowych P_i, dla $i \in \omega$. Niech X oraz Y będą rozłącznymi podzbiorami ω oraz niech $\psi_{X,Y}(x)$ będzie koniunkcją:

$$\bigwedge_{i \in X} P_i(x) \wedge \bigwedge_{i \in Y} \neg P_i(x).$$

Niech T będzie teorią, której aksjomatami są zdania stwierdzające, iż istnieje co najmniej n elementów spełniających $\psi_{X,Y}(x)$, dla każdej n oraz wszystkich *skończonych* rozłącznych podzbiorów X, Y zbioru ω.

Rodzaje modeli: przykład 3

Dla dowolnego $A \subseteq \omega$ niech Γ_A będzie zbiorem formuł zawierającym: $P_i(x)$ dla każdej $i \in A$ oraz $\neg P_i(x)$ dla każdej $i \notin A$. Ponieważ każdy skończony podzbiór tego zbioru jest typem teorii T, więc Γ_A jest typem teorii T. Można udowodnić, że teoria T dopuszcza eliminację kwantyfikatorów. W konsekwencji, istnieje dokładnie jeden typ Ψ_A w $S^1(T)$, który zawiera Γ_A. Ponadto, każdy typ Ψ w $S^1(T)$ jest postaci Ψ_A dla pewnego $A \subseteq \omega$. Wynika z tego, że $S^1(T)$ ma dokładnie tyle elementów, ile elementów ma zbiór potęgowy $\wp(\omega)$, czyli $2^{\aleph_0}$. Dla dowolnego $\Psi \in S^1(T)$, Ψ nie jest izolowany. Dla dowolnego skończonego podzbioru Φ zbioru Ψ istnieje bowiem nieskończenie wiele predykatów P_i, które nie występują w Φ. Z aksjomatów teorii T wynika, że zarówno $\Phi \cup \{P_i(x)\}$, jak i $\Phi \cup \{\neg P_i(x)\}$ jest realizowalny. Tak więc, Ψ nie jest izolowany przez żadną formułę (nie istnieje generator dla Ψ). W takim razie, ponieważ w $S^1(T)$ nie ma typów izolowanych, T nie może mieć modelu atomowego.

Przypomnienie

Jak pamiętamy ze wstępu do matematyki, liczby wymierne $\mathbb{Q}$ (wraz z naturalnym porządkiem $<$) stanowią przykład wyróżnionego porządku wśród wszystkich (przeliczalnych) zbiorów uporządkowanych. Po pierwsze, struktura ta ma własność *jednorodności*: dla dowolnych skończonych ciągów $a_1 < \ldots < a_n$ oraz $b_1 < \ldots < b_n$ istnieje automorfizm f zbioru $\mathbb{Q}$ taki, że $f(a_i) = b_i$, dla wszystkich $1 \leqslant i \leqslant n$. Po drugie, struktura ta jest *uniwersalna*: dla każdego przeliczalnego liniowego porządku istnieje jego włożenie w $(\mathbb{Q}, <)$. Po trzecie wreszcie, każdy przeliczalny liniowy porządek, który ma powyższe własności jednorodności oraz uniwersalności, jest izomorficzny z $(\mathbb{Q}, <)$.

Omawiane niżej pojęcia: struktury $\aleph_0$-jednorodnej, przeliczalnie uniwersalnej oraz $\aleph_0$-nasyconej stanowią uogólnienie wspomnianych wyżej własności struktury $(\mathbb{Q}, <)$.

Jednorodność

Mówimy, że struktura $\mathfrak{A}$ jest ***$\aleph_0$-jednorodna***, gdy dla dowolnych ciągów $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ elementów $\mathfrak{A}$, jeśli $(\mathfrak{A}, \overrightarrow{a}) \equiv (\mathfrak{A}, \overrightarrow{b})$, to dla każdego $c \in dom(\mathfrak{A})$ istnieje $d \in dom(\mathfrak{A})$ taki, że $(\mathfrak{A}, \overrightarrow{a}, c) \equiv (\mathfrak{A}, \overrightarrow{b}, d)$.

- *A. Każda przeliczalna struktura atomowa jest $\aleph_0$-jednorodna.*
- *B. Dla dowolnej zupełnej teorii T oraz dowolnych jej modeli $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$, jeśli:*
  1. *$\mathfrak{A}$ jest przeliczalny,*
  2. *każdy typ realizowany w $\mathfrak{A}$ jest też realizowany w $\mathfrak{B}$,*
  3. *$\mathfrak{B}$ jest $\aleph_0$-jednorodny,*

  to $\mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{B}$, czyli istnieje elementarne włożenie $\mathfrak{A}$ w $\mathfrak{B}$.

Dowód A.

Niech $\mathfrak{A}$ będzie przeliczalną strukturą atomową i niech $\overrightarrow{a}$ oraz $\overrightarrow{b}$ będą dwoma n-elementowymi ciągami elementów $dom(\mathfrak{A})$ realizującymi ten sam n-typ $\Psi \in S^n(Th(\mathfrak{A}))$. Ponieważ $\mathfrak{A}$ jest atomowa, typ Ψ jest główny, czyli istnieje jego generator $\theta(\overrightarrow{x})$. Niech teraz c będzie dowolnym elementem $dom(\mathfrak{A})$. Niech $\psi(\overrightarrow{x}, x_{n+1})$ będzie generatorem typu (zupełnego) $Tp_{\mathfrak{A}}(\overrightarrow{a}, c)$. Wtedy formuła $\exists y\, \psi(\overrightarrow{x}, y)$ należy do $Tp_{\mathfrak{A}}(\overrightarrow{a})$ oraz $Tp_{\mathfrak{A}}(\overrightarrow{a}) = \Psi$. Ponieważ Ψ jest również typem ciągu $\overrightarrow{b}$, więc $\mathfrak{A} \models \exists y\, \psi(\overrightarrow{x}, y)[\overrightarrow{b}]$. A zatem $\mathfrak{A} \models \psi[\overrightarrow{b}, d]$ dla pewnego $d \in dom(\mathfrak{A})$. Tak więc, formuła $\psi(\overrightarrow{x}, y)$ należy do $Tp_{\mathfrak{A}}(\overrightarrow{b}, d)$. Ponieważ formuła ta jest generatorem dla $Tp_{\mathfrak{A}}(\overrightarrow{a}, c)$, więc otrzymujemy:

$$Tp_{\mathfrak{A}}(\overrightarrow{a}, c) = Tp_{\mathfrak{A}}(\overrightarrow{b}, d).$$

Oznacza to, na mocy definicji, że $\mathfrak{A}$ jest $\aleph_0$-jednorodna.

Dowód B.

Niech uniwersum modelu $\mathfrak{A}$ będzie ustawione w ciąg $(a_1, a_2, \ldots)$. Zbudujemy elementarne włożenie $f : \mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{B}$ krok po kroku, w kroku n definiując $b_n = f(a_n)$.

- **Krok 1.** Ponieważ każdy typ realizowany w $\mathfrak{A}$ jest też realizowany w $\mathfrak{B}$, więc istnieje $b_1 \in dom(\mathfrak{B})$ taki, że $Tp_{\mathfrak{A}}(a_1) = Tp_{\mathfrak{B}}(b_1)$. Niech $f(a_1) = b_1$.
- Niech $\overrightarrow{a}_n = (a_1, \ldots, a_n)$. Załóżmy teraz, że dla pewnej n ciąg $\overrightarrow{b}_n = (b_1, \ldots, b_n)$ został już zdefiniowany tak, iż $Tp_{\mathfrak{A}}(\overrightarrow{a}_n) = Tp_{\mathfrak{B}}(\overrightarrow{b}_n)$.
- **Krok $n + 1$.** Chcemy zdefiniować $b_{n+1} = f(a_{n+1})$ tak, aby $Tp_{\mathfrak{A}}(\overrightarrow{a}_n, a_{n+1}) = Tp_{\mathfrak{B}}(\overrightarrow{b}_n, b_{n+1})$.

Dowód B.

- Ponieważ każdy typ realizowany w $\mathfrak{A}$ jest też realizowany w $\mathfrak{B}$, więc istnieje ciąg $(c_1, \ldots, c_{n+1})$ elementów $dom(\mathfrak{B})$ taki, że $Tp_{\mathfrak{B}}(c_1, \ldots, c_{n+1}) = Tp_{\mathfrak{A}}(\overrightarrow{a}_{n+1})$.
- W konsekwencji, $Tp_{\mathfrak{B}}(\overrightarrow{c}_n) = Tp_{\mathfrak{B}}(\overrightarrow{b}_n)$. Ponieważ $\mathfrak{B}$ jest $\aleph_0$-jednorodny, istnieje b_{n+1} taki, że $Tp_{\mathfrak{B}}(\overrightarrow{b}_n, b_{n+1}) = Tp_{\mathfrak{B}}(\overrightarrow{c}_n, c_{n+1})$. Z kolei, ponieważ $Tp_{\mathfrak{B}}(\overrightarrow{c}_n, c_{n+1}) = Tp_{\mathfrak{A}}(\overrightarrow{a}_{n+1})$, więc mamy $Tp_{\mathfrak{B}}(\overrightarrow{b}_n, b_{n+1}) = Tp_{\mathfrak{A}}(\overrightarrow{a}_n, a_{n+1})$. Możemy zatem zdefiniować $b_{n+1} = f(a_{n+1})$.
- Tworzymy w ten sposób nieskończony ciąg $(b_1, b_2, \ldots)$ elementów $dom(\mathfrak{B})$ i definiujemy $f(a_i) = b_i$ dla wszystkich $i \in \omega$. Ponieważ $Tp_{\mathfrak{A}}(\overrightarrow{a}_n) = Tp_{\mathfrak{B}}(\overrightarrow{b}_n)$ dla każdej $n \in \omega$, więc f jest włożeniem elementarnym.

Przykład struktury niejednorodnej

Rozważmy dwie teorie:

- $Th(\mathfrak{A}_2)$, gdzie $\mathfrak{A}_2$ jest (przeliczalnym) modelem jednej relacji równoważności E, która ma w $\mathfrak{A}_2$ dokładnie dwie przeliczalne klasy równoważności.
- $Th((\mathbb{Z}, s))$, gdzie $\mathbb{Z}$ jest zbiorem liczb całkowitych, a s funkcją następnika.

Aksjomatyczny opis $(\mathbb{Z}, s)$ to zdania stwierdzające, że:

- s jest funkcją (co gwarantuje istnienie i jednoznaczność następnika),
- $\forall x \exists y\ (s(x) \doteq y)$ (każdy element ma poprzednik),
- $\forall x \forall y\ (s(x) \doteq s(y) \rightarrow x \doteq y)$ (jednoznaczność poprzednika),
- dla każdej $n \in \omega$, $\forall x\ \neg s^n(x) \doteq x$, gdzie s^n jest iteracją funkcji s (n razy); zdania te stwierdzają, że (dyskretny) porządek wyznaczony przez funkcję następnika s nie ma skończonych cykli.

Przykład struktury niejednorodnej

Niech T^* będzie dedukcyjnym domknięciem sumy tych dwóch teorii wraz ze zdaniem: $\forall x \forall y\ (s(x) \doteq y \rightarrow E(x, y))$.

Modele teorii T^* mają dwie klasy E-równoważności. Każda z tych klas może zawierać dowolną (skończoną lub przeliczalną) liczbę „kopii" zbioru $\mathbb{Z}$. Rozważmy jeden z takich modeli $\mathfrak{A}$, w którym:

- jedna klasa E-równoważności jest zbiorem $\{\ldots a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \ldots\}$
- druga klasa E-równoważności jest zbiorem $\{\ldots b_{-2}, b_{-1}, b_0, b_1, b_2, \ldots \quad \ldots c_{-2}, c_{-1}, c_0, c_1, c_2, \ldots\}$,

Wtedy: elementy a_0 i b_0 spełniają te same formuły atomowe, ale nie istnieje w $dom(\mathfrak{A})$ element d taki, że a_0, d oraz (b_0, c_0) spełniają te same formuły atomowe. Tak więc, $\mathfrak{A}$ nie jest strukturą $\aleph_0$-jednorodną.

Uniwersalność

Dla dowolnej teorii zupełnej T mówimy, że struktura $\mathfrak{A}$ jest ***przeliczalnie uniwersalna***, gdy $\mathfrak{B} \hookrightarrow \mathfrak{A}$ dla każdego przeliczalnego modelu $\mathfrak{B}$ teorii T.

Struktura $(\mathbb{Q}, <)$ jest przeliczalnie uniwersalna dla teorii gęstych liniowych porządków bez elementu pierwszego oraz ostatniego. Jednak strukturą przeliczalnie uniwersalną dla tej teorii jest również struktura, której uniwersum stanowi kopia zbioru $\mathbb{Q}$, po której następuje np. jedna kopia zbioru $\mathbb{Z}$: tu porządek $<$ jest interpretowany w sposób naturalny w kopii $\mathbb{Q}$ oraz w kopii $\mathbb{Z}$, i wszystkie elementy kopii $\mathbb{Q}$ poprzedzają wszystkie elementy kopii $\mathbb{Z}$. Przykład ten pokazuje, że sama jedynie własność przeliczalnej uniwersalności nie jest szczególnie interesującym wyróżnikiem „dużych" modeli przeliczalnych. Jak się wkrótce okaże, połączenie $\aleph_0$-jednorodności z przeliczalną uniwersalnością już takim wyróżnikiem jest: dokładnie takie są modele $\aleph_0$-nasycone teorii.

Nasycenie

Dla dowolnej teorii zupełnej T mówimy, że struktura $\mathfrak{A}$ jest ***słabo nasycona***, jeśli każdy typ w T jest realizowany w $\mathfrak{A}$.

Mówimy, że struktura $\mathfrak{A}$ jest $\aleph_0$-***nasycona***, gdy dla dowolnego skończonego ciągu $\overrightarrow{a}$ elementów $\mathfrak{A}$ struktura $(\mathfrak{A}, \overrightarrow{a})$ jest słabo nasyconym modelem teorii $Th((\mathfrak{A}, \overrightarrow{a}))$.

Tak więc, słabe nasycenie oznacza, że model realizuje dowolny typ, który może być niesprzecznie opisany w samym języku. Natomiast $\aleph_0$-nasycenie jest własnością mocniejszą: oznacza, iż model realizuje dowolne typy, które mogą być niesprzecznie opisane w języku ze skończenie wielu parametrami, nazywającymi elementy modelu.

Kilka oznaczeń

- Ψ jest (zupełnym) ***n-typem w** $\mathfrak{A}$*, gdy ψ jest (zupełnym) n-typem teorii $Th(\mathfrak{A})$. $S^n(\mathfrak{A})$ oznacza $S^n(Th(\mathfrak{A}))$, czyli zbiór wszystkich n-typów zupełnych struktury $\mathfrak{A}$. $s^n(\mathfrak{A})$ oznacza moc zbioru $S^n(\mathfrak{A})$.
- $\mathfrak{A}$ jest ***$\aleph_0$-kategoryczna***, gdy $Th(\mathfrak{A})$ jest $\aleph_0$-kategoryczna.
- Jeśli $A \subseteq dom(\mathfrak{A})$, to ***typem nad zbiorem** A* jest typ, w którego formułach wystąpić mogą stałe, nazywające elementy zbioru A.
- Jeśli $A \subseteq dom(\mathfrak{A})$ oraz $(a_1, \ldots, a_n)$ jest ciągiem elementów z $dom(\mathfrak{A})$, to przez ***typ (zupełny) ciągu** $(a_1, \ldots, a_n)$ **nad** A **w** $\mathfrak{A}$* rozumiemy zbiór $Tp^A_{\mathfrak{A}}((a_1, \ldots, a_n))$ wszystkich formuł ψ z języka L_A (czyli języka L rozszerzonego o nowe stałe nazywające elementy A), które mają zmienne wolne wśród $x_1, \ldots, x_n$ takich, że: $\mathfrak{A} \models \psi(x_1, \ldots, x_n)[a_1, \ldots, a_n]$. Niech $S_A(T)$ oznacza zbiór wszystkich typów zupełnych nad A, natomiast $S^n_A(T)$ zbiór wszystkich n-typów zupełnych nad A.

Nasycenie: przykłady

- Każdy przeliczalny (nieskończony) model teorii identyczności jest $\aleph_0$-nasycony.
- Liczby wymierne (z naturalnym porządkiem) tworzą model $\aleph_0$-nasycony.
- Każdy model skończony jest $\aleph_0$-nasycony.
- Model teorii T^* opisanej powyżej, który w każdej klasie E-równoważności ma przeliczalnie wiele kopii zbioru $\mathbb{Z}$ jest jedynym modelem $\aleph_0$-nasyconym tej teorii.
- Model teorii jednej relacji równoważności, która ma klasę n-elementową dla każdej $n \in \omega$ (i żadnych innych klas równoważności) nie jest $\aleph_0$-nasycony. Jedynym modelem $\aleph_0$-nasyconym tej teorii jest model, który ma przeliczalnie wiele przeliczalnych klas E-równoważności.

Nasycenie

Wprost z definicji (oraz z Twierdzenia Rylla-Nardzewskiego) wynikają następujące fakty, dla dowolnej struktury $\mathfrak{A}$ oraz ciągu $\overrightarrow{a} = (a_1, \ldots, a_m)$ elementów z $dom(\mathfrak{A})$:

- Dla każdej $n > 0$ istnieje injekcja z $S^n((\mathfrak{A}, \overrightarrow{a}))$ w $S^{m+n}(\mathfrak{A})$ przekształcająca typ Ψ w typ:

$$\Psi^* = \{\psi(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) : \psi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{y}) \in \Psi\}.$$

  Tak więc, $\overline{\overline{S^n(\mathfrak{A})}} \leqslant \overline{\overline{S^n((\mathfrak{A}, \overrightarrow{a}))}} \leqslant \overline{\overline{S^{m+n}(\mathfrak{A})}}$.
- $\mathfrak{A}$ jest $\aleph_0$-nasycona dokładnie wtedy, gdy $(\mathfrak{A}, \overrightarrow{a})$ jest $\aleph_0$-nasycona.
- $\mathfrak{A}$ jest $\aleph_0$-kategoryczna dokładnie wtedy, gdy $(\mathfrak{A}, \overrightarrow{a})$ jest $\aleph_0$-kategoryczna.

Kilka twierdzeń

- *Teoria zupełna T ma przeliczalny model $\aleph_0$-nasycony dokładnie wtedy, gdy zbiór $S(T)$ jest przeliczalny.*

Szkic dowodu. Przypuśćmy, że T ma przeliczalny model $\mathfrak{A}$, który jest $\aleph_0$-nasycony. Wtedy każdy typ w $S(T)$ jest realizowany przez jakiś ciąg elementów z $dom(\mathfrak{A})$. Ponieważ $\mathfrak{A}$ jest przeliczalny, więc $S(T)$ także musi być przeliczalny.

Z kolei, przypuśćmy, że zbiór $S(T)$ jest przeliczalny. Niech $\mathfrak{A}_1$ będzie przeliczalnym modelem T (który istnieje na mocy Dolnego Twierdzenia Löwenheima-Skolema). Zbudujemy elementarny ciąg modeli $\mathfrak{A}_1 \prec \mathfrak{A}_2 \prec \mathfrak{A}_3 \prec \ldots$, którego suma będzie modelem $\aleph_0$-nasyconym dla T.

Kilka twierdzeń

Przypuśćmy zatem, że model $\mathfrak{A}_n$ został już zdefiniowany. Musimy pokazać, jak od niego przejść do $\mathfrak{A}_{n+1}$. Niech A będzie skończonym podzbiorem $dom(\mathfrak{A}_n)$. Gdyby $S^1_A(T)$ był nieprzeliczalny, to nieprzeliczalny byłby też $S^k(T)$, gdzie k jest liczbą elementów zbioru A. Ponieważ jednak $S(T)$ jest przeliczalny, więc sytuacja taka jest wykluczona. Możemy zatem ustawić elementy zbioru $S^1_A(T)$ w ciąg $(\Psi_1, \Psi_2, \ldots)$ (być może skończony). Dla każdego Ψ_i w tym zbiorze istnieje elementarne rozszerzenie modelu $\mathfrak{A}_n$, które realizuje Ψ_i.

Na mocy Dolnego Twierdzenia Löwenheima-Skolema, istnieje *przeliczalne* elementarne rozszerzenie $\mathfrak{B}_i$ modelu $\mathfrak{A}_n$, w które realizuje Ψ_i. Na mocy Lematu o Wspólnym Włożeniu, istnieje przeliczalny model $\mathfrak{A}_A$ taki, że $\mathfrak{A}_n$ oraz każdy z modeli $\mathfrak{B}_i$ może zostać elementarnie włożony w $\mathfrak{A}_A$. Ponieważ $\mathfrak{A}_n$ jest przeliczalny, więc istnieje jedynie przeliczalnie wiele skończonych podzbiorów A uniwersum modelu $\mathfrak{A}_n$.

Kilka twierdzeń

Na mocy Lematu o Wspólnym Włożeniu, istnieje przeliczalny model $\mathfrak{A}_{n+1}$ dla T taki, że dla każdego skończonego podzbioru A uniwersum modelu $\mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{A}_A$ może zostać elementarnie włożony w $\mathfrak{A}_{n+1}$.

Tak więc, skonstruowany łańcuch $(\mathfrak{A}_n)_{n\in\omega}$ jest elementarny. A zatem jego suma $\mathfrak{A}$ jest przeliczalnym modelem T. Każdy skończony podzbiór A uniwersum modelu $\mathfrak{A}$ jest zawarty w uniwersum któregoś modelu $\mathfrak{A}_n$, dla $n \in \omega$.

Na mocy definicji modelu $\mathfrak{A}_{n+1}$, każdy typ w $S^1_A(T)$ jest realizowany w $\mathfrak{A}_{n+1}$. Ponieważ $\mathfrak{A}_{n+1} \prec \mathfrak{A}$, więc każdy typ w $S^1_A(T)$ jest realizowany w $\mathfrak{A}$. Oznacza to, że $\mathfrak{A}$ jest $\aleph_0$-nasycony.

Kilka twierdzeń

- *Każdy przeliczalny model $\aleph_0$-nasycony (teorii zupełnej) jest $\aleph_0$-jednorodny.*

Szkic dowodu. Niech:

- $\mathfrak{A}$ będzie przeliczalnym modelem $\aleph_0$-nasyconym teorii zupełnej T,
- $\overrightarrow{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ oraz $\overrightarrow{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ będą dwoma ciągami elementów $dom(\mathfrak{A})$, które realizują ten sam typ w $S^n(T)$,
- c będzie elementem $dom(\mathfrak{A})$,
- $\Psi^1_{x_1} = Tp^{\{c\}}_{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)$,
- $\Psi^2_{x_1}$ będzie typem nad $\overrightarrow{b}$ otrzymanym przez zastąpienie każdego wystąpienia $\overline{a}_i$ (nazwy elementu a_i) w $\Psi^1_{x_1}$ przez $\overline{b}_i$ (nazwę elementu b_i), dla $i = 1, \ldots, n$.

Kilka twierdzeń

Wtedy $\Psi^2_{x_1}$ jest realizowalny, ponieważ każdy jego skończony podzbiór jest realizowalny. Niech bowiem $\Phi(x_1, \overrightarrow{b})$ będzie koniunkcją skończonego podzbioru zbioru $\Psi^2_{x_1}$. Wtedy $\Phi(x_1, \overrightarrow{a})$ należy do $Tp^{\{c\}}_{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)$, co oznacza, że $\mathfrak{A} \models \Phi[c, \overrightarrow{a}]$. Tak więc, $\mathfrak{A} \models \exists y\, \Phi(y, \overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n)$. Ponieważ $\overrightarrow{a}$ oraz $\overrightarrow{b}$ mają ten sam typ w $\mathfrak{A}$, więc $\mathfrak{A} \models \exists y\, \Phi(y, \overline{b}_1, \ldots, \overline{b}_n)$. A zatem, każdy skończony podzbiór zbioru $\Psi^2_{x_1}$ jest realizowalny.

Ponieważ $\mathfrak{A}$ jest $\aleph_0$-nasycony, więc $\Psi^2_{x_1}$ jest realizowany w $\mathfrak{A}$. Niech d będzie elementem $dom(\mathfrak{A})$, który realizuje w $\mathfrak{A}$ ten typ. Wtedy $Tp_{\mathfrak{A}}(\overrightarrow{a}, c) = Tp_{\mathfrak{A}}(\overrightarrow{b}, d)$, a to oznacza, że model $\mathfrak{A}$ jest $\aleph_0$-jednorodny.

Kilka twierdzeń

- A. *Każdy przeliczalny model $\aleph_0$-nasycony (teorii zupełnej) jest przeliczalnie uniwersalny.*
- B. *Jeśli T jest małą teorią (czyli $S(T)$ jest przeliczalny), to jej model $\mathfrak{A}$ jest $\aleph_0$-nasycony dokładnie wtedy, gdy jest przeliczalnie uniwersalny oraz $\aleph_0$-jednorodny.*

- Dowód A. otrzymujemy z twierdzeń udowodnionych poprzednio.
- Dla dowodu B. zauważmy, że implikacja w jedną stronę została już wyżej udowodniona.
- Załóżmy zatem, że $\mathfrak{A}$ jest przeliczalnym modelem T, który jest przeliczalnie uniwersalny oraz $\aleph_0$-jednorodny. Niech A będzie skończonym podzbiorem $dom(\mathfrak{A})$, a Ψ niech będzie typem w $S_A^1(T)$. Trzeba pokazać, że istnieje element $d \in dom(\mathfrak{A})$ taki, że $\Psi = Tp_{\mathfrak{A}}^A(d)$.

Kilka twierdzeń

Typ Ψ jest realizowany w jakimś elementarnym rozszerzeniu modelu $\mathfrak{A}$. Na mocy Dolnego Twierdzenia Löwenheima-Skolema, Ψ jest realizowany w przeliczalnym modelu $\mathfrak{B}$, którego uniwersum zawiera zbiór A. A zatem $\Psi = Tp^{A}_{\mathfrak{B}}(c)$ dla pewnego $c \in dom(\mathfrak{B})$. Ponieważ $\mathfrak{A}$ jest przeliczalnie uniwersalny, więc $\mathfrak{B}$ można elementarnie włożyć w $\mathfrak{A}$. Niech $f : \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A}$ będzie takim elementarnym włożeniem oraz niech $B = \{f(a) : a \in A\}$. Zauważmy, że jeśli $\overrightarrow{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ jest jakimś wyliczeniem elementów zbioru A, oraz $\overrightarrow{b} = (f(a_1), \ldots, f(a_k))$, to $Tp_{\mathfrak{A}}(\overrightarrow{a}) = Tp_{\mathfrak{A}}(\overrightarrow{b})$. Ponieważ $\mathfrak{A}$ jest $\aleph_0$-jednorodny, więc istnieje $d \in dom(\mathfrak{A})$ taki, że $Tp_{\mathfrak{A}}(d, \overrightarrow{a}) = Tp_{\mathfrak{A}}(f(c), \overrightarrow{b})$. Dla wszystkich formuł $\psi(x_1)$ z Ψ, skoro $\mathfrak{B} \models \psi[c]$ oraz f jest włożeniem elementarnym, to mamy $\mathfrak{A} \models \psi[d]$. Tak więc, $\Psi = Tp^{A}_{\mathfrak{A}}(d)$, czyli Ψ jest realizowany w $\mathfrak{A}$. Oznacza to, że $\mathfrak{A}$ jest $\aleph_0$-nasycony.

Modele atomowe: istnienie

Dla dowolnej teorii zupełnej T, każdy z poniższych warunków jest wystarczający, aby T miała (jednoznacznie wyznaczony, z dokładnością do izomorfizmu) model atomowy:

- Dla każdej $n > 0$, zbiór $S^n(T)$ jest przeliczalny.
- Dla każdej $n > 0$, moc zbioru $S^n(T)$ jest mniejsza od $2^{\aleph_0}$.
- Liczba nieizomorficznych przeliczalnych modeli teorii T jest mniejsza od $2^{\aleph_0}$.

- Dla dowolnej teorii zupełnej T, T ma przeliczalny model atomowy wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $n > 0$, $\mathcal{L}^n_T$ jest atomową algebrą Boole'a.

Modele atomowe: jednoznaczność

Z Twierdzenia Rylla-Nardzewskiego otrzymujemy, iż jeśli dla każdego $n > 0$, zbiór $S^n(T)$ jest skończony, to T ma przeliczalny model atomowy.

Przeliczalne modele atomowe są wyznaczone jednoznacznie, z dokładnością do izomorfizmu. Jeśli bowiem $\mathfrak{A}$ oraz $\mathfrak{B}$ są przeliczalnymi modelami atomowymi teorii zupełnej T, to oba są $\aleph_0$-jednorodne. Ponieważ oba te modele realizują jedynie typy izolowane w $S(T)$, więc są one izomorficzne.

Model $\mathfrak{A}$ teorii T nazywamy jej modelem (elementarnie) ***pierwszym***, jeśli istnieją elementarne włożenia $\mathfrak{A}$ w dowolny model teorii T.

Modele atomowe a model pierwszy

- *Dla dowolnej teorii zupełnej T oraz dowolnego $\mathfrak{A}$: $\mathfrak{A}$ jest przeliczalnym modelem atomowym dla T wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{A}$ jest modelem elementarnie pierwszym teorii T.*

Szkic dowodu. Przypuśćmy, że $\mathfrak{A}$ jest modelem elementarnie pierwszym teorii T. Na mocy Dolnego Twierdzenia Löwenheima-Skolema, istnieje przeliczalny model dla T. Ponieważ $\mathfrak{A}$ można elementarnie włożyć w ten model przeliczalny, więc $\mathfrak{A}$ musi być przeliczalny.
Niech teraz $\Psi \in S(T)$ będzie typem nieizolowanym. Na mocy Twierdzenia o Omijaniu Typów, istnieje model $\mathfrak{B}$ dla T, który omija Ψ. Ponieważ $\mathfrak{A}$ można elementarnie włożyć w $\mathfrak{B}$, więc również $\mathfrak{A}$ musi omijać Ψ. Tak więc, $\mathfrak{A}$ realizuje jedynie typy główne, czyli jest atomowy.

Modele atomowe a model pierwszy

Przypuśćmy z kolei, że $\mathfrak{A}$ jest przeliczalny i atomowy. Wtedy $\mathfrak{A}$ można elementarnie włożyć w dowolny model $\aleph_0$-jednorodny dla T. Pokażemy teraz, że $\mathfrak{A}$ można elementarnie włożyć w dowolny model dla T.
Ponieważ $\mathfrak{A}$ jest przeliczalny, więc mamy wyliczenie $\{a_1, a_2, \ldots\}$ elementów jego uniwersum. Dla każdej n, niech $\overrightarrow{a_n}$ oznacza ciąg $(a_1, \ldots, a_n)$. Niech $\mathfrak{B}$ będzie dowolnym modelem dla T oraz niech b_1 będzie dowolnym elementem z $dom(\mathfrak{B})$, który realizuje typ izolowany $Tp_{\mathfrak{A}}(a_1)$.
Przypuśćmy, że dla pewnej n zdefiniowaliśmy już ciąg $\overrightarrow{b_n} = (b_1, \ldots, b_n)$ tak, iż $Tp_{\mathfrak{A}}(\overrightarrow{a_n}) = Tp_{\mathfrak{B}}(\overrightarrow{b_n})$. Niech $\psi(x_1, \ldots, x_{n+1})$ będzie generatorem $Tp_{\mathfrak{A}}(\overrightarrow{a_n}, a_{n+1})$. Ponieważ $\overrightarrow{b_n}$ ma taki sam typ jak $\overrightarrow{a_n}$, więc $\mathfrak{B} \models \exists y\ \psi(x_1, \ldots, x_n, y)[\overrightarrow{b_n}]$. Tak więc, $\mathfrak{B} \models \psi[\overrightarrow{b_n}, b_{n+1}]$ dla pewnego $b_{n+1} \in dom(\mathfrak{B})$. A ponieważ jest tylko jeden typ w $S^{n+1}(T)$ zawierający ψ, więc $Tp_{\mathfrak{B}}(b_1, \ldots, b_{n+1}) = Tp_{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_{n+1})$. Budujemy w ten sposób ciąg $(b_1, b_2, \ldots)$ elementów $dom(\mathfrak{B})$. Funkcja f zdefiniowana warunkiem $f(a_i) = b_i$ dla wszystkich $i \in \omega$ jest elementarnym włożeniem $\mathfrak{A}$ w $\mathfrak{B}$. Ponieważ $\mathfrak{B}$ był całkiem dowolny, więc $\mathfrak{A}$ jest modelem elementarnie pierwszym.

Modele nasycone: istnienie

Powyżej pokazano już, że małe teorie mają modele $\aleph_0$-nasycone. Rozważmy problem ich istnienia nieco bardziej szczegółowo, tj. zastanówmy się, jakie istnieją rodzaje modeli $\aleph_0$-nasyconych (niekoniecznie przeliczalnych).

Dla dowolnych struktur $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ takich, że $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ mówimy, że $\mathfrak{B}$ jest ***$\aleph_0$-nasycona nad $\mathfrak{A}$***, gdy dla wszystkich ciągów $\overrightarrow{a}$ elementów $dom(\mathfrak{A})$, każdy typ w $(\mathfrak{A}, \overrightarrow{a})$ jest realizowany w $(\mathfrak{B}, \overrightarrow{a})$.

Podamy dla przykładu trzy twierdzenia dotyczące istnienia różnych rodzajów modeli $\aleph_0$-nasyconych.

Modele nasycone: istnienie

Twierdzenie A. *Dla dowolnej teorii zupełnej T i dowolnego jej modelu $\mathfrak{A}$ istnieje model $\mathfrak{B}$ dla T taki, że:*

- $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$.
- *$\mathfrak{B}$ jest $\aleph_0$-nasycony nad $\mathfrak{A}$.*
- *Jeśli moc $\mathfrak{A}$ jest niewiększa od $2^{\aleph_0}$, to także moc $\mathfrak{B}$ jest niewiększa od $2^{\aleph_0}$.*
- *Jeśli $\mathfrak{A}$ jest przeliczalny oraz $S^n(T)$ jest przeliczalny dla wszystkich $n > 0$, to $\mathfrak{B}$ jest przeliczalny.*

Szkic dowodu. Dla modelu $\mathfrak{A}$ teorii T, każdej $n > 0$, ciągu $\overrightarrow{a}$ elementów $dom(\mathfrak{A})$ oraz każdego zupełnego n-typu Ψ struktury $(\mathfrak{A}, \overrightarrow{a})$ niech $\overrightarrow{c}_\Psi = (c_{0,\Psi}, \ldots, c_{n-1,\Psi})$ będzie ciągiem nowych stałych i niech $\Psi(\overrightarrow{c}_\Psi)$ oznacza zbiór $\{\psi(\overrightarrow{c}_\Psi) : \psi \in \Psi\}$.

Modele nasycone: istnienie

Niech Γ będzie sumą $Th(\mathfrak{A}_{dom(\mathfrak{A})})$ oraz wszystkich zbiorów $\Psi(\overrightarrow{c}_{\Psi})$. Przypominamy, że $\mathfrak{A}_X$ jest rozszerzeniem struktury $\mathfrak{A}$ do struktury, w której każdy element x zbioru $X \subseteq dom(\mathfrak{A})$ ma nazwę interpretowaną jako ten właśnie element. W szczególności, $\mathfrak{A}_{dom(\mathfrak{A})}$ jest strukturą, w której każdy element uniwersum $\mathfrak{A}$ ma nazwę, interpretowaną jako ten właśnie element.

Wykorzystując Twierdzenie o Zwartości nietrudno udowodnić, że zbiór Γ jest niesprzeczny. Istnieje zatem struktura $\mathfrak{B}^*$ taka, że $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}^* \upharpoonright L$ i ponadto $\mathfrak{B}^* \models \Psi(\overrightarrow{c}_{\Psi})$ dla każdego $\Psi(\overrightarrow{c}_{\Psi})$.

Wtedy $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}^* \upharpoonright L$ (czyli redukt $\mathfrak{B}^* \upharpoonright L$ do języka L teorii T) jest $\aleph_0$-nasycona nad $\mathfrak{A}$ (i oczywiście jest modelem dla T).

Modele nasycone: istnienie

Rozważany język L jest przeliczalny, a więc przeliczalny jest także język struktury $(\mathfrak{A}, \overrightarrow{a})$ (gdzie $\overrightarrow{a}$ jest skończonym ciągiem elementów uniwersum $\mathfrak{A}$). W konsekwencji, $S^n(T)$ ma najwyżej $2^{\aleph_0}$ typów. Jeśli $\mathfrak{A}$ ma moc co najwyżej $2^{\aleph_0}$, to tyle jest też skończonych ciągów elementów jej uniwersum. A zatem istnieje co najwyżej $2^{\aleph_0} \times 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$ typów zupełnych Ψ, a ponieważ dodawaliśmy jedynie skończenie wiele stałych do każdego Ψ, więc język dla Γ ma moc co najwyżej $2^{\aleph_0}$ (biorąc pod uwagę także nazwy dla wszystkich elementów uniwersum modelu $\mathfrak{A}$). Na mocy Twierdzenia Löwenheima-Skolema możemy wybrać $\mathfrak{B}$ tak, aby miała ona moc co najwyżej $2^{\aleph_0}$.

Jeśli $\mathfrak{A}$ jest przeliczalny oraz $S^n(T)$ jest przeliczalny dla wszystkich $n > 0$, to każdy model $(\mathfrak{A}, \overrightarrow{a})$ ma co najwyżej przeliczalnie wiele typów. Ciągów skończonych $\overrightarrow{a}$ także jest wtedy co najwyżej przeliczalnie wiele. A zatem istnieje przeliczalnie wiele typów Ψ i język dla Γ jest przeliczalny. Tak więc, możemy w tym przypadku tak wybrać $\mathfrak{B}$, aby była ona przeliczalna.

Modele nasycone: istnienie

Twierdzenie B. *Dla dowolnej teorii zupełnej T:*

- *T ma model $\aleph_0$-nasycony mocy co najwyżej $2^{\aleph_0}$.*
- *T ma przeliczalny model $\aleph_0$-nasycony wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $n > 0$ zbiór $S^n(T)$ jest przeliczalny.*

Szkic dowodu. Niech $\mathfrak{A}_0$ będzie przeliczalnym modelem dla T. Stosujemy teraz wielokrotnie konstrukcję z poprzedniego twierdzenia i otrzymujemy ciąg elementarny $(\mathfrak{A}_n)_{n\in\omega}$ modeli dla T taki, że dla każdej n, struktura $\mathfrak{A}_{n+1}$ jest $\aleph_0$-nasycona nad $\mathfrak{A}_n$. Niech $\mathfrak{A}$ będzie sumą tego łańcucha. Wtedy oczywiście $\mathfrak{A}$ jest także modelem dla T.

Modele nasycone: istnienie

Dla dowolnego ciągu $\overrightarrow{a}$ elementów $dom(\mathfrak{A})$ i dowolnego typu Ψ struktury $(\mathfrak{A}, \overrightarrow{a})$ istnieje n taka, że $\overrightarrow{a}$ jest ciągiem elementów z $dom(\mathfrak{A}_n)$. Ponieważ $\mathfrak{A}_n \prec \mathfrak{A}$, więc $Th((\mathfrak{A}_n, \overrightarrow{a})) = Th((\mathfrak{A}, \overrightarrow{a}))$, czyli Ψ jest również typem struktury $(\mathfrak{A}_n, \overrightarrow{a})$. W konsekwencji jest on realizowany w strukturze $\mathfrak{A}_{n+1}$. Ponieważ $\mathfrak{A}_{n+1} \prec \mathfrak{A}$, więc Ψ jest realizowany także w $(\mathfrak{A}, \overrightarrow{a})$.

Możemy wybrać $\mathfrak{A}_n$ mocy co najwyżej $2^{\aleph_0}$, a zatem również $\mathfrak{A}$ ma moc co najwyżej $2^{\aleph_0}$. Jeśli natomiast dla wszystkich $n > 0$ zbiór $S^n(T)$ jest przeliczalny, to na mocy poprzedniego twierdzenia każdą $\mathfrak{A}_n$ możemy wybrać przeliczalną, a zatem w tym przypadku również $\mathfrak{A}$ jest przeliczalna. Załóżmy teraz, że T ma przeliczalny model $\aleph_0$-nasycony $\mathfrak{B}$. Wtedy $\mathfrak{B}$ realizuje wszystkie typy w każdym ze zbiorów $S^n(T)$. Ponieważ struktura przeliczalna może realizować co najwyżej przeliczalnie wiele typów, więc każdy zbiór $S^n(T)$ musi być przeliczalny.

Modele nasycone: istnienie

Twierdzenie C. *Dla dowolnej teorii zupełnej T, warunkiem wystarczającym na istnienie jej przeliczalnego modelu $\aleph_0$-nasyconego jest każdy z następujących warunków:*

- *Dla wszystkich $n > 0$, $S^n(T)$ jest przeliczalny.*
- *Dla wszystkich $n > 0$, $s^n(T) < 2^{\aleph_0}$.*

Szkic dowodu. Wynika z twierdzeń udowodnionych powyżej oraz z Twierdzenia Rylla-Nardzewskiego.

Modele nasycone

- *Teoria jest $\aleph_0$-kategoryczna dokładnie wtedy, gdy ma model atomowy i model $\aleph_0$-nasycony i modele te są izomorficzne.*

Szkic dowodu. Załóżmy, że T jest $\aleph_0$-kategoryczna. Ponieważ teorie $\aleph_0$-kategoryczne są małe, więc T ma przeliczalny model atomowy i przeliczalny model $\aleph_0$-nasycony. Na mocy $\aleph_0$-kategoryczności T, modele te są izomorficzne.

Przypuśćmy teraz, że T ma przeliczalny model atomowy $\mathfrak{A}$ oraz izomorficzny z nim przeliczalny model $\aleph_0$-nasycony $\mathfrak{B}$. Ponieważ $\mathfrak{B}$ jest przeliczalnie uniwersalny, więc każdy model przeliczalny dla T może zostać elementarnie włożony w $\mathfrak{B}$. W konsekwencji, każdy model przeliczalny dla T może zostać elementarnie włożony w model atomowy $\mathfrak{A}$. A zatem, każdy model przeliczalny dla T realizuje wyłącznie typy izolowane. Oznacza to, że każdy typ w $S(T)$ jest izolowany, a więc T jest $\aleph_0$-kategoryczna na mocy Twierdzenia Rylla-Nardzewskiego.

Modele nasycone: jednoznaczność

Podobnie jak w przypadku modeli atomowych, można pokazać jednoznaczność modeli nasyconych.

- Dla dowolnej teorii zupełnej T i dowolnych jej modeli $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$, jeśli są one oba $\aleph_0$-nasycone, to są częściowo izomorficzne. Stąd, jeśli oba są przeliczalne, to są również izomorficzne.

Inaczej jeszcze: jeśli T jest małą teorią zupełną, to dowolne jej dwa przeliczalne modele $\aleph_0$-nasycone są izomorficzne. Wynika to bezpośrednio z tego, że:

- przeliczalne modele $\aleph_0$-nasycone są $\aleph_0$-jednorodne;
- przeliczalne modele $\aleph_0$-jednorodne realizujące dokładnie te same typy są izomorficzne.

Modele nieprzeliczalne

Podamy teraz zwięzłe informacje o modelach atomowych i κ-nasyconych w przypadku nieprzeliczalnych liczb kardynalnych κ. Brane przy tym pod uwagę teorie będą przeliczalne. Nie przedstawimy żadnego systematycznego wykładu teorii modeli nieprzeliczalnych. Podamy jedynie przykłady twierdzeń mówiących o istnieniu modeli „małych" („ubogich") oraz „dużych" („bogatych"), gdy rozważane struktury są nieprzeliczalne.

Rozważanie dowolnych mocy nieskończonych pozwala ujrzeć wyniki dla mocy przeliczalnej jako szczególne przypadki ogólniejszych zależności. Nie wszystkie twierdzenia prawdziwe dla przypadku przeliczalnego przenoszą się jednak automatycznie na przypadek dowolnych mocy nieskończonych.

Modele nieprzeliczalne

Podane niżej informacje (za monografią Hinman 2005) mają stanowić przygotowanie do przedstawienia Twierdzenia Morleya oraz jego dowodu. Nie ukazują one w żaden reprezentatywny sposób problematyki dotyczącej modeli nieprzeliczalnych w ogólności, a różnych modeli κ-nasyconych w szczególności. W tej sprawie czytelnik zechce konsultować np. monografię Chang, Keisler 1973. Oprócz obszernego wykładu modeli κ-nasyconych dla nieprzeliczalnych liczb kardynalnych κ znajdujemy tam m.in. informacje dotyczące κ-nasyconych ultraproduktów modeli, uogólnień pojęć uniwersalności i jednorodności, tzw. modeli specjalnych, szeregu zastosowań podanych konstrukcji (w teorii ciał, teorii algebr Boole'a i in.).

Ponieważ niniejszy wykład ma bardzo skromny, elementarny charakter, zagadnienia te nie zostaną tu omówione. Dodajmy jeszcze, że te działy teorii modeli związane są w istotny sposób z modelami teorii mnogości, a w szczególności z dużymi liczbami kardynalnymi.

Modele nasycone

Dla dowolnej liczby kardynalnej κ oraz dowolnej struktury $\mathfrak{A}$, mówimy, że $\mathfrak{A}$ jest ***κ-nasycona***, gdy dla dowolnego zbioru $X \subseteq dom(\mathfrak{A})$ o mocy mniejszej od κ struktura $\mathfrak{A}_X$ jest słabo nasycona. Mówimy, że $\mathfrak{A}$ jest ***nasycona***, gdy $\mathfrak{A}$ jest $\overline{\overline{\mathfrak{A}}}$-nasycona. Przypominamy, że $\mathfrak{A}_X$ jest strukturą, interpretującą język $L_{\{\overline{a}:a\in X\}}$, gdzie dla każdego $a \in X$, nazwa $\overline{a}$ tego elementu jest interpretowana w $\mathfrak{A}_X$ jako ten właśnie element. Struktury κ-nasycone są ograniczone z dołu co do swojej mocy:

- *Dla dowolnej liczby kardynalnej κ oraz dowolnej struktury $\mathfrak{A}$, jeśli $\mathfrak{A}$ jest κ-nasycona, to ma moc niemniejszą od κ.*

Tak więc, np. struktura $\aleph_1$-nasycona nie może być przeliczalna. Jeśli bowiem $\mathfrak{A}$ jest $\aleph_1$-nasycona, to $\mathfrak{A}$ realizuje wszystkie typy w każdym rozszerzeniu $\mathfrak{A}_X$, gdzie X jest przeliczalnym podzbiorem $dom(\mathfrak{A})$. Gdyby więc $\mathfrak{A}$ była przeliczalna, to musiałaby realizować także 1-typ $\{\neg x \doteq a : a \in dom(\mathfrak{A})\}$, a to jest oczywiście niemożliwe.

Modele nasycone

Jak zobaczymy, dla dowolnej przeliczalnej teorii T oraz każdej nieskończonej liczby kardynalnej κ można otrzymać κ^+-nasycony model dla T mocy co najwyżej 2^κ.

Dla dowolnej teorii T oraz dowolnej liczby kardynalnej κ mówimy, że T jest ***κ-stabilna***, gdy dla każdego modelu $\mathfrak{A}$ dla T, wszystkich $X \subseteq dom(\mathfrak{A})$ takich, że moc X jest niewiększa od κ oraz wszystkich $n > 0$ zbiór $S^n(\mathfrak{A}_X)$ jest mocy co najwyżej κ. Zwykle zamiast mówić, że T jest $\aleph_0$-stabilna mówimy, iż T jest ω-stabilna.
Teorie κ-stabilne są istotnie ograniczone, jeśli chodzi o liczbę realizowanych typów. Dla dowolnej teorii T oraz dowolnej nieskończonej liczby kardynalnej κ, mówimy, że rozszerzenie T^+ teorii T do języka z dokładnie κ nowymi stałymi indywidualnymi jest ***κ-nieistotne***. Rozszerzenie T^+ jest ***nieistotne***, gdy jest κ-nieistotne dla pewnego κ.

Modele nasycone

- *Dla dowolnej liczby kardynalnej κ oraz dowolnej teorii T, T jest κ-stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej $n > 0$ oraz każdego zupełnego κ-nieistotnego rozszerzenia T^+ teorii T, zbiór $S^n(T^+)$ ma najwyżej κ elementów.*

Zauważmy, że dowolne zupełne κ-nieistotne rozszerzenie teorii T jest w istocie postaci $Th(\mathfrak{A}_X)$, dla pewnego modelu $\mathfrak{A}$ oraz pewnego zbioru $X \subseteq dom(\mathfrak{A})$ mocy κ.

Dla dowolnych struktur $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ takich, że $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}$ oraz dowolnej liczby kardynalnej κ, mówimy, że $\mathfrak{B}$ jest ***κ-nasycona nad $\mathfrak{A}$***, gdy dla każdego zbioru $X \subseteq dom(\mathfrak{A})$ o mocy mniejszej od κ każdy typ struktury $\mathfrak{A}_X$ jest realizowany w $\mathfrak{B}$.

Modele nasycone

- (∗) *Dla dowolnej przeliczalnej teorii T, dowolnej nieskończonej liczby kardynalnej κ oraz dowolnego modelu $\mathfrak{A}$ dla T istnieje model $\mathfrak{B}$ dla T taki, że:*
  1. $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$;
  2. $\mathfrak{B}$ *jest* κ^+*-nasycony nad* $\mathfrak{B}$;
  3. *jeśli* $\overline{\overline{\mathfrak{A}}} \leqslant 2^\kappa$, *to* $\overline{\overline{\mathfrak{B}}} \leqslant 2^\kappa$;
  4. *jeśli* $\overline{\overline{\mathfrak{A}}} \leqslant \kappa$ *i* T *jest* κ*-stabilna, to* $\overline{\overline{\mathfrak{B}}} \leqslant \kappa$

Szkic dowodu. Przypominamy, że κ^+ jest liczbą kardynalną bezpośrednio większą od κ.

Dla ustalonego modelu $\mathfrak{A}$ oraz każdego zbioru $X \subseteq dom(\mathfrak{A})$ mocy co najwyżej κ, każdej $n > 0$ i każdego zupełnego n-typu Ψ struktury $\mathfrak{A}_X$ niech $\overrightarrow{c}_\Psi = (c_{0,\Psi}, \ldots, c_{n-1,\Psi})$ będą nowymi stałymi. Przez $\Psi(\overrightarrow{c}_\Psi)$ oznaczymy zbiór wszystkich formuł $\psi(\overrightarrow{c}_\Psi)$ dla $\psi \in \Psi$.

Modele nasycone

Niech Γ będzie sumą $Th(\mathfrak{A}_{dom(\mathfrak{A})})$ oraz wszystkich takich zbiorów $\Psi(\overrightarrow{c}_\Psi)$. Łatwo można dowieść, że każdy skończony podzbiór zbioru Γ jest niesprzeczny, a zatem, na mocy twierdzenia o zwartości również cały zbiór Γ jest niesprzeczny. Istnieje więc struktura $\mathfrak{B}^+$ taka, że $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}^+ \upharpoonright L$ jest elementarnym rozszerzeniem $\mathfrak{A}$ oraz $\mathfrak{B}^+$ jest modelem wszystkich zbiorów $\Psi(\overrightarrow{c}_\Psi)$. Wtedy $\mathfrak{B}$ jest κ^+-nasycona nad $\mathfrak{A}$.

Ponieważ dla każdego $X \subseteq dom(\mathfrak{A})$ mocy co najwyżej κ język dla $\mathfrak{A}_X$ ma moc co najwyżej κ, istnieje co najwyżej 2^κ typów struktury $\mathfrak{A}_X$. Jeśli teraz $\mathfrak{A}$ ma moc co najwyżej 2^κ, to takich podzbiorów X jest co najwyżej $(2^\kappa)^\kappa = 2^\kappa$. Razem jest więc co najwyżej $2^\kappa \times 2^\kappa = 2^\kappa$ typów zupełnych Ψ, a ponieważ dodawaliśmy jedynie skończenie wiele stałych dla każdego Ψ, więc język dla Γ ma moc co najwyżej 2^κ. Na mocy Twierdzenia Löwenheima-Skolema możemy zatem wybrać model $\mathfrak{B}$ mocy co najwyżej 2^κ.

Modele nasycone

Wreszcie, jeśli $\mathfrak{A}$ jest mocy co najwyżej κ, to wystarczy rozważać jedynie typy dla struktury $\mathfrak{A}_{dom(\mathfrak{A})}$. Ponieważ T jest κ-stabilna, takich typów jest co najwyżej κ. Gdy zatem dodamy co najwyżej κ nowych stałych, to język dla Γ będzie miał moc co najwyżej κ. Wtedy na mocy Dolnego Twierdzenia Löwenheima-Skolema możemy wybrać model $\mathfrak{B}$ mocy co najwyżej κ.

- *Dla dowolnej przeliczalnej teorii zupełnej T oraz dowolnej nieskończonej liczby kardynalnej κ:*
  1. *T ma κ^+-nasycony model mocy co najwyżej 2^κ.*
  2. *Jeśli T jest κ-stabilna, to T ma model nasycony mocy κ^+.*

Modele nasycone

Szkic dowodu. Niech $\mathfrak{A}_0$ będzie dowolnym modelem dla T mocy co najwyżej κ. Iterując konstrukcję z dowodu poprzedniego twierdzenia otrzymujemy łańcuch elementarny $(\mathfrak{A}_\alpha)_{\alpha<\kappa^+}$ modeli dla T taki, że dla wszystkich $\alpha < \kappa^+$ struktura $\mathfrak{A}_{\alpha+1}$ jest κ^+-nasycona nad $\mathfrak{A}_\alpha$. Niech $\mathfrak{B}$ będzie sumą tego łańcucha. Dla dowolnego $X \subseteq \mathit{dom}(\mathfrak{B})$ mocy co najwyżej κ oraz dowolnego typu Ψ struktury $\mathfrak{B}_X$ istnieje $\alpha < \kappa^+$ taka, że $X \subseteq \mathit{dom}(\mathfrak{A}_\alpha)$. Ponieważ $\mathfrak{A}_\alpha \prec \mathfrak{B}$, więc $Th((\mathfrak{A}_\alpha)_X) = Th(\mathfrak{B}_X)$, a zatem Ψ jest typem także dla struktury $(\mathfrak{A}_\alpha)_X$, a zatem jest realizowany w $(\mathfrak{A}_{\alpha+1})_X$. Wtedy jednak, ponieważ $\mathfrak{A}_{\alpha+1} \prec \mathfrak{B}$, więc Ψ jest realizowany także w $\mathfrak{B}_X$.

Możemy wybrać każdy $\mathfrak{A}_\alpha$ mocy co najwyżej 2^κ, a zatem $\mathfrak{B}$ ma moc co najwyżej $\kappa^+ \times 2^\kappa = 2^\kappa$. Jeśli T jest κ-stabilna, to można wybrać $\mathfrak{A}_\alpha$ mocy co najwyżej κ, a zatem $\mathfrak{B}$ ma moc co najwyżej $\kappa^+ \times \kappa = \kappa^+$. Na mocy pierwszego twierdzenia z niniejszego punktu, $\mathfrak{B}$ ma moc κ^+.

Modele nasycone

- *A. Dla dowolnej przeliczalnej teorii T, jeśli T jest ω-stabilna, to: dla każdej nieskończonej liczby kardynalnej κ, teoria T jest κ-stabilna.*
- *B. Dla dowolnej przeliczalnej teorii zupełnej i ω-stabilnej T oraz dowolnej nieskończonej regularnej liczby kardynalnej κ i dowolnej liczby kardynalnej $\lambda \geqslant \kappa$, teoria T ma model κ-nasycony mocy λ.*
- *$C^\star$. Dla dowolnej przeliczalnej teorii T, jeśli T jest ω-stabilna, to dla każdej nieskończonej liczby kardynalnej κ następujące warunki są równoważne:*
  1. *T jest κ-kategoryczna.*
  2. *Każdy model teorii T mocy κ jest nasycony.*

Modele nasycone

Szkic dowodu C*. Zdefiniujemy pojęcie κ-częściowego izomorfizmu (uogólnienie pojęcia częściowego izomorfizmu, które omawialiśmy w punkcie *Częściowe izomorfizmy*) i pokażemy, że struktury κ-izomorficzne mocy co najwyżej κ są również po prostu izomorficzne. Pokażemy nadto, że dwie struktury, które są: κ-nasycone (dla dowolnej nieskończonej κ) są również κ-częściowo izomorficzne. Jeśli więc w dodatku struktury te są mocy κ, to są również izomorficzne.

Dla dowolnych $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ i dowolnej nieskończonej liczby kardynalnej κ mówimy, że rodzina E częściowych włożeń ma własność ***κ-rozszerzania w tył i w przód***, gdy ma ona własność rozszerzania w tył i w przód oraz jest domknięta na sumy podzbiorów D takich, że $\bigcup D$ ma moc mniejszą od κ oraz D jest liniowo uporządkowany przez inkluzję.

Modele nasycone

$\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ są ***κ-częściowo izomorficzne***, co zapisujemy $\mathfrak{A} \cong_{p,\kappa} \mathfrak{B}$, gdy istnieje niepusta rodzina częściowych włożeń $\mathfrak{A}$ w $\mathfrak{B}$, która ma własność κ-rozszerzania w tył i w przód.

- *Dla dowolnej nieskończonej liczby kardynalnej κ oraz dowolnych $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$, z których każda ma moc co najwyżej κ: jeśli $\mathfrak{A} \cong_{p,\kappa} \mathfrak{B}$, to $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.*

Szkic dowodu. Załóżmy, że $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ są mocy co najwyżej κ i że rodzina E ustala, iż $\mathfrak{A} \cong_{p,\kappa} \mathfrak{B}$. Wtedy elementy E mają moc mniejszą od κ i E zawiera wszystkie podfunkcje swoich elementów.

Modele nasycone

Ustawiamy uniwersa struktur $\mathfrak{A}$ oraz $\mathfrak{B}$ w ciągi:

- $dom(\mathfrak{A}) = (a_\sigma)_{\sigma<\kappa}$
- $dom(\mathfrak{B}) = (b_\sigma)_{\sigma<\kappa}$.

- Niech $f_0 \in E$ będzie pustym włożeniem częściowym. Zbudujemy wstępujący ciąg $(f_\sigma)_{\sigma<\kappa}$ elementów E, gdzie f_σ ma moc $\overline{\overline{\sigma}}$.
- Dla zbudowanego już f_σ, gdzie σ jest parzysta niech $f_{\sigma+1}$ będzie minimalnym rozszerzeniem f_σ takim, że $a_\sigma \in dom(f_\sigma)$.
- Dla zbudowanego już f_σ, gdzie σ jest nieparzysta, wybieramy $f_{\sigma+1}$ tak, aby $b_\sigma \in rng(f_\sigma)$.
- Dla granicznych σ, niech $f_\sigma = \bigcup\limits_{\tau<\sigma} f_\tau$.
- Wtedy suma $f = \bigcup\limits_{\sigma<\kappa} f_\sigma$ jest izomorfizmem struktur $\mathfrak{A}$ oraz $\mathfrak{B}$.

Modele nasycone

- *Dla dowolnej nieskończonej liczby kardynalnej κ oraz dowolnych $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$: jeśli $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ są obie κ-nasycone, to $\mathfrak{A} \cong_{p,\kappa} \mathfrak{B}$. Jeśli $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ są w dodatku mocy κ, to $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.*

Szkic dowodu. Niech E będzie rodziną częściowych włożeń elementarnych $\mathfrak{A}$ w $\mathfrak{B}$ mocy mniejszej od κ i niech $c \in dom(\mathfrak{A})$.

- Dla dowolnego $f \in E$, $Tp^{\mathfrak{A}_{dom(f)}}(c)$ jest typem dla $\mathfrak{A}_{dom(f)}$, a ponieważ $\mathfrak{A}_{dom(f)} \equiv \mathfrak{B}_{rng(f)}$, więc także typem dla $\mathfrak{B}_{rng(f)}$.
- Ponieważ ten typ ma moc mniejszą od κ więc jest realizowany w $\mathfrak{B}_{rng(f)}$ przez jakiś element $d \in dom(\mathfrak{B}_{rng(f)})$.
- Wtedy g taki, że $g(c) = d$ oraz $f \subseteq g$ należy do E. Podobnie dla własności rozszerzania w tył.

Modele nasycone

Możemy teraz wrócić do dowodu C$^\bigstar$.

Niech T będzie przeliczalną teorią zupełną ω-stabilną. Pokażemy, że T jest κ-kategoryczna dokładnie wtedy, gdy każdy jej model mocy κ jest nasycony.

Przypuśćmy, że każdy model T mocy κ jest nasycony. Wtedy, na mocy udowodnionych przed chwilą twierdzeń, każde dwa modele T mocy κ są izomorficzne.

Modele nasycone

Z drugiej strony, przypuśćmy, że T jest κ-kategoryczna. Niech $\mathfrak{A}$ będzie jej jedynym, z dokładnością do izomorfizmu, modelem mocy κ.

Jeśli κ jest liczbą regularną, to — jak udowodniliśmy — istnieje model T mocy κ, a więc $\mathfrak{A}$ jest κ-nasycony. A ponieważ każdy model T mocy κ jest izomorficzny z $\mathfrak{A}$, więc wszystkie modele T mocy κ są κ-nasycone. Przypuśćmy z kolei, że κ jest liczbą kardynalną singularną. Na mocy przed chwilą wspomnianego twierdzenia, dla każdej liczby kardynalnej $\mu < \kappa$ istnieje model dla T mocy κ, który jest μ^+-nasycony. A zatem dla każdej takiej μ, model $\mathfrak{A}$ μ^+-nasycony. To z kolei natychmiast implikuje, iż model $\mathfrak{A}$ jest κ-nasycony.

Modele atomowe

Z kolei, zapytajmy o istnienie „małych” modeli nieprzeliczalnych, czyli nieprzeliczalnych modeli atomowych. Twierdzenie o omijaniu typów, z którego korzysta się w dowodzie istnienia przeliczalnych modeli atomowych nie zachodzi dla języków nieprzeliczalnych. Można jednak udowodnić, że:

- *Dla dowolnej ω-stabilnej przeliczalnej teorii T, każde zupełne nieistotne rozszerzenie T ma model atomowy.*
- *Dla dowolnej ω-stabilnej przeliczalnej teorii T oraz dowolnego jej modelu $\mathfrak{B}$, dowolnej nieskończonej liczby kardynalnej κ niewiększej od mocy $\mathfrak{B}$ i dowolnego zbioru $X \subseteq dom(\mathfrak{B})$ o mocy co najwyżej κ istnieje model $\mathfrak{A}$ taki, że:*
  1. $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$;
  2. $\mathfrak{A}$ *ma moc* κ;
  3. $X \subseteq dom(\mathfrak{A})$;
  4. $\mathfrak{A}_X$ *jest atomowy.*

Modele atomowe

Szkic dowodu. W dowodzie wykorzystuje się następujący lemat:

- *Dla dowolnej przeliczalnej teorii zupełnej T, dowolnych formuł $\theta(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ i $\chi(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ o, odpowiednio, $m + n$ oraz $m + n + p$ zmiennych wolnych i każdego nieistotnego rozszerzenia T^+ teorii T zawierającego stałe $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ takie, iż $T^+ \models \theta(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$, jeśli $\theta(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ jest atomem w $\mathcal{L}_T^{m+n}$, a $\chi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{z})$ jest atomem w $\mathcal{L}_{T^+}^p$, to formuła θ' o postaci $\exists \overrightarrow{y}\ (\theta(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \wedge \chi(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}))$ jest atomem w $\mathcal{L}_T^{m+p}$.*

Dla dowodu nie wprost tego lematu, przypuśćmy, iż θ' nie jest atomem. Istnieje wtedy formuła $\psi(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ taka, że zarówno $\theta' \wedge \psi$, jak i $\theta' \wedge \neg\psi$ jest T-niesprzeczna. Wtedy:

- zarówno $\theta \wedge \chi \wedge \psi$, jak i $\theta \wedge \chi \wedge \neg\psi$ jest T-niesprzeczna, a to oznacza, że zarówno $\theta \wedge \exists \overrightarrow{z}\ (\chi \wedge \psi)$, jak i $\theta \wedge \exists \overrightarrow{z}\ (\chi \wedge \neg\psi)$ jest T-niesprzeczna.

Modele atomowe

Ponieważ θ jest atomem (czyli formułą zupełną), więc wynika stąd, że:

- $T \models \theta \rightarrow \exists \overrightarrow{z}\ (\chi \wedge \psi)$
- $T \models \theta \rightarrow \exists \overrightarrow{z}\ (\chi \wedge \neg\psi)$.

Ponieważ $T^{+} \models \theta(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$, więc otrzymujemy:

- $T^{+} \models \exists \overrightarrow{z}\ (\chi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{z}) \wedge \psi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{z}))$ oraz
- $T^{+} \models \exists \overrightarrow{z}\ (\chi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{z}) \wedge \neg\psi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{z}))$.

To oznacza, że zarówno $\chi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{z}) \wedge \psi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{z})$, jak i $\chi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{z}) \wedge \neg\psi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{z})$ są T^{+}-niesprzeczne, co przeczy założeniu, iż $\chi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{z})$ jest atomem. Przypuszczenie dowodu nie wprost trzeba zatem odrzucić i dowód lematu został zakończony.

Modele atomowe

Przejdźmy do dowodu twierdzenia. Możemy założyć, że $\mathfrak{B}$ jest mocy κ. Zbudujemy ciąg $(b_\sigma : \sigma < \kappa)$ elementów $dom(\mathfrak{B})$ taki, że jeśli dla wszystkich $\sigma < \kappa$ przez A_σ oznaczymy zbiór $X \cup \{b_\tau : \tau < \sigma\}$, to:

- (1) Każdy typ $Tp_{\mathfrak{B}_{A_\sigma}}(b_\sigma)$ jest główny.
- (2) Dla dowolnej formuły $\phi(z)$ języka L_{A_σ}, jeśli $\mathfrak{B}_{A_\sigma} \models \exists z\, \phi(z)$, to dla pewnej $\tau \geqslant \sigma$: $\mathfrak{B}_{A_\sigma} \models \phi(z)[b_\tau]$.

Niech Γ będzie zbiorem wszystkich formuł $\phi(z)$ języka $L_{dom(\mathfrak{B})}$ takich, że $\mathfrak{B}_{dom(\mathfrak{B})} \models \exists z\, \phi(z)$. Niech $<_\Gamma$ będzie ustalonym dobrym porządkiem zbioru Γ o typie porządkowym κ.
Dla zbudowanego już ciągu $(b_\tau : \tau < \sigma)$ konstruujemy teraz element b_σ. Niech Δ_σ będzie zbiorem tych wszystkich $\phi \in \Gamma$ z języka L_{A_σ} takich, że dla wszystkich $\tau < \sigma$: $\mathfrak{B}_{A_\sigma} \models \neg\phi[b_\tau]$. Jeśli $\Delta_\sigma = \emptyset$, to niech ϕ_σ będzie formułą $x \doteq x$. W przeciwnym przypadku niech ϕ_σ będzie $<_\Gamma$-najmniejszym elementem Δ_σ.

Modele atomowe

Ponieważ T jest ω-stabilna, więc algebra Lindenbauma $\mathcal{L}^1_{\mathfrak{B}_{A_\sigma}}$ jest atomowa. Istnieje zatem atom $\chi_\sigma(z)$ poniżej ϕ_σ, czyli $\mathfrak{B}_{A_\sigma} \models \forall z\,(\chi_\sigma \to \phi_\sigma)$. Jako b_σ wybieramy dowolny element $dom(\mathfrak{B})$ taki, że $\mathfrak{B}_{A_\sigma} \models \chi_\sigma[b_\sigma]$. Wtedy oczywiście również $\mathfrak{B}_{A_\sigma} \models \phi_\sigma[b_\sigma]$.

Ponieważ atom jest generatorem typu głównego, otrzymujemy (1). Dla dowodu (2), jeśli $\mathfrak{B}_{A_\sigma} \models \exists z\,\phi(z)$, to dla każdej $\tau \geqslant \sigma$, ϕ jest formułą języka L_{A_τ}, a zatem jeśli $\mathfrak{B}_{A_\sigma} \models \neg\phi[b_\tau]$, to $\phi \in \Delta_\tau$. Jeśli jednak ϕ jest na miejscu v w porządku $<_\Gamma$, to dla pewnej $\tau < \sigma + v$, ϕ będzie najmniejszym elementem zbioru Δ_τ, a więc będzie spełniana przez b_τ.

Modele atomowe

Niech teraz $A = \{b_\sigma : \sigma < \kappa\}$. Wtedy A ma moc κ. Zauważmy, że $X \subseteq A$, ponieważ dla dowolnego $a \in X$: $\mathfrak{B}_X \models \exists x\,(a \doteq x)$. Tak więc, na mocy (2), $b_\tau = a$ dla pewnej $\tau \geqslant 0$. W dodatku, A zawiera wszystkie elementy wyróżnione w $\mathfrak{B}$ oraz jest domknięty, dla każdej n, na wszystkie n-argumentowe funkcje $f^{\mathfrak{B}}$ struktury $\mathfrak{B}$, ponieważ dla dowolnego ciągu $a_1, \ldots, a_n$ elementów A możemy wybrać σ taką, iż elementy ciągu $a_1, \ldots, a_n$ należą do A_σ i wtedy: $\mathfrak{B}_{A_\sigma} \models \exists x\,(f(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n) \doteq x))$, czyli dla pewnej $\tau \geqslant \sigma$ mamy $f^{\mathfrak{B}}(a_1, \ldots, a_n) = b_\tau$.

Pokazaliśmy więc, że A jest uniwersum jednoznacznie wyznaczonej struktury $\mathfrak{A}$ takiej, że $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Ponadto, mamy $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$, ponieważ jeśli ϕ jest formułą języka L_A taką, iż $\mathfrak{B}_A \models \exists x\, \phi$, to (na mocy (2)) istnieje $b \in A$ taki, że $\mathfrak{B}_A \models \phi[b]$.

Modele atomowe

Pokażemy teraz, że $\mathfrak{A}_X$ jest atomowy. Na potrzeby tego dowodu niech dla dowolnego $\overrightarrow{a} = (b_{\sigma_0}, \ldots, b_{\sigma_{m-1}})$ elementów A ***rzędem*** ciągu $\overrightarrow{a}$ będzie $|\overrightarrow{a}| = \max\{\sigma_0, \ldots, \sigma_{m-1}\}$.

Przez indukcję po rzędzie ciągu pokażemy, że dla każdego ciągu $\overrightarrow{a}$ elementów A istnieje formuła θ języka L_X, która jest atomem w algebrze $\mathcal{L}^m_{\mathfrak{A}_X}$ taka, że $\mathfrak{A}_X \models \theta[\overrightarrow{a}]$.

Mówienie, że formuła jest atomem w algebrze Lindenbauma jest skrótem dla powiedzenia, że jej klasa T-równoważności jest atomem w tej algebrze.

Modele atomowe

Przypuśćmy zatem, że założenie indukcyjne zachodzi dla wszystkich ciągów $\overrightarrow{a}$ rzędu mniejszego od σ. Ciąg rzędu σ ma postać $\overrightarrow{a, b_\sigma}$, gdzie $|\overrightarrow{a}| < \sigma$. Niech $\chi_\sigma(z)$ będzie formułą $\chi_\sigma(\overrightarrow{\overline{a}}, \overrightarrow{\overline{b}}, z)$ (jak w lemacie), która może zawierać także stałe $\overrightarrow{\overline{b}} = (\overline{b}_{\tau_0}, \ldots, \overline{b}_{\tau_n})$ nazywające inne elementy A_σ, ale wtedy dla tych elementów zachodzi: $|\overrightarrow{b}| < \sigma$.

Na mocy założenia indukcyjnego istnieje atom $\theta(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ algebry $\mathcal{L}^{m+n}_{\mathfrak{A}_X}$ taki, że $\mathfrak{A}_X \models \theta[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]$. Na mocy konstrukcji, $\chi_\sigma(\overrightarrow{\overline{a}}, \overrightarrow{\overline{b}}, z)$ jest atomem w $\mathcal{L}^1_{\mathfrak{A}_{A_\sigma}}$, a zatem na mocy lematu formuła θ' o postaci $\exists \overrightarrow{y} (\theta(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \wedge \chi(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}))$ jest atomem w algebrze $\mathcal{L}^{m+1}_{\mathfrak{A}_X}$. Wtedy: $\mathfrak{A}_X \models \theta'[\overrightarrow{a}, b_\sigma]$, co kończy dowód całego twierdzenia.

Modele-potwory

Przypuśćmy, że w analizie klasy $Mod(T)$ wszystkich modeli teorii T interesują nas jedynie modele mocy mniejszych od κ, gdzie κ jest ustaloną liczbą kardynalną (zwykle bardzo dużą). Możemy wtedy badać nie całą klasę $Mod(T)$, ale jedynie wszystkie podstruktury ustalonego modelu mocy κ, który jest modelem nasyconym dla T. Jeśli $\mathfrak{A}$ jest modelem nasyconym dla T, to $\mathfrak{A}$ jest jednocześnie uniwersalny oraz jednorodny. Pierwsza z tych własności implikuje, że podstruktury $\mathfrak{A}$ mocy mniejszej od κ są jego elementarnymi podstrukturami, a druga, że dowolny izomorfizm między tymi podstrukturami rozszerza się do automorfizmu całego $\mathfrak{A}$.

Praca wewnątrz takiego jednego, wybranego nasyconego modelu (nazywanego ***modelem-potworem***) ma wiele zalet. Należy jednak pamiętać, że mogą nie istnieć modele nasycone mocy κ dla bardzo dużych mocy kardynalnych κ, o ile nie zakładamy aksjomatów istnienia odpowiednio dużych liczb kardynalnych w teorii mnogości.

Modele-potwory

- *Niech T będzie teorią, która ma modele nieskończone, a κ liczbą kardynalną. Wtedy istnieje κ-nasycony model dla T.*

Szkic dowodu. Podobnie jak w dowodzie istnienia modelu $\aleph_0$-nasyconego, budujemy pewien elementarny ciąg modeli $\mathfrak{A}_1 \prec \mathfrak{A}_2 \prec \mathfrak{A}_3 \prec \ldots$, którego suma będzie poszukiwanym modelem κ-nasyconym. Wykorzystujemy przy tym definicje przez indukcję pozaskończoną.
Niech $\mathfrak{A}_1$ będzie modelem teorii T. Dla skonstruowanego już $\mathfrak{A}_n$, niech $\mathfrak{A}_{n+1}$ będzie modelem T, który realizuje każdy typ nad każdym podzbiorem uniwersum modelu $\mathfrak{A}_n$. Jeśli λ jest liczbą porządkową graniczną, to niech $\mathfrak{A}_\lambda$ będzie sumą łańcucha wszystkich $\mathfrak{A}_\beta$, dla $\beta < \lambda$. Rozważmy teraz model $\mathfrak{A}_\alpha$ taki, że moc α równa jest κ. Dowolny podzbiór A uniwersum modelu $\mathfrak{A}_\alpha$ musi być podzbiorem $dom(\mathfrak{A}_\beta)$ dla pewnej $\beta < \alpha$. A zatem każdy typ nad A jest realizowany w $\mathfrak{A}_{\beta+1}$. Ponieważ $\mathfrak{A}_{\beta+1} \prec \mathfrak{A}_\alpha$, więc każdy taki typ jest realizowany w $\mathfrak{A}_\alpha$, czyli $\mathfrak{A}_\alpha$ jest κ-nasycony.

Modele-potwory

- **Uwaga.** Skonstruowany wyżej model κ-nasycony ma moc o wiele większą od κ, a więc nie musi być nasycony.

- Zamiast rozważania modeli nasyconych można się czasem ograniczyć do modeli κ-nasyconych. Są one κ-uniwersalne oraz κ-jednorodne, a więc również mogą pełnić rolę modeli-potworów.

- Istnienie bardzo dużych modeli nasyconych może wymagać np. założenia Uogólnionej Hipotezy Kontinuum lub istnienia liczb kardynalnych mocno nieosiągalnych (oba te założenia są niezależne od aksjomatów teorii mnogości ZFC).

Elementy nieodróżnialne

Mówimy, że teoria T jest ***Skolemowo zupełna***, gdy dla każdej formuły o postaci $\exists y\, \psi$ o zmiennych wolnych wśród $x_1, \ldots, x_k$ istnieje term w zmiennych $x_1, \ldots, x_k$, który jest podstawialny w ψ taki, że $T \models \exists y\, \psi \rightarrow \psi(y/t)$.

Mówimy, że struktura $\mathfrak{A}$ jest ***Skolemowo zupełna***, gdy Skolemowo zupełna jest teoria $Th(\mathfrak{A})$.

Dla dowolnej struktury $\mathfrak{A}$ oraz zbioru $X \subseteq dom(\mathfrak{A})$ i dowolnego porządku liniowego $<_X$ na X, mówimy, że X jest ***zbiorem elementów nieodróżnialnych*** dla $\mathfrak{A}$ względem $<_X$, gdy dla dowolnych ciągów $\overrightarrow{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ i $\overrightarrow{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ elementów X, jeśli $a_1 <_X \ldots <_X a_n$ oraz $b_1 <_X \ldots <_X b_n$, to $(\mathfrak{A}, \overrightarrow{a}) \equiv (\mathfrak{A}, \overrightarrow{b})$.

Elementy nieodróżnialne

Jeśli zdefiniujemy relację $\sim_Y$ następująco dla dowolnych ciągów n-elementowych:

- $\overrightarrow{a} \sim_Y \overrightarrow{b}$ *dokładnie wtedy, gdy dla wszystkich $i < j \leqslant n$: $a_i <_Y a_j$ wtedy i tylko wtedy, gdy $b_i <_Y b_j$,*

to dla dowolnej struktury $\mathfrak{B}$, dowolnego $Y \subseteq dom(\mathfrak{B})$ oraz dowolnego porządku liniowego $<_Y$ na Y, jeśli Y jest zbiorem elementów nieodróżnialnych dla $\mathfrak{B}$, to dla dowolnych ciągów $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ elementów Y takich, że $\overrightarrow{a} \sim_Y \overrightarrow{b}$ modele $(\mathfrak{B}, \overrightarrow{a})$ oraz $(\mathfrak{B}, \overrightarrow{b})$ są elementarnie równoważne.

Szkic dowodu. Dowolny ciąg skończony można oczywiście ustawić w ciąg ściśle rosnący: jeśli $\overrightarrow{a}$ jest ciągiem elementów $dom(\mathfrak{B})$, to niech π będzie permutacją taką, że $\pi(\overrightarrow{a})$ jest ciągiem ściśle rosnącym. Wtedy jeśli $\overrightarrow{a} \sim_Y \overrightarrow{b}$, to również $\pi(\overrightarrow{b})$ jest ciągiem ściśle rosnącym.

Elementy nieodróżnialne

Dla dowolnej formuły ψ zastosujmy permutację π, aby ustawić zmienne wolne w ψ w porządku rosnącym (ich indeksów); niech otrzymana w ten sposób formuła będzie oznaczana przez ψ^π. Wtedy, jeżeli $\overrightarrow{a} \sim_Y \overrightarrow{b}$, to następujące warunki są kolejno równoważne:

- $\mathfrak{B} \models \psi[\overrightarrow{a}]$
- $\mathfrak{B} \models \psi^\pi[\pi(\overrightarrow{a})]$
- $\mathfrak{B} \models \psi^\pi[\pi(\overrightarrow{b})]$
- $\mathfrak{B} \models \psi[\overrightarrow{b}]$.

Przypomnijmy, że $\mathfrak{B}_{[Y]}$ jest podstrukturą struktury $\mathfrak{B}$ generowaną przez zbiór $Y \subseteq dom(\mathfrak{B})$, czyli jedyną podstrukturą struktury $\mathfrak{B}$, której uniwersum jest najmniejszym (w sensie inkluzji) zbiorem zawierającym zbiór Y oraz domkniętym ze względu na wszystkie funkcje struktury $\mathfrak{B}$. W ogólności $\mathfrak{B}_{[Y]}$ nie musi być ***elementarną*** podstrukturą struktury $\mathfrak{B}$.

Elementy nieodróżnialne

Przypomnijmy, że jeśli T jest teoria Skolemowo zupełną, to:

- Jeśli $\mathfrak{B} \models T$ oraz $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, to $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$.

Przypomnijmy też, że każda (przeliczalna) teoria T ma rozszerzenie Skolemowo zupełne T^* takie, że każdy model T ma rozszerzenie do modelu T^*.

- (†) *Dla dowolnej Skolemowo zupełnej struktury* $\mathfrak{B}$ *(w języku przeliczalnym) oraz dowolnego* $Y \subseteq dom(\mathfrak{B})$*, który jest zbiorem elementów nieodróżnialnych dla* $\mathfrak{B}$ *względem porządku* $<_Y$ *struktura* $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}_{[Y]}$ *jest elementarną podstrukturą struktury* $\mathfrak{B}$*, która realizuje jedynie przeliczalnie wiele typów struktury* $\mathfrak{B}$*. Jeśli dodatkowo* $<_Y$ *jest dobrym porządkiem, to dla dowolnego przeliczalnego zbioru* $X \subseteq dom(\mathfrak{A})$*, struktura* $\mathfrak{A}_X$ *realizuje co najwyżej przeliczalnie wiele typów teorii* $Th(\mathfrak{A}_X)$*.*

Elementy nieodróżnialne

Szkic dowodu. Każdy element struktury $\mathfrak{A}$ ma postać $t^{\mathfrak{B}}(\overrightarrow{a})$, gdzie t jest termem, a $\overrightarrow{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ ściśle rosnącym ciągiem elementów zbioru Y. Przypominamy, że $t^{\mathfrak{B}}$ to wartość termu t w strukturze $\mathfrak{B}$. Ponieważ $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, więc element taki ma również postać $t^{\mathfrak{A}}(\overrightarrow{a})$. Niech teraz $\overrightarrow{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ będzie dowolnym innym ściśle rosnącym ciągiem elementów zbioru Y. Na mocy definicji nieodróżnialności, dla dowolnej formuły $\psi(x)$ z jedną zmienną wolną następujące warunki są sobie kolejno równoważne:

- $\mathfrak{B} \models \psi(x)[t^{\mathfrak{B}}(\overrightarrow{a})]$
- $\mathfrak{B} \models \psi(t)[\overrightarrow{a}]$
- $\mathfrak{B} \models \psi(t)[\overrightarrow{b}]$
- $\mathfrak{B} \models \psi(x)[t^{\mathfrak{B}}(\overrightarrow{b})]$.

Elementy nieodróżnialne

Ponieważ $\mathfrak{B}$ jest Skolemowo zupełna, więc $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$, a to oznacza, że powyższe równoważności zachodzą również, gdy $\mathfrak{B}$ zastąpimy poprzez $\mathfrak{A}$. Wynika stąd, iż: $Tp_{\mathfrak{A}}(t^{\mathfrak{A}}(\overrightarrow{a})) = Tp_{\mathfrak{A}}(t^{\mathfrak{A}}(\overrightarrow{b}))$. Tak więc, dla każdego termu t, elementy $\mathfrak{A}$, które są postaci $t^{\mathfrak{A}}(\overrightarrow{a})$ dla ściśle rosnącego ciągu $\overrightarrow{a}$ realizują ten sam 1-typ. A ponieważ istnieje jedynie przeliczalnie wiele termów, więc co najwyżej przeliczalnie wiele 1-typów może być realizowanych. Podobnie dla dowolnej n: co najwyżej przeliczalnie wiele n-typów może być realizowanych.

Przypuśćmy teraz, że $<_Y$ jest dobrym porządkiem i ustalmy zbiór $X \subseteq dom(\mathfrak{A})$. Chcemy pokazać, że w $\mathfrak{A}_X$ realizowanych jest co najwyżej przeliczalnie wiele typów struktury $\mathfrak{A}_X$. Dla każdego elementu $c \in X$ ustalmy term u oraz element d zbioru Y tak, aby $c = u^{\mathfrak{A}}(d)$. Oznaczmy przez Z (przeliczalny) zbiór wszystkich $d \in Y$ wybranych w ten sposób.

Elementy nieodróżnialne

Zdefiniujmy relację $\sim_{Y,Z}$ dla dowolnych ściśle rosnących ciągów $\overrightarrow{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, $\overrightarrow{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ w sposób następujący:

- $\overrightarrow{a} \sim_{Y,Z} \overrightarrow{b}$ dokładnie wtedy, gdy dla wszystkich $i \leqslant n$ oraz wszystkich $d \in Z$: $a_i <_Y d$ wtedy i tylko wtedy, gdy $b_i <_Y d$.

Dla każdej formuły ψ z języka wzbogaconego o nazwy elementów X z jedną zmienną wolną oraz parametrami $\overline{c}$ dla $c \in X$, niech u oraz $d \in Z$ będą, odpowiednio, termem i elementem wybranym wyżej tak, aby $c = u^{\mathfrak{A}}(d)$. Wtedy dla dowolnego termu t oraz ciągów ściśle rosnących $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$, jeśli $\overrightarrow{a} \sim_{Y,Z} \overrightarrow{b}$, to $\overrightarrow{a}, d \sim_{Y,Z} \overrightarrow{b}, d$, czyli następujące warunki są równoważne:

- $\mathfrak{A} \models \psi(\overline{c})[t^{\mathfrak{A}}(\overrightarrow{a})]$
- $\mathfrak{A} \models \psi(\overline{c})[t^{\mathfrak{A}}(\overrightarrow{b})]$.

Elementy nieodróżnialne

A zatem dla każdego termu t elementy $\mathfrak{A}$ o postaci $t^{\mathfrak{A}}(\overrightarrow{a})$, gdzie $\overrightarrow{a}$ jest ciągiem ściśle rosnącym realizują co najwyżej tyle 1-typów, ile jest klas równoważności relacji $\sim_{Y,Z}$. Pokażemy, że tych klas jest przeliczalnie wiele.

Dla każdego $a \in Y$ niech d_a będzie $<_Y$-najmniejszym $d \in Z$ takim, że $a <_Y d$, o ile taki d istnieje, a niech d_a będzie równe ∞ w przeciwnym przypadku. Korzystamy tu z założenia, że $<_Y$ jest dobrym porządkiem.

Mamy: $\overrightarrow{a} \sim_{Y,Z} \overrightarrow{b}$ dokładnie wtedy, gdy dla wszystkich $i \leqslant n$, $d_{a_i} = d_{b_i}$. Tak więc, istnieje jedynie przeliczalnie wiele wartości dla $d_{a_1}, \ldots, d_{a_n}$. Tym samym, dowód całego twierdzenia został zakończony.

Twierdzenie Ramseya

Zbiory elementów nieodróżnialnych istnieją, co gwarantują pewne wyniki z teorii mnogości. Dla dowolnego zbioru A oraz dowolnej $n \in \omega$ niech:

- $[A]^n$ oznacza rodzinę wszystkich n-elementowych podzbiorów A.

- Dla dowolnego $P \subseteq [A]^n$ mówimy, że zbiór $H \subseteq A$ jest ***jednorodny*** dla P, gdy albo $[H]^n \subseteq P$, albo $[H]^n \cap P = \emptyset$.

Twierdzenie Ramseya

- *Dla dowolnego zbioru nieskończonego A, dowolnej $n > 0$ oraz dowolnego $P \subseteq [A]^n$ istnieje nieskończony zbiór $H \subseteq A$ jednorodny dla P.*

Twierdzenie Ramseya

Szkic dowodu. Dowód przebiega przez indukcję po n.
Dla $n = 1$ wystarczy przyjąć $H = P$, o ile zbiór P jest nieskończony, a $H = A - P$, gdy P jest skończony.
Przypuśćmy teraz, że twierdzenie zachodzi dla liczby n. Pokażemy, że zachodzi również dla $n + 1$.
Niech $P \subseteq [A]^n$ będzie ustalony. Rozważmy warunek:

- $(\heartsuit)$ Dla każdego zbioru nieskończonego $X \subseteq A$ istnieje $a \in X$ taki, że dla pewnego nieskończonego zbioru $Y \subseteq X - \{a\}$ oraz dla wszystkich $Z \in [Y]^n$ mamy: $Z \cup \{a\} \in P$.

1. Przypuśćmy, że warunek $(\heartsuit)$ zachodzi. Zdefiniujemy ciąg zbiorów nieskończonych A_k oraz elementów $a_k \in A_k$ takie, że $H = \{a_k : k \in \omega\}$ będzie spełniał tezę twierdzenia.

Twierdzenie Ramseya

Niech $A_0 = A$. Gdy A_k został już zdefiniowany, to na mocy ($\heartsuit$) istnieje $a_k \in A_k$ oraz nieskończony zbiór A_{k+1} takie, że $A_{k+1} \subseteq A_k - \{a_k\}$ oraz dla wszystkich $Z \in [A_{k+1}]^n$: $Z \cup \{a_k\} \in P$. Niech $H = \{a_k : k \in \omega\}$. Wtedy dla dowolnego $Z \in [H]^{n+1}$ niech k będzie najmniejszą liczbą taką, iż $a_k \in Z$. Zachodzi wtedy: $Z - \{a_k\} \in [A_{k+1}]^{n+1}$, czyli $Z \in P$. Oznacza to, że H jest nieskończonym zbiorem jednorodnym dla P.

2. Przypuśćmy z kolei, że warunek ($\heartsuit$) *nie zachodzi.* Ustalmy zbiór nieskończony $\overline{X} \subseteq A$ taki, że:

- ($\spadesuit$) Dla każdego $a \in \overline{X}$ oraz dla wszystkich nieskończonych zbiorów $Y \subseteq \overline{X} - \{a\}$ istnieje $Z \in [Y]^n$ taki, że $Z \cup \{a\} \notin P$.

Twierdzenie Ramseya

Dla każdego nieskończonego $X \subseteq \overline{X}$ oraz każdego $a \in X$, niech:
$P_{X,a} = \{Z \in [X - \{a\}]^n : Z \cup \{a\} \in P\}$.
Warunek (♠) implikuje, że każdego nieskończonego $X \subseteq \overline{X}$ oraz każdego $a \in X$ nie istnieje żaden nieskończony $Y \subseteq (X - \{a\})$ taki, że $[Y]^n \subseteq P_{X,a}$, a zatem na mocy założenia indukcyjnego istnieje zbiór nieskończony $Y \subseteq (X - \{a\})$ taki, iż $[Y]^n \cap P_{X,a} = \emptyset$. Otrzymujemy więc:

- (♣) Dla każdego nieskończonego $X \subseteq \overline{X}$ oraz wszystkich $a \in X$ istnieje zbiór nieskończony $Y \subseteq (X - \{a\})$ taki, że dla każdego $Z \in [Y]^n$ mamy: $Z \cup \{a\} \notin P$.

Przyjmujemy teraz $A_0 = \overline{X}$ i konstruujemy zbiory A_k i elementy a_k jak poprzednio. W tym przypadku dla $H = \{a_k : k \in \omega\}$ otrzymujemy, iż $Z \notin P$ dla dowolnego $Z \in [H]^{n+1}$, co oznacza, że H jest (nieskończonym) zbiorem jednorodnym dla P.

Twierdzenie Ramseya

- *Niech A będzie zbiorem nieskończonym, $n, k > 0$, a $\{P_0, \ldots, P_k\}$ rodziną zbiorów tworzącą podział zbioru $[A]^n$. Wtedy istnieje nieskończony zbiór $H \subseteq A$ oraz liczba $i \leqslant k$ takie, że $[H]^n \subseteq P_i$.*

Szkic dowodu. Dowód przebiega przez indukcję po k. Dla $k = 1$ wniosek powyższy jest po prostu Twierdzeniem Ramseya. Przypuśćmy teraz, że wniosek zachodzi dla liczby k i ustalmy rodzinę $\{P_0, \ldots, P_{k+1}\}$ będącą podziałem zbioru $[A]^n$. Niech dalej: $Q_i = P_i$ dla $i < k$ oraz $Q_k = P_k \cup P_{k+1}$. Na mocy założenia indukcyjnego istnieje zbiór nieskończony $H \subseteq A$ oraz liczba $i \leqslant k$ takie, że $[H]^n \subseteq Q_i$. Jeśli $i < k$ to ten zbiór H spełnia tezę wniosku. Dla $i = k$ stosujemy Twierdzenie Ramseya dla znalezienia nieskończonego zbioru $H' \subseteq H$ takiego, że albo $[H']^n \subseteq P_k$, albo $[H']^n \subseteq P_{k+1}$.

Twierdzenie Ehrenfeuchta-Mostowskiego

Twierdzenie Ehrenfeuchta-Mostowskiego

- *Dla dowolnej teorii T posiadającej modele nieskończone oraz dowolnego zbioru liniowo uporządkowanego $(X, <_X)$ istnieje model $\mathfrak{B}$ teorii T taki, że $X \subseteq dom(\mathfrak{B})$ oraz X jest zbiorem elementów nieodróżnialnych w $\mathfrak{B}$ względem $<_X$.*

Szkic dowodu. Rozszerzamy język L teorii T dodając do L stałe $\overline{c}$ dla każdego $c \in Y$. Oznaczmy to rozszerzenie przez L^+. Przez Γ oznaczmy natomiast zbiór obejmujący T oraz wszystkie następujące formuły:

- $\neg(\overline{c} \doteq \overline{d})$ dla $c, d \in Y$, $c \neq d$
- $\psi(\overrightarrow{\overline{a}}) \equiv \psi(\overrightarrow{\overline{b}})$, dla ściśle rosnących ciągów $\overrightarrow{a}$ oraz $\overrightarrow{b}$ (tu $\overrightarrow{\overline{a}}$ to ciąg stałych dla ciągu $\overrightarrow{a}$).

Twierdzenie Ehrenfeuchta-Mostowskiego

Dowolny model zbioru Γ zawiera izomorficzną kopię porządku $(Y, <_Y)$, który jest zbiorem elementów nieodróżnialnych. Trzeba pokazać, że Γ ma w ogóle jakikolwiek model. Pokażemy, wykorzystując twierdzenie o zwartości, iż Γ jest niesprzeczny (wtedy, na mocy twierdzenia o istnieniu modelu, Γ ma model). Niech zatem Δ będzie dowolnym *skończonym* podzbiorem zbioru Γ. Dalej, niech $\mathfrak{A}$ będzie dowolnym modelem T, a $<_{dom(\mathfrak{A})}$ liniowym porządkiem uniwersum $\mathfrak{A}$. Wybieramy: formuły $\psi_0, \ldots, \psi_{k-1}$, stałe $\overline{c}_0, \ldots, \overline{c}_{l-1}$ oraz zmienne $x_0, \ldots, x_{n-1}$ tak, aby:

- elementy Δ zawierają jedynie równoważności oraz nierówności, w których występują tylko formuły $\psi_0, \ldots, \psi_{k-1}$ oraz stałe $\overline{c}_0, \ldots, \overline{c}_{l-1}$,
- stałe $\overline{c}_0, \ldots, \overline{c}_{l-1}$ ustawione są w porządku ściśle rosnącym,
- zmienne wolne wszystkich formuł $\psi_0, \ldots, \psi_{k-1}$ znajdują się wśród $x_0, \ldots, x_{n-1}$.

Twierdzenie Ehrenfeuchta-Mostowskiego

Definiujemy teraz relację równoważności na zbiorze $[dom(\mathfrak{A})]^n$. Dla dowolnych $Y, Z \in [dom(\mathfrak{A})]^n$ niech $\overrightarrow{a}$ oraz $\overrightarrow{b}$ będą ciągami elementów, odpowiednio, Y oraz Z ustawionymi ściśle rosnąco względem porządku $<_{dom(\mathfrak{A})}$. Określamy relację $\sim$: $Y \sim Z$ dokładnie wtedy, gdy dla wszystkich $i < k$: $\mathfrak{A} \models \psi_i[\overrightarrow{a}]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{A} \models \psi_i[\overrightarrow{b}]$.

Relacja $\sim$ ma co najwyżej 2^k klas równoważności $P_0, \ldots, P_{2^k-1}$, które tworzą podział zbioru $[dom(\mathfrak{A})]^n$. Na mocy wniosku z Twierdzenia Ramseya istnieje nieskończony zbiór H taki, że dla pewnej $i < 2^k$ zachodzi inkluzja $[H]^n \subseteq P_i$. Wybieramy $h_0, \ldots, h_{l-1} \in H$ takie, że dla $i < j < l$ zachodzi $h_i <_{dom(\mathfrak{A})} h_j$. Wtedy $(\mathfrak{A}, h_0, \ldots, h_{l-1})$ jest modelem dla zbioru Δ. Pokazaliśmy, że każdy skończony podzbiór zbioru Γ ma model, a zatem (na mocy twierdzenia o zwartości) również cały zbiór Γ ma model. To kończy zarazem dowód całego twierdzenia.

Widmo teorii

Wprowadźmy ogólne oznaczenie: dla dowolnej teorii T oraz dowolnej nieskończonej liczby kardynalnej κ niech $\mu(T, \kappa)$ oznacza liczbę klas izomorfizmu modeli teorii T mocy κ. Tak więc, jeśli T jest κ-kategoryczna, to $\mu(T, \kappa) = 1$. Liczba $\mu(T, \kappa)$ jest niemniejsza od liczby klas równoważności relacji elementarnej równoważności modeli. Przypomnijmy, że wszystkie modele teorii zupełnej są elementarnie równoważne. Teoria zupełna może mieć jednak większą od 1 liczbę $\mu(T, \kappa)$: np. dla teorii gęstych liniowych porządków i $\kappa = \aleph_0$ liczba ta jest równa 4. Liczba $\mu(T, \kappa)$ odpowiada różnorodności matematycznej modeli teorii T. Natomiast liczba klas relacji elementarnej równoważności modeli wiąże się z możliwościami wyrażania języków pierwszego rzędu. Wyniki dotyczące niezupełności wielu ważnych teorii matematycznych pokazują ograniczenia w tym względzie języków pierwszego rzędu.

Widmo teorii

Z Dolnego Twierdzenia Löwenheima-Skolema wynika, że dla dowolnej teorii niesprzecznej T, $\mu(T, \aleph_0) \geqslant 1$.

Dla każdej teorii niesprzecznej T oraz dowolnej nieskończonej liczby kardynalnej κ zachodzą nierówności:

$$1 \leqslant \mu(T, \kappa) \leqslant 2^{\kappa}.$$

Jeśli T jest teorią zupełną, to algebra Lindenbauma jej zdań jest dwuelementowa i zawiera dokładnie jeden ultrafiltr (jednostkowy). Dla $n > 0$ (czyli gdy rozważamy formuły ze zmiennymi wolnymi), zarówno $\mathcal{L}^n_T$, jak i S^n mają o wiele bardziej złożone struktury. Każdy zupełny n-typ dla T jest nieskończonym zbiorem formuł i ma nieprzeliczalnie wiele podzbiorów, które są typami. Miarą złożoności (semantycznej) jest zatem liczba zupełnych n-typów teorii T, czyli moc zbioru $S^n(T)$.

Widmo teorii

W ogólności, dla dowolnej zupełnej teorii T moc ta jest niemniejsza od 1 oraz niewiększa od $2^{\aleph_0}$. Jednym z ciekawych problemów jest badanie związków między liczbą typów teorii a liczbą jej nieizomorficznych modeli w różnych mocach. Przez $s^n(T)$ oznaczaliśmy moc zbioru $S^n(T)$. Zachodzą następujące fakty:

- Dla dowolnej niesprzecznej teorii T i każdej $n > 0$ zachodzi nierówność:

  $$s^n(T) \leqslant \aleph_0 \times \mu(T, \aleph_0).$$

  Wynika stąd, że:

  1. Jeśli $\mu(T, \aleph_0) \leqslant \aleph_0$, to dla wszystkich $n > 0$: $s^n(T) \leqslant \aleph_0$.
  2. Jeśli dla wszystkich $n > 0$: $s^n(T) = 2^{\aleph_0}$, to $\mu(T, \aleph_0) = 2^{\aleph_0}$.

- Dla dowolnej niesprzecznej teorii T i każdej $n > 0$, jeśli $s^n(T) < 2^{\aleph_0}$, to $s^n(T) \leqslant \aleph_0$.

Hipoteza Vaughta

Przy założeniu Uogólnionej Hipotezy Kontinuum ostatnie z podanych wyżej twierdzeń jest oczywiste. Natomiast bez tego założenia, stale otwarta pozostaje postawiona w 1963 roku **Hipoteza Vaughta**:

- *Dla dowolnej niesprzecznej teorii T, jeśli $\mu(T, \aleph_0) < 2^{\aleph_0}$, to $\mu(T, \aleph_0) \leqslant \aleph_0$.*

Zachodzi następujące **Twierdzenie Morleya**:

- *Dla dowolnej niesprzecznej teorii T, jeśli $\mu(T, \aleph_0) < 2^{\aleph_0}$, to $\mu(T, \aleph_0) \leqslant \aleph_1$.*

Widma nieprzeliczalne dla teorii przeliczalnych zostały ustalone. Pozostają problemy otwarte dla wartości $\mu(T, \aleph_0)$. Własności widm wiążą się pojęciami niezależności; np. każda teoria T silnie minimalna ma widmo nieprzeliczalne określone przez $\mu(T, \kappa) = 1$.

Hipoteza Łosia

W 1954 roku Jerzy Łoś zauważył, że wszystkie znane przeliczalne teorie T podpadają pod jeden z następujących czterech typów:

- $(+, -)$: T jest $\aleph_0$-kategoryczna, ale dla wszystkich nieprzeliczalnych liczb kardynalnych κ, T nie jest κ-kategoryczna.
- $(-, +)$: T nie jest $\aleph_0$-kategoryczna, ale dla wszystkich nieprzeliczalnych liczb kardynalnych κ, T jest κ-kategoryczna.
- $(+, +)$: Dla wszystkich liczb kardynalnych κ, T jest κ-kategoryczna.
- $(-, -)$: Dla wszystkich liczb kardynalnych κ, T nie jest κ-kategoryczna.

Łoś postawił hipotezę, że są to jedyne możliwości. W 1965 roku Morley udowodnił poprawność tej hipotezy.

Hipoteza Łosia

Oto przykłady teorii, które są jednego z wyżej wymienionych rodzajów:

- $(+, -)$: Teoria gęstego liniowego porządku bez elementu pierwszego i ostatniego.
- $(-, +)$: Teoria ciał algebraicznie domkniętych charakterystyki 0, lub charakterystyki p, gdzie p jest liczbą pierwszą.
- $(+, +)$: Czysta teoria identyczności (w języku jedynie z predykatem identyczności, bez innych stałych pozalogicznych).
- $(-, -)$: Teoria modelu standardowego arytmetyki PA.

Twierdzenie Morleya

Twierdzenie Morleya podawane bywa w dwóch częściach, nazywanych **Dolnym** oraz **Górnym Twierdzeniem Morleya**:

- **Dolne Twierdzenie Morleya**. *Dla każdej przeliczalnej teorii T, jeżeli T jest κ-kategoryczna dla pewnej mocy nieprzeliczalnej κ, to T jest $\aleph_1$-kategoryczna.*
- **Górne Twierdzenie Morleya**. *Dla każdej przeliczalnej teorii T, jeżeli T jest $\aleph_1$-kategoryczna, to T jest κ-kategoryczna dla wszystkich mocy nieprzeliczalnych κ.*

Poniżej przedstawimy najpierw twierdzenia pomocnicze, które wykorzystywane są w dowodzie obu twierdzeń Morleya. Do ich sformułowania potrzebne jest z kolei wprowadzenie kilku pojęć. Przypominamy, że: $\psi^{\mathfrak{A}} = \{a \in dom(\mathfrak{A}) : \mathfrak{A} \models \psi(x)[a]\}$.

Twierdzenie Morleya

Przypominamy, że teoria T jest ***κ-stabilna***, gdzie κ jest nieskończoną liczbą kardynalną, gdy dla każdego modelu $\mathfrak{A}$ teorii T oraz wszystkich $X \subseteq dom(\mathfrak{A})$ mocy co najwyżej κ i wszystkich $n > 0$ zbiór $S^n(\mathfrak{A}_X)$ ma moc co najwyżej κ. Zamiast $\aleph_0$-stabilna zwykło się pisać ω-stabilna. Dla dowolnej struktury $\mathfrak{A}$ mówimy, że:

- $\mathfrak{A}$ jest ***skromna***, gdy dla każdego zbioru przeliczalnego $X \subseteq dom(\mathfrak{A})$ struktura $\mathfrak{A}_X$ (dla języka L_X, w której nazwa każdego elementu z X jest interpretowana jako ten właśnie element) realizuje najwyżej przeliczalnie wiele typów teorii $Th(\mathfrak{A}_X)$; w przeciwnym przypadku mówimy, że $\mathfrak{A}$ jest ***nieskromna***;
- struktura $\mathfrak{B}$ jest ***skromna nad*** $\mathfrak{A}$, gdy $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ oraz dla każdego zbioru przeliczalnego $X \subseteq dom(\mathfrak{A})$, każdy typ z $\mathfrak{B}_X$, który jest realizowany w $\mathfrak{B}_X$ jest już realizowany w $\mathfrak{A}_X$;
- $(\mathfrak{A}, \psi(x))$ jest ***parą dwukardynalną***, gdy $\psi^{\mathfrak{A}}$ jest zbiorem nieskończonym mocy mniejszej od mocy $\mathfrak{A}$.

Twierdzenie Morleya

Twierdzenie Morleya jest konsekwencją następujących twierdzeń:

- A. *Dla dowolnej przeliczalnej teorii T, jeśli T nie jest ω-stabilna, to dla każdej nieprzeliczalnej liczby kardynalnej κ istnieje model teorii T mocy κ, który nie jest skromny.*
- B. *Dla dowolnej przeliczalnej teorii T, jeśli T jest κ-kategoryczna w pewnej mocy nieprzeliczalnej κ, to T jest ω-stabilna.*
- C. **Pierwsze Twierdzenie o Skromności**. *Dla dowolnej przeliczalnej teorii T, posiadającej modele nieskończone oraz dowolnej liczby kardynalnej nieskończonej κ istnieje skromny model teorii T mocy κ.*
- D. **Drugie Twierdzenie o Skromności**. *Dla dowolnej przeliczalnej ω-stabilnej teorii T, dowolnego nieprzeliczalnego modelu $\mathfrak{A}$ tej teorii oraz dowolnej liczby kardynalnej κ niemniejszej od mocy $\mathfrak{A}$, istnieje model $\mathfrak{B}$ mocy κ, który jest skromny nad $\mathfrak{A}$.*

Twierdzenie Morleya

- E. **Twierdzenie Dwukardynalne**. *Dla dowolnej struktury $\mathfrak{A}$ oraz formuły ψ, jeśli $(\mathfrak{A}, \psi(x))$ parą dwukardynalną, to istnieją struktury $\mathfrak{B}$ i $\mathfrak{C}$ takie, że:*
  1. $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$ *i* $\mathfrak{B}$ *jest przeliczalna.*
  2. $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{C}$ *i moc* $\mathfrak{C}$ *jest równa* $\aleph_1$.
  3. $\psi^{\mathfrak{B}} = \psi^{\mathfrak{C}}$.

Wzmocnieniem twierdzeń Morleya jest **Twierdzenie Baldwina-Lachlana** (którego dowodu nie podajemy):

- *Dla dowolnej przeliczalnej teorii T, jeśli T jest κ-kategoryczna w pewnej mocy nieprzeliczalnej κ, to:*
  1. *Dla każdej κ, T jest κ-kategoryczna.*
  2. $\mu(T, \aleph_0) = 1$ *lub* $\mu(T, \aleph_0) = \aleph_0$.

Twierdzenie Morleya

Dowody twierdzeń A i B są bardzo proste:

- Punkt A. jest prostą konsekwencją twierdzenia o zwartości.
- Dla dowodu punktu B. zauważmy, że jeśli T nie jest ω-stabilna, to dla każdej nieprzeliczalnej κ, teoria T ma zarówno skromne jak i nieskromne modele mocy κ. Ponieważ nie są one izomorficzne, więc T nie jest κ-kategoryczna.

Twierdzenie Morleya

Dla dowodu **Dolnego Twierdzenia Morleya**, niech T będzie teorią κ-kategoryczną w pewnej nieprzeliczalnej mocy κ oraz niech $\mathfrak{A}$ będzie dowolnym jej modelem mocy $\aleph_1$. Pokazaliśmy uprzednio, że (przeliczalna zupełna i ω-stabilna) teoria jest κ-kategoryczna dokładnie wtedy, gdy każdy jej model mocy κ jest nasycony (twierdzenie C$^\bigstar$. w punkcie *Modele nasycone* w rozdziale *Modele nieprzeliczalne*). Na mocy punktu B. powyżej teoria T jest ω-stabilna. Wystarczy zatem udowodnić, że $\mathfrak{A}$ jest nasycony.

Ustalmy przeliczalny zbiór $X \subseteq dom(\mathfrak{A})$. Z ω-stabilności T wynika, że istnieje model $\mathfrak{B}$ mocy κ, który jest skromny nad $\mathfrak{A}$. Na mocy twierdzenia C$^\bigstar$, model $\mathfrak{B}$ jest nasycony, a więc w szczególności $\aleph_1$-nasycony, czyli każdy typ w $\mathfrak{B}_X$ jest realizowany w $\mathfrak{B}_X$, a zatem jest realizowany także w $\mathfrak{A}_X$. Ponieważ $\mathfrak{A}_X \equiv \mathfrak{B}_X$, więc typy w $\mathfrak{B}_X$ są dokładnie typami w $\mathfrak{A}_X$.

Twierdzenie Morleya

Dla dowodu **Pierwszego Twierdzenia O Skromności**, niech L będzie językiem przeliczalnym, a T teorią w tym języku, która ma modele nieskończone. Niech κ będzie liczbą kardynalną nieskończoną. Istnieje wtedy przeliczalne Skolemowe rozszerzenie T^* teorii T. Ustalmy dobry porządek $(Y, <_Y)$ mocy κ.

Na mocy Twierdzenia Ehrenfeuchta-Mostowskiego, istnieje model $\mathfrak{B}^*$ dla T^* taki, że $Y \subseteq dom(\mathfrak{B}^*)$ oraz Y jest zbiorem elementów nieodróżnialnych dla $\mathfrak{B}^*$.

Na mocy twierdzenia (†) z punktu *Elementy nieodróżnialne*, struktura $\mathfrak{A}^* = \mathfrak{B}^*_{[Y]}$ jest skromna. Struktura ta jest tej samej mocy co zbiór Y, czyli mocy κ oraz jest modelem T. Tak więc, jej redukt do języka L jest skromnym modelem T mocy κ.

Twierdzenie Morleya

Dla dowodu **Drugiego Twierdzenia O Skromności**, niech $\mathfrak{A}$ będzie nieprzeliczalnym modelem mocy λ przeliczalnej ω-stabilnej teorii T oraz niech $\kappa \geqslant \lambda$. Dowód przebiega w dwóch krokach:

- Konstruujemy właściwe elementarne rozszerzenie $\mathfrak{B}$ mocy λ struktury $\mathfrak{A}$, które jest skromne nad $\mathfrak{A}$.
- Iterujemy powyższą konstrukcję κ razy, otrzymując żądany model.

Rozważmy następujący podzbiór algebry Lindenbauma $\mathcal{L}^1_{\mathfrak{A}_{dom(\mathfrak{A})}}$:

$$Z = \{[\phi(x)]^1_{\mathfrak{A}_{dom(\mathfrak{A})}} : \phi^{\mathfrak{A}_{dom(\mathfrak{A})}} \text{ jest nieprzeliczalny}\}.$$

Twierdzenie Morleya

- $Z \neq \emptyset$ (ponieważ np. $[x \doteq x]^1_{\mathfrak{A}_{dom(\mathfrak{A})}} \in Z$).
- Z nie jest zbiorem doskonałym (ponieważ dla żadnego nieistotnego rozszerzenia T' teorii T i dla żadnej $m > 0$ algebra $\mathcal{L}^m_{T'}$) nie zawiera zbioru doskonałego.

Przypominamy, że podzbiór X algebry Boole'a $\mathcal{A}$ jest ***doskonały***, gdy jest niepusty oraz każdy jego element rozdziela się w X. Z kolei, a ***rozdziela się w*** X, gdy istnieją różne od zera algebry rozłączne (czyli takie, że ich kres dolny jest zerem algebry) elementy mniejsze od a. Wreszcie, podzbiór X algebry Boole'a $\mathcal{A}$ jest ***przedziałowo domknięty***, jeśli dla każdych $a \leqslant b \leqslant c$ w $\mathcal{A}$, jeśli $a, c \in X$, to $b \in X$. Dowodzi się, że dla dowolnej algebry Boole'a $\mathcal{A}$ oraz jej przedziałowo domkniętego podzbioru X nie zawierającego zera algebry warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby element $a \in X$ rozdzielał się w X jest istnienie $b \in \mathcal{A}$ takiego, że $a \wedge b$ oraz $a \wedge b'$ są elementami X.

Twierdzenie Morleya

Na mocy powyższego, istnieje formuła $\phi(x)$ języka $L_{dom(\mathfrak{A})}$ taka, że:

- $\phi^{\mathfrak{A}_{dom(\mathfrak{A})}}$ jest nieprzeliczalny, ale
- dla każdej formuły ψ języka $L_{dom(\mathfrak{A})}$, dokładnie jeden ze zbiorów $(\phi \wedge \psi)^{\mathfrak{A}_{dom(\mathfrak{A})}}$ i $(\phi \wedge \neg\psi)^{\mathfrak{A}_{dom(\mathfrak{A})}}$ jest nieprzeliczalny.

Wybierzmy zatem taką formułę ϕ i zdefiniujmy zbiór:

$$\Phi = \{\psi(x) : \psi \text{ jest } L_{dom(\mathfrak{A})}\text{-formułą, } (\phi \wedge \psi)^{\mathfrak{A}_{dom(\mathfrak{A})}} \text{ jest nieprzeliczalny}\}.$$

Twierdzenie Morleya

- $(*)$ Dla każdego przeliczalnego $\Phi_0 \subseteq \Phi$, Φ_0 jest realizowany w $\mathfrak{A}_{dom(\mathfrak{A})}$.

Niech bowiem dla dowolnego takiego Φ_0 zbiór Y będzie zdefiniowany następująco:

$$Y = \bigcap \{\psi^{\mathfrak{A}_{dom(\mathfrak{A})}} : \psi \in \Phi_0\}.$$

Wtedy różnica $\phi^{\mathfrak{A}_{dom(\mathfrak{A})}} - Y$ jest przeliczalną sumą przeliczalnych zbiorów $(\phi \wedge \neg\psi)^{\mathfrak{A}_{dom(\mathfrak{A})}}$, a zatem jest przeliczalna. Tak więc, $\phi^{\mathfrak{A}_{dom(\mathfrak{A})}} \cap Y$ jest nieprzeliczalny, a zatem niepusty. Dowolny element tego zbioru realizuje Φ_0.

Twierdzenie Morleya

Zbiór Φ jest typem struktury $\mathfrak{A}_{dom(\mathfrak{A})}$ i to typem zupełnym, na mocy wyboru formuły ϕ. Jednak Φ nie jest realizowany w $\mathfrak{A}_{dom(\mathfrak{A})}$, ponieważ dla każdego $a \in dom(\mathfrak{A})$ do zbioru Φ należy formuła $\neg x \doteq \overline{a}$, gdzie $\overline{a}$ jest stałą nazywającą element a. Niech $\overline{c}$ będzie nową stałą. Wtedy $\Phi(\overline{c}) = \{\psi(\overline{c}) : \psi \in \Phi)\}$ jest zupełnym nieistotnym rozszerzeniem $Th(\mathfrak{A}_{dom(\mathfrak{A})})$, a więc także zupełnym nieistotnym rozszerzeniem T.

Wtedy, na mocy twierdzenia udowodnionego w punkcie *Modele atomowe* w rozdziale *Modele nieprzeliczalne* $\Phi(\overline{c})$ ma model atomowy $\mathfrak{B}_{dom(\mathfrak{A})\cup\{c\}}$ mocy λ taki, że $\mathfrak{A}_{dom(\mathfrak{A})} \prec \mathfrak{B}_{dom(\mathfrak{A})}$. Interpretacja stałej $\overline{c}$ w modelu $\mathfrak{B}_{dom(\mathfrak{A})}$ realizuje Φ w $\mathfrak{B}_{dom(\mathfrak{A})}$, a zatem $\mathfrak{B}_{dom(\mathfrak{A})}$ jest właściwym rozszerzeniem $\mathfrak{A}_{dom(\mathfrak{A})}$.

Twierdzenie Morleya

Model $\mathfrak{B}$ jest skromny nad $\mathfrak{A}$. Niech bowiem $X \subseteq dom(\mathfrak{A})$ będzie dowolnym zbiorem przeliczalnym, a $\Psi(\overrightarrow{y})$ będzie n-typem struktury $\mathfrak{B}_X$. Wtedy $\Psi(\overrightarrow{y})$ jest także n-typem struktury $\mathfrak{B}_{dom(\mathfrak{A})\cup\{c\}}$. Typ Ψ jest główny, ponieważ $\mathfrak{B}_{dom(\mathfrak{A})\cup\{c\}}$ jest modelem atomowym. Niech zatem $\theta(\overrightarrow{y}, \overline{c})$ będzie jego generatorem. Ponieważ $\Phi(\overline{c})$ jest zupełny, więc:

- $\Phi(\overline{c}) \models \exists \overrightarrow{y}\ \theta(\overrightarrow{y}, \overline{c})$
- $\Phi(\overline{c}) \models \theta(\overrightarrow{y}, \overline{c}) \rightarrow \chi(\overrightarrow{y})$, dla każdej $\chi \in \Psi$.

Twierdzenie Morleya

Język L_X jest przeliczalny, ponieważ zbiór X jest przeliczalny. W konsekwencji, zbiór Ψ jest przeliczalny. Nadto, istnieje przeliczalnie wiele konsekwencji logicznych zbioru $\Phi(\overline{c})$. Na mocy zwartości, konsekwencje te są wyprowadzane ze skończonych podzbiorów zbioru $\Phi(\overline{c})$, a zatem istnieje przeliczalny zbiór $\Phi_0 \subseteq \Phi$ taki, że:

- $\Phi_0(\overline{c}) \models \exists \overrightarrow{y}\ \theta(\overrightarrow{y}, \overline{c})$
- $\Phi_0(\overline{c}) \models \theta(\overrightarrow{y}, \overline{c}) \rightarrow \chi(\overrightarrow{y})$, dla każdej $\chi \in \Psi$.

Twierdzenie Morleya

Ponieważ, na mocy $(*)$, zbiór Φ_0 jest realizowany w $\mathfrak{A}_{dom(\mathfrak{A})}$ przez jakiś element $d \in dom(\mathfrak{A})$, więc mamy (tu $\overline{d}$ jest stałą nazywającą d):

- $\mathfrak{A}_{dom(\mathfrak{A})} \models \exists \overrightarrow{y}\ \theta(\overrightarrow{y}, \overline{d})$
- $\mathfrak{A}_{dom(\mathfrak{A})} \models \theta(\overrightarrow{y}, \overline{d}) \rightarrow \chi(\overrightarrow{y})$, dla każdej $\chi \in \Psi$.

Oznacza to, że $\mathfrak{A}_{dom(\mathfrak{A})}$ realizuje Ψ, a więc także $\mathfrak{A}_X$ realizuje Ψ. Tak więc, pokazaliśmy, że $\mathfrak{B}$ jest skromny nad $\mathfrak{A}$.

Twierdzenie Morleya

Wreszcie, zbudujemy elementarne rozszerzenie mocy κ modelu $\mathfrak{A}$, które będzie skromne nad $\mathfrak{A}$, iterując powyższą konstrukcję.

Niech $\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{A}$. Dla każdej liczby porządkowej $\sigma \leqslant \kappa$ niech $\mathfrak{B}_{\sigma+1}$ będzie właściwym elementarnym rozszerzeniem $\mathfrak{B}_\sigma$ tej samej mocy co $\mathfrak{B}_\sigma$, które jest skromne nad $\mathfrak{B}_\sigma$. Dla liczb porządkowych granicznych σ, niech $\mathfrak{B}_\sigma = \bigcup\limits_{\tau<\sigma} \mathfrak{B}_\tau$.

Przez indukcję pozaskończoną dowodzi się, że każdy $\mathfrak{B}_\sigma$ jest skromny nad $\mathfrak{A}$ i ma moc $\overline{\overline{\sigma}}$. Tak więc, $\mathfrak{B}_\kappa$ jest poszukiwanym modelem.

Twierdzenie Morleya

Z kolei, udowodnimy **Twierdzenie Dwukardynalne**. Niech $(\mathfrak{A}, \theta)$ będzie parą dwukardynalną. Tak więc, nieskończony zbiór $\theta^{\mathfrak{A}}$ ma moc mniejszą od mocy $\mathfrak{A}$. Możemy założyć, że dla pewnej liczby kardynalnej nieskończonej λ:

- $\theta^{\mathfrak{A}}$ ma moc λ
- $\mathfrak{A}$ ma moc λ^+

(wystarczy zastąpić $\mathfrak{A}$ jego elementarnym podmodelem, o ile to konieczne).

Ustalmy dobry porządek $\leqslant$ uniwersum $\mathfrak{A}$ typu λ^+ taki, że $\theta^{\mathfrak{A}}$ jest jego odcinkiem początkowym. Wygodne będzie stosowanie skrótu $\exists^{cf} y$ (w języku dla struktury $(\mathfrak{A}, \leqslant)$) dla zdania $\forall z\ (\exists y\ y \underline{\leqslant} z)$. Przypominamy, że $\underline{\leqslant}$ jest predykatem, którego interpretacją (w $\mathfrak{A}$) jest $\leqslant$. Zauważmy też, że jeśli $(\mathfrak{A}, \leqslant) \models \exists^{cf} y\ \psi(y)$, to zbiór $\psi^{\mathfrak{A}}$ ma moc λ^+.

Twierdzenie Morleya

Nietrudno ustalić, że dla dowolnej formuły $\phi(x, y)$:

$$(\dagger) \quad (\mathfrak{A}, \leqslant) \models \exists^{cf} y \exists x\, (\theta(x) \wedge \phi(x, y)) \rightarrow \exists x\, (\theta(x) \wedge \exists^{cf} y\, \phi(x, y)).$$

Niech $(\mathfrak{B}, \leqslant)$ będzie przeliczalnym elementarnym podmodelem $(\mathfrak{A}, \leqslant)$. Pokażemy, że istnieje właściwe przeliczalne elementarne rozszerzenie $(\mathfrak{B}', \leqslant)$ modelu $(\mathfrak{B}, \leqslant)$ takie, że $\theta^{\mathfrak{B}} = \theta^{\mathfrak{B}'}$. W tym celu wystarczy pokazać, że istnieje model dla teorii T^+, która jest dedukcyjnym domknięciem zbioru $Th(\mathfrak{B}_{dom(\mathfrak{B})}) \cup \{\overline{b} \underline{\leqslant} \overline{c} : b \in dom(\mathfrak{B})\}$, gdzie $\overline{c}$ jest nową stałą, który omija typ $\Phi = \{\theta\} \cup \{\neg x \doteq \overline{b} : b \in \theta^{\mathfrak{B}}\}$. Na mocy Twierdzenia o Omijaniu Typów, wystarczy w tym celu pokazać, że Φ nie jest typem głównym dla T^+.

Twierdzenie Morleya

Udowodnimy najpierw, że zachodzi równoważność, dla każdej formuły χ języka $L_{dom(\mathfrak{B})}$:

- (‡) $T^+ \models \chi(\overline{c})$ dokładnie wtedy, gdy $(\mathfrak{B}, \leqslant) \models \neg \exists^{cf} y \neg \chi(y)$.

Prawa strona tej równoważności jest kolejno równoważna, na mocy stosownych definicji, następującym warunkom:

- $(\mathfrak{B}, \leqslant) \models \exists z\, (\forall y\, (y \underline{\leqslant} z) \rightarrow \chi(y))$
- istnieje $b \in dom(\mathfrak{B})$ taki, że $Th((\mathfrak{B}, \leqslant)_{dom(\mathfrak{B})}) \models \forall y\, (y \underline{\leqslant} \overline{b}) \rightarrow \chi(y))$.

Twierdzenie Morleya

Przypuśćmy, że zachodzi ostatni z tych warunków. Wtedy $T^+ \models \chi(\overline{c})$, ponieważ $T^+ \models \overline{b} \underline{\leqslant} \overline{c}$. Z drugiej strony, jeśli $T^+ \models \chi(\overline{c})$, to na mocy zwartości istnieją $b_0, \ldots, b_n$ takie, że:
$Th((\mathfrak{B}, \leqslant)_{dom(\mathfrak{B})}) \models \bigwedge\limits_{i \leqslant n} \overline{b_i} \underline{\leqslant} \overline{c} \rightarrow \chi(\overline{c})$.

Ponieważ $\overline{c}$ nie występuje w $Th((\mathfrak{B}, \leqslant)_{dom(\mathfrak{B})})$, więc implikuje to, iż:
$Th((\mathfrak{B}, \leqslant)_{dom(\mathfrak{B})}) \models \forall y \ (\bigwedge\limits_{i \leqslant n} \overline{b_i} \underline{\leqslant} y \rightarrow \chi(y))$.
Jeśli zatem b jest dowolnym elementem $dom(\mathfrak{B})$ większym od wszystkich $b_0, \ldots, b_n$, to otrzymujemy: $Th((\mathfrak{B}, \leqslant)_{dom(\mathfrak{B})}) \models \forall y \ (y \underline{\leqslant} \overline{b} \rightarrow \chi(\overline{b}))$. To z kolei oznacza, że $(\mathfrak{B}, \leqslant) \models \neg \exists^{cf} y \ \neg \chi(y)$ i kończy dowód (‡).

Twierdzenie Morleya

Przypuśćmy teraz, dla dowodu nie wprost, że Φ jest typem głównym. Istnieje więc dla niego generator $\psi(x, \overline{c})$. Dla każdego $b \in \theta^{\mathfrak{B}}$ mamy: $T^+ \models \psi(x, \overline{c}) \rightarrow \neg x \doteq \overline{b}$, co implikuje $T^+ \models \neg\psi(\overline{b}, \overline{c})$. Na mocy (‡) mamy więc: $(\mathfrak{B}, \leqslant) \models \neg\exists^{cf}\ \psi(\overline{b}, y)$. To z kolei daje: $(\mathfrak{B}, \leqslant) \models \forall x\ (\theta(x) \rightarrow \neg\exists^{cf} y\ \psi(x, y))$. Wykorzystując (†) oraz to, że $(\mathfrak{B}, \leqslant) \prec (\mathfrak{A}, \leqslant)$ dostajemy: $(\mathfrak{B}, \leqslant) \models \neg\exists^{cf} y \exists x\ (\theta \wedge \psi(x, y))$. Na mocy (‡) mamy więc: $T^+ \models \neg\exists x\ (\theta(x) \wedge \psi(x, \overline{c}))$.

Ponieważ ψ jest generatorem Φ, a $\theta \in \Phi$, więc mamy także: $T^+ \models \psi(x, \overline{c}) \rightarrow \theta(x)$. Wynika z tego, że $T^+ \models \neg\exists x\ \psi(x, \overline{c})$, a to oznacza, że $\psi(x, \overline{c})$ jest sprzeczna z T^+, czyli ψ nie może być wtedy generatorem Φ. Otrzymana sprzeczność każe odrzucić przypuszczenie dowodu nie wprost. Typ Φ nie jest więc główny.

Twierdzenie Morleya

Iterując powyższą konstrukcję zbudujemy poszukiwany model $\mathfrak{C}$. Niech:

- $\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{B}$
- $\mathfrak{B}_{\sigma+1} = \mathfrak{B}'_\sigma$
- $\mathfrak{B}_\sigma = \bigcup\limits_{\tau<\sigma} \mathfrak{B}_\tau$ dla granicznych σ.

Ostatecznie, niech $\mathfrak{C} = \mathfrak{B}_{\aleph_1}$. Zauważmy, że każdy model $\mathfrak{B}_\sigma$ jest przeliczalny, ale w krokach następnikowych dostajemy rozszerzenia właściwe. Model $\mathfrak{C}$ ma moc $\aleph_1$. Ponieważ $\theta^{\mathfrak{B}_\sigma} = \theta^{\mathfrak{B}}$ dla wszystkich σ, więc $\mathfrak{C}$ jest poszukiwanym modelem.

Twierdzenie Morleya

Wreszcie, możemy ukończyć dowód **Górnego Twierdzenia Morleya**. Zakładamy, że T jest $\aleph_1$-kategoryczna. Niech κ będzie dowolną ustaloną nieprzeliczalną liczbą kardynalną. Dla dowodu nie wprost, przypuśćmy, iż T nie jest κ-kategoryczna. Wtedy, na mocy wykorzystywanego już wyżej twierdzenia C$^\bigstar$, teoria T ma model $\mathfrak{A}$ mocy κ, który nie jest nasycony. Istnieje zatem zbiór $X \subseteq dom(\mathfrak{A})$ mocy mniejszej od κ oraz typ Φ struktury $\mathfrak{A}_X$, który nie jest realizowany w $\mathfrak{A}_X$. Możemy założyć, bez straty ogólności, że Φ jest 1-typem. Φ jest mocy mniejszej od κ, ponieważ X ma moc mniejszą od κ. Możemy zatem wybrać zbiór $I \subseteq dom(\mathfrak{A})$ mocy mniejszej od κ taki, że istnieje bijekcja z I na Φ. Niech ϕ_i będzie wartością tej bijekcji dla argumentu $i \in I$. Definiujemy relacje R oraz S w uniwersum struktury $\mathfrak{A}$:

- $R(i, a)$ dokładnie wtedy, gdy $i \in I$, $a \in X$ oraz $\overline{a}$ występuje w ϕ_i
- $S(i, b)$ dokładnie wtedy, gdy $i \in I$ oraz $\mathfrak{A}_X \models \phi_i[b]$.

Twierdzenie Morleya

Oznaczmy przez $\mathfrak{A}'$ rozszerzoną strukturę $(\mathfrak{A}, I, R, S)$. Zauważmy, że $(\mathfrak{A}', \underline{I}(x))$ jest parą dwukardynalną (tu $\underline{I}$ jest predykatem, którego interpretacją w $\mathfrak{A}$ jest I).

Na mocy Twierdzenia Dwukardynalnego istnieją struktury:
$\mathfrak{B}' = (\mathfrak{B}, I \cap dom(\mathfrak{B}), R \cap (dom(\mathfrak{B}) \times dom(\mathfrak{B})), S \cap (dom(\mathfrak{B}) \times dom(\mathfrak{B})))$
oraz $\mathfrak{C}' = (\mathfrak{C}, \underline{I}^{\mathfrak{C}'}, \underline{R}^{\mathfrak{C}'}, \underline{S}^{\mathfrak{C}'})$ takie, że:

- $\mathfrak{B}$ jest przeliczalna
- $\mathfrak{A}' \prec \mathfrak{B}'$
- $\mathfrak{B}' \prec \mathfrak{C}'$
- $\mathfrak{C}'$ ma moc $\aleph_1$
- $I \cap dom(\mathfrak{B}) = I \cap dom(\mathfrak{C})$.

Twierdzenie Morleya

Niech $\Phi_{dom(\mathfrak{B})}$ będzie typem $\{\phi_i : i \in I \cap dom(\mathfrak{B})\}$. Pokażemy, że $\Phi_{dom(\mathfrak{B})}$ jest typem struktury $\mathfrak{C}_{dom(\mathfrak{B})}$, który nie jest realizowany w $\mathfrak{C}_{dom(\mathfrak{B})}$. To zakończy dowód całego twierdzenia, ponieważ będzie oznaczało, iż $\mathfrak{C}$ nie jest nasycony, co w połączeniu z twierdzeniem C$^\bigstar$ pociągnie za sobą, iż T nie jest $\aleph_1$-kategoryczna, wbrew założeniu twierdzenia.

Stałe, które występują w formułach z $\Phi_{dom(\mathfrak{B})}$ są nazwami elementów $dom(\mathfrak{B})$. Niech bowiem $i \in I \cap dom(\mathfrak{B})$ oraz $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n$ będą stałymi, które występują w ϕ_i. Wtedy:
$\mathfrak{A}' \models \exists x_1 \ldots \exists x_n \, (\bigwedge\limits_{j<k\leqslant n} \neg y_j \doteq y_k \wedge \bigwedge\limits_{j\leqslant n} \underline{R}(x, y_j))[i]$.

Ponieważ $\mathfrak{B}' \prec \mathfrak{A}'$, więc formuła powyższa jest spełniona przez i także w $\mathfrak{B}'$. Wynika stąd, że $a_1, \ldots, a_n \in dom(\mathfrak{B})$.

Twierdzenie Morleya

Aby udowodnić, że $\Phi_{dom(\mathfrak{B})}$ jest typem dla $\mathfrak{C}_{dom(\mathfrak{B})}$ wystarczy pokazać, że dowolnego skończonego układu $i_0, \ldots, i_m \in I$ zachodzi:
$\mathfrak{C}_{dom(\mathfrak{B})} \models \exists y \bigwedge\limits_{k \leqslant m} \phi_{i_k}$. Mamy kolejno:

- $\mathfrak{A}'_{dom(\mathfrak{B})} \models \forall y\ (\phi_i(y) \equiv S(x, y))[i]$ dla $i \in I$
- $\mathfrak{B}'_{dom(\mathfrak{B})} \models \forall y\ (\phi_i(y) \equiv S(x, y))[i]$ dla $i \in I$
- $\mathfrak{C}'_{dom(\mathfrak{B})} \models \forall y\ (\phi_i(y) \equiv S(x, y))[i]$ dla $i \in I \cap dom(\mathfrak{B})$.

Skoro $\mathfrak{A}' \models \forall x_0 \ldots \forall x_m\ (\bigwedge\limits_{k \leqslant m} \underline{I}(x_k) \rightarrow \exists y \bigwedge\limits_{k \leqslant m} \underline{S}(x_k, y))$, więc również $\mathfrak{C}' \models \forall x_0 \ldots \forall x_m\ (\bigwedge\limits_{k \leqslant m} \underline{I}(x_k) \rightarrow \exists y \bigwedge\limits_{k \leqslant m} \underline{S}(x_k, y))$. Wynika z tego, że $\mathfrak{C}_{dom(\mathfrak{B})} \models \exists y \bigwedge\limits_{k \leqslant m} \phi_{i_k}(y)$.

Twierdzenie Morleya

Przypuśćmy teraz, dla dowodu nie wprost, że jakiś element c realizuje $\Phi_{dom(\mathfrak{B})}$ w $\mathfrak{C}_{dom(\mathfrak{B})}$. Wtedy:

- $\mathfrak{C}_{dom(\mathfrak{B})} \models \phi_i[c]$, dla wszystkich $i \in I \cap dom(\mathfrak{B})$, a zatem
- $\mathfrak{C}' \models \underline{S}(x, y)[i, c]$.

Mamy więc: $\mathfrak{C}' \models \exists y \forall x \, (\underline{I}(x) \rightarrow \underline{S}(x, y))$. Wtedy jednak również: $\mathfrak{A}' \models \exists y \forall x \, (\underline{I}(x) \rightarrow \underline{S}(x, y))$, a z tego wynika, iż Φ jest realizowany w $\mathfrak{A}$, sprzecznie z przypuszczeniem. Musimy zatem odrzucić to przypuszczenie i otrzymujemy, że Φ nie jest realizowany w $\mathfrak{C}_{dom(\mathfrak{B})}$. Jak już wspomniano, oznacza to, że $\mathfrak{C}$ nie jest nasycony, co z kolei pociąga za sobą, że T nie jest $\aleph_1$-kategoryczna, wbrew założeniu twierdzenia. Ostatecznie, przypuszczenie, że T nie jest κ-kategoryczna musimy odrzucić i dowód **Górnego Twierdzenia Morleya** został tym samym zakończony.

Twierdzenie Morleya

Uwaga. W powyższym dowodzie wewnątrz dowodu nie wprost mieliśmy inny dowód nie wprost. Należy uważać, aby się nie zagubić, jak mały Lisek w ogromnym ciemnym lesie.

W oryginalnym dowodzie Morleya posłużono się techniką, przypisującą formułom pewne liczby porządkowe (zobacz np. Sacks 1972).

Przedstawiony wyżej dowód Twierdzenia Morleya wzorowany jest na monografii Hinman 2005, 708–719.

Zwróćmy uwagę, że Twierdzenie Morleya jest równie doniosłe jak np. Twierdzenie Löwenheima-Skolema-Tarskiego. Początek współczesnej teorii modeli (leżącej poza zasięgiem tego wykładu) wiązać możemy właśnie z Twierdzeniem Morleya.

Przestrzeń typów

Przypomnijmy, że teorię T nazywaliśmy małą, gdy zbiór $S(T)$ był przeliczalny. Dla małych teorii przytoczyliśmy niektóre ustalenia dotyczące istnienia oraz jednoznaczności modeli $\aleph_0$-nasyconych oraz modeli atomowych.
Pokazaliśmy także warunki konieczne i wystarczające na to, aby mała teoria była $\aleph_0$-kategoryczna, czyli wyznaczała z dokładnością do izomorfizmu swój model przeliczalny.

Pokażemy teraz, że dla teorii przeliczalnych są tylko dwie możliwości na moc zbioru $S(T)$: jest on mianowicie albo przeliczalny, albo ma moc kontinuum, czyli $2^{\aleph_0}$.
Pokażemy też, że liczba nieizomorficznych modeli przeliczalnej teorii, która nie jest mała wynosi kontinuum.

Przestrzeń typów

- *Niech T będzie przeliczalną teorią zupełną oraz niech P będzie nieprzeliczalnym podzbiorem zbioru $S(T)$.*
  Wtedy istnieje formuła ψ taka, że zarówno ψ jak i $\neg\psi$ należą do nieprzeliczalnie wielu typów w P.

Szkic dowodu. Niech F będzie zbiorem wszystkich formuł, które występują w jakimś typie Ψ ze zbioru $S(T)$, czyli zbiorem wszystkich formuł, które są realizowane w jakimś modelu teorii T. Każda formuła ze zbioru F albo występuje w nieprzeliczalnie wielu typach ze zbioru P, albo tylko w przeliczalnie wielu (a może w żadnym) typach z P. Niech $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots\}$ będzie (być może skończonym) zbiorem tych formuł z F, które występują tylko w przeliczalnie wielu typach z P.
Dalej, niech P_i będzie zbiorem tych typów z P, które zawierają formułę φ_i i niech P_Φ będzie sumą wszystkich zbiorów P_i. Zbiór P_Φ jest przeliczalny, jako przeliczalna suma zbiorów przeliczalnych.

Przestrzeń typów

Z definicji, zbiór P_Φ jest zbiorem wszystkich typów z P, które zawierają φ_i, dla pewnej i. Ponieważ P jest nieprzeliczalny, więc musi istnieć nieprzeliczalnie wiele typów w P, które nie należą do P_Φ.

Dla dowodu nie wprost przypuśćmy, że dla każdej formuły ψ ze zbioru F, albo ψ należy do P_Φ, albo $\neg\psi$ należy do P_Φ. Wtedy istniałby najwyżej jeden typ w zbiorze $P - P_\Phi$ zawierający jedną z tych formuł (a mianowicie zbiór złożony z formuł $\neg\varphi_i$, dla wszystkich i), co jest sprzeczne z faktem, iż $P - P_\Phi$ jest nieprzeliczalny (jako różnica zbioru nieprzeliczalnego i przeliczalnego). Przypuszczenie dowodu nie wprost trzeba więc odrzucić, a zatem istnieje co najmniej jedna formuła ψ taka, że ani ψ, ani $\neg\psi$ nie należy do P_Φ. Na mocy definicji P_Φ, obie formuły: ψ oraz $\neg\psi$ należą zatem do nieprzeliczalnie wielu typów z P.

Przestrzeń typów

- *Niech T będzie przeliczalną teorią zupełną, która nie jest mała. Wtedy moc zbioru $S(T)$ równa jest $2^{\aleph_0}$.*

Szkic dowodu. Jest dość oczywiste, że moc zbioru $S(T)$ jest niewiększa od $2^{\aleph_0}$. Skoro bowiem T jest przeliczalna, to ma przeliczalnie wiele formuł, a ponieważ każdy typ jest zbiorem formuł, więc typów jest co najwyżej tyle ile elementów zbioru potęgowego $\wp(\omega)$, czyli $2^{\aleph_0}$.

Z drugiej strony, przypuśćmy, iż T nie jest mała. Pokażemy, że moc zbioru $S(T)$ jest niemniejsza od $2^{\aleph_0}$. Skorzystamy ze znanego faktu, że $2^{\aleph_0}$ jest mocą zbioru wszystkich funkcji ze zbioru ω w zbiór dwuelementowy $\{0, 1\}$. Każda taka funkcja jest zatem przeliczalnym ciągiem o wyrazach 0 lub 1. Dla każdego takiego ciągu zdefiniujemy typ w $S(T)$ i pokażemy, że wszystkie te typy są różne.

Przestrzeń typów

Jeśli s jest skończonym ciągiem o wyrazach 0 lub 1, to przez $s * i$ rozumiemy ciąg utworzony przez dodanie na końcu ciągu s liczby i, gdzie $i \in \{0, 1\}$. Dla każdego przeliczalnego ciągu $t \in \{0, 1\}^\omega$ niech $t|n$ oznacza pierwsze n elementów ciągu t.
Z założenia, $S(T)$ jest nieprzeliczalny. Na mocy wyżej udowodnionego twierdzenia, istnieje formuła ψ taka, że zarówno ψ jak i $\neg\psi$ należy do nieprzeliczalnie wielu typów z $S(T)$.
Niech teraz χ_0 będzie formuła $\neg\psi$, a χ_1 formułą ψ. Wtedy oczywiście χ_0 oraz χ_1 należą do nieprzeliczalnie wielu typów z $S(T)$.

Przypuśćmy, że zdefiniowaliśmy już formułę χ_s, która należy do nieprzeliczalnie wielu typów z $S(T)$. Niech P_s będzie zbiorem typów z $S(T)$, które zawierają formułę χ_s. Ponieważ P_s jest nieprzeliczalny, więc na mocy poprzedniego twierdzenia istnieje formuła ψ taka, że zarówno ψ jak i $\neg\psi$ należy do nieprzeliczalnie wielu typów z P_s.

Przestrzeń typów

Niech teraz:

- χ_{s*0} będzie formułą $\chi_s \wedge \neg\psi$
- χ_{s*1} będzie formułą $\chi_s \wedge \psi$.

Tak więc, dla każdego skończonego ciągu s zdefiniowaliśmy formułę χ_s. Na mocy tej konstrukcji:

- $T \vdash \chi_{s*0} \rightarrow \chi_s$
- $T \vdash \chi_{s*1} \rightarrow \chi_s$.

Ponadto, χ_{s*0} oraz χ_{s*1} nie mogą być obie realizowane w jakimś modelu dla T, ponieważ jedna z tych formuł implikuje ψ, a pozostała implikuje $\neg\psi$.

Przestrzeń typów

Niech teraz Γ_t będzie zbiorem wszystkich formuł χ_s takich, że $s = t|n$ dla pewnej $n \in \omega$. Twierdzimy, że dla każdego $t \in \{0,1\}^\omega$ zbiór Γ_t jest realizowalny. Wystarczy w tym celu pokazać, że każdy skończony podzbiór zbioru Γ_t jest realizowalny. Jeśli Γ jest skończonym podzbiorem Γ_t, to dla pewnej $m \in \omega$ oraz każdej χ_s w Γ ciąg s ma długość mniejszą od m. Wtedy $T \vdash \chi_{t|m} \rightarrow \chi_s$ dla każdej χ_s należącej do Γ. Na mocy konstrukcji, formuła $\chi_{t|m}$ należy do nieprzeliczalnie wielu typów z $S(T)$. A zatem Γ jest zawarty w nieprzeliczalnie wielu typach z $S(T)$. W konsekwencji, Γ jest realizowalny.

Niech teraz Ψ_t będzie typem z $S(T)$, który zawiera zbiór Γ_t. Jeśli t_1 i t_2 są różnymi ciągami z $\{0,1\}^\omega$, to Ψ_{1t_1} oraz Ψ_{t_2} są różnymi typami w $S(T)$, ponieważ istnieje formuła ψ należąca do jednego z tych typów taka, że jej negacja $\neg\psi$ należy do pozostałego z tych typów. Pokazaliśmy zatem, że moc zbioru $S(T)$ jest niemniejsza od $2^{\aleph_0}$.

Przestrzeń typów

Zauważmy przy okazji, że twierdzenie powyższe zachodzi nawet jeśli Hipoteza Kontinuum jest fałszywa. Nawet jeśli istniałyby liczby kardynalne κ pomiędzy $\aleph_0$ oraz $2^{\aleph_0}$, to moc zbioru $S(T)$ nie może być równa takiej liczbie κ.

Udowodnione twierdzenia można wykorzystać w ustaleniu liczby nieizomorficznych modeli przeliczalnych teorii przeliczalnych, które nie są małe. Zauważmy najpierw, że zachodzi następujące twierdzenie:

- *Niech T będzie teorią przeliczalną, a κ liczbą kardynalną nieskończoną. Wtedy istnieje co najwyżej 2^κ nieizomorficznych modeli T mocy κ.*

Przestrzeń typów

Szkic dowodu. Niech U będzie dowolnym zbiorem mocy nieskończonej κ. Wtedy (ponieważ T jest przeliczalna):

- każdą stałą indywidualną c możemy interpretować na tyle sposobów, ile elementów ma U, czyli na κ sposobów;
- każda relacja n-argumentowa jest podzbiorem U^n, a więc jest 2^κ możliwości interpretacji predykatów n-argumentowych;
- ponieważ jest $\kappa^\kappa = 2^\kappa$ funkcji z U^n w U, więc każdy symbol funkcyjny n-argumentowy możemy interpretować na 2^κ sposobów.

Tak więc, każdy symbol pozalogiczny może być interpretowany na co najwyżej 2^κ sposobów. Ponieważ mamy przeliczalnie wiele takich symboli, więc istnieje co najwyżej $\aleph_0 \cdot 2^\kappa = 2^\kappa$ różnych sposobów interpretacji tych wszystkich symboli. Oznacza to, że istnieje co najwyżej 2^κ różnych (nieizomorficznych) modeli dla T mocy κ.

Przestrzeń typów

W szczególności, teoria przeliczalna może mieć co najwyżej $2^{\aleph_0}$ nieizomorficznych modeli. Jeśli moc zbioru $S(T)$ równa jest $2^{\aleph_0}$, to T ma właśnie $2^{\aleph_0}$ nieizomorficznych modeli, co wynika z udowodnionych wyżej twierdzeń oraz z Dolnego Twierdzenia Löwenheima-Skolema.

Widzimy więc, że funkcja $\mu(T, \aleph_0)$ może osiągać swoją maksymalnie możliwą wartość. Jej pewne wartości są jednak wykluczone, jak pokazuje następujący przykład podany przez Vaughta.

- *Teoria zupełna nie może mieć dokładnie dwóch (nieizomorficznych) modeli przeliczalnych.*

Przestrzeń typów

Szkic dowodu. Dla dowodu nie wprost, przypuśćmy, że T ma dokładnie dwa nieizomorficzne modele przeliczalne. Pokażemy, że musiałaby mieć wtedy także trzeci model przeliczalny, nieizomorficzny z tymi dwoma. Zauważmy po pierwsze, że ponieważ T jest zupełna i ma więcej niż jeden model, to każdy model dla T jest nieskończony.

Jeśli T nie jest mała, to na mocy twierdzenia udowodnionego wyżej, T ma nieprzeliczalnie wiele modeli przeliczalnych. Możemy zatem założyć, że T jest mała, czyli że zbiór typów $S(T)$ jest przeliczalny. Stąd (oraz z twierdzeń udowodnionych w poprzednich rozdziałach) wynika, że:

- T ma model atomowy $\mathfrak{A}$
- T ma przeliczalny model $\aleph_0$-nasycony $\mathfrak{B}$.

Przestrzeń typów

Ponieważ T nie jest $\aleph_0$-kategoryczna, więc istnieje typ nieizolowany $\Psi \in S^m(T)$ dla pewnej $m \in \omega$. Niech $\overrightarrow{a}$ będzie ciągiem m-elementowym elementów $dom(\mathfrak{B})$, który realizuje (w modelu $\aleph_0$-nasyconym $\mathfrak{B}$) m-typ Ψ. Rozszerzamy język teorii T poprzez dodanie nowych stałych $c_1, \ldots, c_m$. Niech $\mathfrak{C}$ będzie rozszerzeniem modelu $\mathfrak{B}$ do tego języka, w którym stałe $c_1, \ldots, c_m$ interpretujemy jako elementy ciągu $\overrightarrow{a}$. Ponieważ T nie jest kategoryczna, więc na mocy Twierdzenia Rylla-Nardzewskiego zbiór $S^n(T)$ jest nieskończony dla pewnej n. Wynika stąd, że również zbiór $S^n(Th(\mathfrak{C}))$ jest nieskończony, a zatem teoria $Th(\mathfrak{C})$ nie jest $\aleph_0$-kategoryczna. Gdyby $Th(\mathfrak{C})$ miała nieprzeliczalnie wiele modeli nieizomorficznych, to również T miałaby ich tyle. Ponieważ zakładamy, iż tak nie jest, więc $Th(\mathfrak{C})$ ma, podobnie jak T, zarówno model atomowy $\mathfrak{C}_1$, jak i model $\aleph_0$-nasycony $\mathfrak{C}_2$. Skoro $Th(\mathfrak{C})$ nie jest $\aleph_0$-kategoryczna, to jej model atomowy i jej model $\aleph_0$-nasycony nie mogą być izomorficzne. A zatem $\mathfrak{C}_1$ nie jest modelem $\aleph_0$-nasyconym.

Przestrzeń typów

Niech $\mathfrak{D}$ oznacza redukt modelu $\mathfrak{C}_1$ do języka teorii T. Ponieważ $\mathfrak{C}_1$ nie jest $\aleph_0$-nasycony, więc również $\mathfrak{D}$ nie jest $\aleph_0$-nasycony. A ponieważ $\mathfrak{D}$ realizuje nieizolowany typ Ψ (gdyż $\overrightarrow{a}$ jest ciągiem elementów z $dom(\mathfrak{D})$), to $\mathfrak{D}$ nie jest atomowy. Wynika stąd, że $\mathfrak{D}$ jest modelem T, który nie jest izomorficzny ani z $\mathfrak{A}$, ani z $\mathfrak{B}$.

Uzyskaliśmy sprzeczność, a więc przypuszczenie dowodu nie wprost trzeba odrzucić. Ostatecznie, teoria T nie może mieć dokładnie dwóch nieizomorficznych modeli przeliczalnych.

Inne wartości skończone dla funkcji $\mu(T, \aleph_0)$ nie są wykluczone, jak wspominaliśmy już wyżej, w rozdziale poświęconym widmom teorii.

Rodzaje stabilności

Mówimy, że zupełna i przeliczalna teoria T jest:

- ***stabilna***, jeśli jest κ-stabilna dla dowolnie dużych κ.
- ***superstabilna***, jeśli jest κ-stabilna dla wystarczająco dużych κ.
- ***ω-stabilna***, jeśli jest κ-stabilna dla wszystkich nieskończonych κ.
- ***ściśle stabilna***, gdy jest stabilna, ale nie jest superstabilna.
- ***ściśle superstabilna***, gdy jest superstabilna, ale nie ω-stabilna.
- ***niestabilna***, gdy nie jest stabilna.

Każda teoria jest jednej z czterech klas: ω-stabilna, ściśle superstabilna, ściśle stabilna lub niestabilna.

Rodzaje stabilności

Teorie stabilne są czasem definiowane w terminach porządków definiowalnych w ich modelach. Dowodzi się wtedy warunków koniecznych i wystarczających na stabilność właśnie w terminach takich porządków.

Dla przykładu, teoria dowolnego nieskończonego porządku liniowego nie jest stabilna. Dowodzi się również, że jeśli T nie jest stabilna, to $\mu(T, \kappa) = 2^{\kappa}$ dla wszystkich κ nieprzeliczalnych.

Posługujemy się (nieostro, intuicyjnie) rozumianymi pojęciami: teorii ***oswojonych*** oraz teorii ***dzikich***. Teorie oswojone dopuszczają analizowanie ich środkami teorii modeli. Teorie dzikie, to te, które oswojone nie są. Oto niektóre przykłady teorii, umieszczone na skali stabilności:

Rodzaje stabilności

- Wśród teorii *dzikich* jest nierozstrzygalna teoria arytmetyki.
- Teorie *oswojone* to np. teorie o-minimalne oraz teorie wymienione niżej.
- Teorie *proste* to np. teoria grafu losowego oraz teorie wymienione poniżej.
- Teorie *stabilne* to teorie superstabilne wymienione niżej oraz takie teorie ściśle stabilne jak np. teoria przeliczalnie wielu relacji równoważności E_i, „zagnieżdżonych" w ten sposób, iż dla każdej i:
  1. $\forall x \forall y\, (E_{i+1}(x, y) \rightarrow E_i(x, y))$
  2. każda klasa E_i-równoważności zawiera przeliczalnie wiele klas E_{i+1}-równoważności.

  Ta teoria jest stabilna, ale nie jest superstabilna.

Rodzaje stabilności

- Teorie *superstabilne*, wśród których są teorie ω-stabilne wyliczone niżej oraz teorie ściśle superstabilne takie, jak np. teoria przeliczalnie wielu relacji równoważności E_i, z których każda ma dokładnie dwie klasy równoważności i takich, że przekrój relacji E_i oraz E_j dla $i \neq j$ ma dokładnie cztery klasy równoważności.
  Jest to teoria superstabilna, która nie jest ω-stabilna.
- Teorie *ω-stabilne*, które obejmują wszystkie teorie nieprzeliczalnie kategoryczne oraz takie teorie niekategoryczne jak np. teoria jednej relacji równoważności mającej dwie klasy nieskończone.

Rodzaje stabilności

- Teorie *nieprzeliczalnie kategoryczne* obejmują wszystkie teorie silnie minimalne. Każda teoria nieprzeliczalnie kategoryczna jest związana z pewną strukturą silnie minimalną. Należą tu jednak też teorie nieprzeliczalnie kategoryczne, które nie są silnie minimalne, np. teoria struktury liczb całkowitych z funkcją następnika s oraz jedną relacją jednoargumentową P taką, że: $\forall x \, (P(x) \equiv \neg P(s(x)))$.
- Teorie *silnie minimalne*: np. teoria liczb całkowitych z funkcją następnika, teoria ciał algebraicznie domkniętych, teoria przestrzeni wektorowych.

Rodzaje stabilności

Wszystkie teorie nieprzeliczalnie kategoryczne są ω-stabilne, ale teorie przeliczalnie kategoryczne przecinają pietra powyższej hierarchii. Istnieją mianowicie teorie przeliczalnie kategoryczne, które:

- są silnie minimalne (np. teoria klik)
- są niestabilne (teoria grafu losowego)
- nie są proste (gęste liniowe porządki).

Uwagi o klasyfikowaniu

Część pracy matematyka polega na ***klasyfikowaniu***. Należy przy tym podkreślić, że nie jest to praca podobna np. do działań botanika, zoologa czy bibliotekarza. Matematyk klasyfikuje struktury, a po to aby dokonać klasyfikacji nie wystarcza przyglądać się strukturom. Najczęściej trzeba ***dowodzić***, że struktury rozważanego rodzaju można poklasyfikować, a ta procedura wcale nie musi być łatwa.

Wedle jakich kryteriów klasyfikujemy struktury? Pierwszą odpowiedzią jest zwykle: z dokładnością do izomorfizmu, czyli za nieodróżnialne uważamy struktury izomorficzne. Istotnie, izomorfizm struktur relacyjnych (bądź algebr) jest bardzo naturalną podstawą klasyfikacji: struktury izomorficzne nie różnią się ani liczbą elementów, ani budową. Jak widzieliśmy w poprzednich punktach, izomorfizm nie jest jednak jedyną relacją równoważności miedzy strukturami, która jest interesująca z punktu widzenia teorii modeli.

Uwagi o klasyfikowaniu

Klasyfikujemy struktury np. także ze względu na:

- relację elementarnej równoważności;
- relację częściowego izomorfizmu;
- liczbę typów spełnianych w modelach.

Tak więc, klasyfikowanie ze względu na izomorfizm (lub częściowy izomorfizm) odzwierciedla podobieństwo struktur (a nawet nieodróżnialność) ze względu na budowę. Z kolei, klasyfikowanie ze względu na elementarną równoważność oddaje niedróżnialność struktur jeśli chodzi o spełniane w nich zdania (języka pierwszego rzędu). Podobnie, klasyfikowanie ze względu na liczbę typów spełnianych w modelu jest porównywaniem modeli biorącym pod uwagę bardziej jeszcze złożone własności semantyczne i wiąże się także z rozmaitością zbiorów definiowalnych w poszczególnych modelach.

Uwagi o klasyfikowaniu

Przy okazji, dodajmy jeszcze komentarz dotyczący zupełności teorii, czyli elementarnej równoważności wszystkich jej modeli. Jak już wiemy, wiele podstawowych, interesujących matematyków teorii to teorie niezupełne: arytmetyka PA, teoria mnogości, by wymienić te dwie najczęściej przywoływane w tym kontekście. Jednak w wielu twierdzeniach teorii modeli istotne jest założenie zupełności rozważanych teorii.

Dlaczego to założenie ma tak uprzywilejowaną pozycję? Między innymi dlatego, że teorie zupełne to takie, których modele nie mogą być odróżnione poprzez zdania pierwszego rzędu. W teorii zupełnej jej modele są scharakteryzowane z całą mocą, na którą pozwala język logiki pierwszego rzędu.

Uwagi o klasyfikowaniu

Oprócz samego klasyfikowania struktur, możemy też pytać np. o to, ***jakiego rodzaju*** struktury występują w poszczególnych członach klasyfikacji (powiedzmy, czy muszą być wyposażone w określoną strukturę algebraiczną).

Widzieliśmy, że operacje na strukturach zachowują określone typy zdań. Mamy więc również klasyfikacje tych operacji, uwzględniające to, jakiego rodzaju zdania (uniwersalne, egzystencjalne, Hornowskie, itp.) są przez te operacje zachowywane.

Uwagi o klasyfikowaniu

Do ważnych wyników teorii modeli należą również twierdzenia, ustalające związki miedzy poszczególnymi klasyfikacjami. Struktury izomorficzne są oczywiście elementarnie równoważne (lecz nie na odwrót).

Znamy związki między elementarną równoważnością a istnieniem rodzin częściowych izomorfizmów, posiadających stosowne własności rozszerzania. Mamy zatem czysto algebraiczną charakterystykę semantycznego pojęcia elementarnej równoważności. Takimi charakterystykami są również twierdzenia opisujące klasy elementarne w terminach domknięcia na pewne operacje algebraiczne na strukturach.

Uwagi o klasyfikowaniu

Dolne i górne twierdzenie Löwenheima-Skolema mówi, wyrażając się swobodnie, że logika pierwszego rzędu nie odróżnia mocy nieskończonych. W połączeniu z twierdzeniem o pełności (lub z twierdzeniem o zwartości) twierdzenie Löwenheima-Skolema podaje charakterystykę logiki pierwszego rzędu. Konsekwencją twierdzenia Löwenheima-Skolema jest m.in. to, że żadna teoria, która ma model nieskończony, nie może być kategoryczna. Tak więc, jedynie pojęcie kategoryczności w mocy pozostaje przydatne.

Logika pierwszego rzędu nie wyróżnia żadnej stałej pozalogicznej (predykatu, symbolu funkcyjnego, stałej indywidualnej), co wiemy z twierdzenia udowodnionego przez Grzegorczyka. Jednak teorie struktur z relacjami określonego rodzaju (np. liniowym porządkiem) są w pewnym sensie wyróżnione. Teoria gęstego liniowego porządku ma w każdej mocy nieprzeliczalnej κ maksymalną możliwą liczbę modeli nieizomorficznych, co ma pewne ważne konsekwencje dla klasyfikowania struktur i teorii.

Uwagi o klasyfikowaniu

Twierdzenie Rylla-Nardzewskiego charakteryzuje teorie $\aleph_0$-kategoryczne (czyli takie, których wszystkie modele przeliczalne są izomorficzne) w terminach semantycznych, poprzez odwołanie się do liczby typów spełnianych w modelach. Z kolei, twierdzenie Morleya ustala, mówiąc swobodnie, że żadna moc nieprzeliczalna nie jest wyróżniona, jeśli chodzi o kategoryczność w mocy.

Pozostaje jednak problem: czy możemy inaczej jeszcze (niż ze względu na izomorfizm) klasyfikować struktury dla teorii, które nie są kategoryczne w mocach nieskończonych? Czy potrafimy scharakteryzować funkcję $\mu(T,\kappa)$, której wartością jest liczba nieizomorficznych modeli mocy κ dla teorii T? Na czym miałaby taka charakterystyka polegać? Czy miałaby się wiązać z liczbą typów spełnianych w modelach czy może z innymi semantycznymi własnościami teorii? Odpowiedzi na te pytania dostarczyła rozwijana głównie przez Saharona Shelaha ***teoria klasyfikacji***.

Uwagi o klasyfikowaniu

Powiedzieć, że będziemy klasyfikować struktury z dokładnością do izomorfizmu to jeszcze za mało. Trzeba mianowicie dodać, jakie wybierzemy ***niezmienniki*** naszych klasyfikacji. Rozważmy prosty przykład.

Bierzemy pod uwagę teorię T struktur o postaci (A, E_1, E_2), gdzie E_1, E_2 są relacjami równoważności na zbiorze A takimi, iż:

- $E_2 \subseteq E_1$ (czyli każda E_2-klasa jest zawarta w pewnej E_1-klasie).
- Każda E_2-klasa ma nieskończenie wiele elementów.
- E_1-klasa zawiera nieskończenie wiele E_2-klas.
- Istnieje nieskończenie wiele E_1-klas.

Uwagi o klasyfikowaniu

Wtedy T jest teorią zupełną, co wynika z twierdzenia Vaughta i faktu, że T jest $\aleph_0$-kategoryczna. W jaki sposób (z dokładnością do izomorfizmu) klasyfikować modele tej teorii? Każda E_1-klasa mocy $\aleph_\alpha$ w modelu teorii T jest określona jednoznacznie (z dokładnością do izomorfizmu) przez funkcję, która każdej liczbie kardynalnej $\aleph_\beta \leqslant \aleph_\alpha$ przyporządkowuje liczbę klas E_2-równoważności o mocy $\aleph_\beta$ zawartych w tej E_1-klasie. Inaczej mówiąc, każda E_1-klasa mocy $\aleph_\alpha$ w modelu teorii T jest określona jednoznacznie (z dokładnością do izomorfizmu) przez uporządkowany ciąg długości α liczb kardynalnych niewiększych od $\aleph_\alpha$. Tak więc, jeśli $\mathfrak{A} = (A, E_1, E_2)$ jest modelem T mocy κ, to typ izomorfizmu struktury $\mathfrak{A}$ jest całkowicie określony poprzez funkcję przyporządkowującą każdemu ciągowi długości α liczb kardynalnych niewiększych od $\aleph_\alpha$ (gdzie $\aleph_\alpha \leqslant \kappa$) liczbę E_1-klas w $\mathfrak{A}$ odpowiadającą temu ciągowi.

Uwagi o klasyfikowaniu

Niech C będzie klasą liczb kardynalnych. Przez indukcję pozaskończoną definiujemy klasy C^α, gdzie α jest liczbą porządkową:

- C^0 jest klasą C.
- Jeśli $\alpha = \beta + 1$, to $C^\alpha = C^\beta \cup \wp(C^\beta)$.
- Jeśli α jest liczbą graniczną, to $C^\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} C^\beta$.

Niech T będzie teorią zupełną, a α liczbą porządkową. Mówimy, że T ma ***system niezmienników*** rzędu α, jeśli istnieje funkcja f przyporządkowująca każdemu modelowi teorii T pewien element C^α i to w taki sposób, że modele $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ są izomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy $f(\mathfrak{A}) = f(\mathfrak{B})$.
Dla przykładu, teoria wspomniana na początku tego punktu ma system niezmienników rzędu 4.

Uwagi o klasyfikowaniu

Mówimy, że teoria jest ***klasyfikowalna***, gdy T ma system niezmienników rzędu α dla pewnej liczby porządkowej α. Zachodzi następujący fakt:

- *Niech T będzie teorią zupełną taką, że dla każdej mocy nieprzeliczalnej λ teoria T ma 2^λ parami nieizomorficznych modeli mocy λ. Wtedy T nie jest klasyfikowalna.*

Tak więc, jeśli wcześniej określona funkcja $\mu(T, \lambda)$ przyjmuje dla każdego argumentu λ swoją maksymalną możliwą wartość, to teoria T jest nieklasyfikowalna. Teoria gęstych liniowych porządków jest $\aleph_0$-kategoryczna. Jednak w każdej mocy nieprzeliczalnej λ teoria ta ma 2^λ parami nieizomorficznych modeli mocy λ, a zatem jest nieklasyfikowalna. Podobnie, (zupełna) teoria porządków liniowych na zbiorach nieskończonych także spełnia warunki powyższego twierdzenia, a więc nie jest klasyfikowalna.

Niestandardowy model arytmetyki

Arytmetyka PA nie jest κ-kategoryczna w żadnej mocy nieskończonej κ. Ma więc wiele modeli (także przeliczalnych), które nie są izomorficzne z jej modelem standardowym $\mathfrak{N}_0$. Podamy przykład takiego modelu niestandardowego, pochodzący od Thoralfa Skolema, wykorzystując jego przedstawienie w artykule Zygmunt 1973.

Lemat. *Jeśli $(f_n)_{n\in\omega}$ jest ciągiem funkcji (jednoargumentowych) określonych na zbiorze liczb naturalnych o wartościach w tym zbiorze, to istnieje funkcja rosnąca $g : \omega \to \omega$ taka, że dla wszystkich $i, j \in \omega$ oraz dowolnej $t \geqslant \max(i, j)$ zachodzi jeden z następujących warunków:*

- $f_i(g(t)) > f_j(g(t))$
- $f_i(g(t)) = f_j(g(t))$
- $f_i(g(t)) < f_j(g(t))$.

Niestandardowy model arytmetyki

Niech F będzie zbiorem wszystkich (jednoargumentowych) funkcji z ω w ω definiowalnych w języku pierwszego rzędu. Jest ich przeliczalnie wiele, a zatem możemy uważać F za ciąg $(f_1, f_2, \ldots)$. Niech g będzie funkcją istniejącą dla tego ciągu na mocy udowodnionego przed chwilą lematu. Określimy relację $\approx$ na zbiorze F w sposób następujący:

- $f_i \approx f_j$ dokładnie wtedy, gdy $f_i(g(t)) = f_j(g(t))$ dla wszystkich $t \geqslant \max(i, j)$.

Wtedy $\approx$ jest relacją równoważności na F. Określimy teraz model:

$$\mathfrak{N}^* = (dom(\mathfrak{N}^*), \mathbf{0}, \mathbf{1}, \oplus, \otimes, \preceq)$$

Niestandardowy model arytmetyki

- $dom(\mathfrak{N}^* = F/\approx$, czyli uniwersum naszego modelu to rodzina klas równoważności relacji $\approx$,
- $\mathbf{0}$ jest klasą $\approx$-równoważności funkcji stałej równej 0;
- $\mathbf{1}$ jest klasą $\approx$-równoważności funkcji stałej równej 1;
- $[f_i]_\approx \oplus [f_j]_\approx = [h]_\approx$ dokładnie wtedy, gdy $h(t) = f_i(t) + f_j(t)$ dla wszystkich $t \geqslant \max(i, j)$;
- $[f_i]_\approx \otimes [f_j]_\approx = [h]_\approx$ dokładnie wtedy, gdy $h(t) = f_i(t) \cdot f_j(t)$ dla wszystkich $t \geqslant \max(i, j)$;
- $[f_i]_\approx \preceq [f_j]_\approx$ dokładnie wtedy, gdy istnieje funkcja h taka, że $[f_i]_\approx \oplus [h]_\approx = [f_j]_\approx$.

Niestandardowy model arytmetyki

Można udowodnić, że w $\mathfrak{N}^*$ prawdziwe są wszystkie aksjomaty arytmetyki PA. $\mathfrak{N}^*$ jest oczywiście niestandardowym modelem PA. Jego ***część standardową*** stanowią klasy $\approx$-równoważności wszystkich funkcji stałych; klasy $\approx$-równoważności wszystkich pozostałych elementów są większe, w sensie relacji $\preceq$.

- Model $\mathfrak{N}^*$ jest przeliczalny.
- Dowodzi się istnienia modeli nieprzeliczalnych dla PA, wykorzystując w ich konstrukcji np. pewne fakty algebraiczne bądź topologiczne.
- Zauważmy jeszcze, że omawiany wyżej model niestandardowy $\mathfrak{N}^*$ jest izomorficzny z potęgą zredukowaną modelu $(F, 0, 1, +, \cdot, \leqslant)$ względem filtru wszystkich koskończonych podzbiorów zbioru ω.

Niestandardowy model arytmetyki

Przypomnijmy jeszcze, że do konstrukcji niestandardowego modelu dla arytmetyki PA możemy wykorzystać twierdzenie o zawartości. Rozszerzamy język arytmetyki PA o nową stałą c. Niech ψ_n będzie zdaniem: $\neg c \doteq \overline{n}$, gdzie $\overline{n}$ jest liczebnikiem nazywającym liczbę naturalną n. Jak pamiętamy, $\overline{n}$ jest termem, który otrzymujemy stosując n razy symbol następnika do stałej zero. Zbiór zdań $\Delta = \{\psi_n : n \in \omega\}$ jest niesprzeczny na mocy twierdzenia o zwartości, ponieważ każdy jego skończony podzbiór jest niesprzeczny. Istotnie, każdy skończony podzbiór zbioru Δ ma model, w którym stałą c możemy interpretować jako np. następnik największej liczby n takiej, że $\psi_n \in \Delta$. Na mocy twierdzenia o istnieniu modelu niesprzeczny zbiór Δ ma zatem model $\mathfrak{A}$. Interpretacja stałej c w tym modelu musi być różna od interpretacji wszystkich liczebników, a zatem musi być różna od wszystkich liczb naturalnych. Mówimy w takim przypadku, że interpretacja stałej c jest ***liczbą niestandardową***.

Modele skończone

- Badanie modeli skończonych jest ważne m.in. ze względu na mnogość zastosowań takich modeli, w ostatnich latach przede wszystkim w informatyce teoretycznej. Dla modeli skończonych nie zachodzi wiele ważnych wyników ogólnej teorii modeli. Z drugiej strony, w teorii takich modeli mamy szereg twierdzeń, które zachowują ważność jedynie w dziedzinach skończonych.

Logika pierwszego rzędu jest:

- zbyt silna dla dokładniejszego badania modeli skończonych, ponieważ można w niej opisać każdy model skończony z dokładnością do izomorfizmu;
- zbyt słaba dla badania modeli skończonych, gdyż nie można w niej wyrazić takich np. pojęć jak spójność grafu, albo faktu, że uniwersum modelu ma parzystą liczbę elementów.

Modele skończone

Biorąc powyższe pod uwagę, rozważa się nieco inne języki w opisie struktur skończonych, np.:

- L^k — fragment logiki pierwszego rzędu, w którym dysponujemy jedynie skończoną liczbą k zmiennych, powiedzmy $x_1, \ldots, x_k$;
- $L^k_{\omega_1\omega}$ — fragment logiki $L_{\omega_1\omega}$, w którym dysponujemy jedynie skończoną liczbą k zmiennych, powiedzmy $x_1, \ldots, x_k$;
- C^k — logika L^k wraz z kwantyfikatorami numerycznymi (w rodzaju: $\exists^{\leqslant n}$ — istnieje co najwyżej n przedmiotów, itp.).

- Logiki ze skończoną liczbą zmiennych mogą zostać wykorzystane np. w aksjomatycznym ujęciu rachunku relacji.

Modele skończone

- $\mathfrak{A} \equiv^k \mathfrak{B}$, gdy struktury $\mathfrak{A}$ oraz $\mathfrak{B}$ spełniają dokładnie te same zdania języka logiki L^k;
- $\mathfrak{A} \equiv^k_m \mathfrak{B}$, gdy struktury $\mathfrak{A}$ oraz $\mathfrak{B}$ spełniają dokładnie te same zdania rzędu kwantyfikatorowego $\leqslant m$ języka logiki L^k.

- Podobnie jak w przypadku logiki pierwszego rzędu (zobacz punkt: *Twierdzenie Fraïssé'go*) powyższe relacje semantyczne mogą zostać scharakteryzowane algebraicznie, w terminach teorii gier (tzw. *pebble games*), dla wszystkich trzech wymienionych wyżej logik.

Modele skończone

Łatwo podać przykład zbioru zdań Γ takiego, że każdy skończony podzbiór zbioru Γ ma model skończony, ale Γ modelu skończonego nie ma. Wystarczy przyjąć:

$$\Gamma = \{\exists^{\geqslant n} x\, (x \doteq x) : n \in \omega\}.$$

- Przykład ten pokazuje, że w teorii modeli skończonych ***nie*** zachodzi twierdzenie o zwartości.
- Dość podobnie pokazuje się, że w teorii modeli skończonych ***nie*** zachodzi twierdzenie o pełności.

Twierdzenie Traktenbrota

- **Twierdzenie Traktenbrota**. *Istnieje skończona sygnatura σ taka, że zbiór (numerów) wszystkich zdań (języka KRP o sygnaturze σ) prawdziwych we wszystkich strukturach skończonych należących do Str_σ nie jest rekurencyjnie przeliczalny.*

Jako konsekwencje tego twierdzenia otrzymujemy:

- *Zbiór zdań skończenie spełnialnych (czyli prawdziwych w co najmniej jednym modelu skończonym) nie jest rekurencyjny.*
- *Zbiór zdań skończenie logicznie prawdziwych (czyli prawdziwych we wszystkich modelach skończonych) nie jest rekurencyjnie przeliczalny.*

Dygresja: graf losowy

Zakładamy, że czytelnik pamięta podstawowe pojęcia dotyczące prawdopodobieństwa. Przypuśćmy, że na jakimś skończonym zbiorze wierzchołków chcemy zbudować graf, czyli zdecydować, które wierzchołki zostaną połączone krawędzią. Niech decyzje te będą losowe, z prawdopodobieństwem odpowiedzi *tak* lub *nie* identycznym i równym $\frac{1}{2}$.

- Dla zbioru wierzchołków $\{v_1, \ldots, v_n\}$ trzeba zatem podjąć $\frac{n(n-1)}{2}$ decyzji. Oznaczmy tę liczbę przez $e(n)$.
- Gdy budujemy graf opisaną metodą losową, mamy $2^{e(n)}$ możliwości, równie prawdopodobnych.
- Dla dowolnego zdania ψ, niech $P_n(\psi)$ będzie prawdopodobieństwem, że zbudowany graf o n wierzchołkach jest modelem dla ψ.

Dygresja: graf losowy

Rozważmy dwa proste przykłady:

- Niech ψ będzie zdaniem $\forall x \forall y\ (x \doteq y \vee R(x,y))$. Dla każdej n, zdanie to zachodzi tylko w jednym grafie o n wierzchołkach, a mianowicie w grafie pełnym (n-klice). Tak więc, $P_n(\psi) = \frac{1}{2^{e(n)}}$.
- Niech zdanie ψ stwierdza, że graf ma dokładnie jedną krawędź (zdanie to łatwo zapisać przy użyciu kwantyfikatorów numerycznych). Dla każdej n, jest $e(n)$ grafów o n wierzchołkach, w których ψ jest prawdziwe. Tak więc, $P_n(\psi) = \frac{e(n)}{2^{e(n)}}$.

Dygresja: graf losowy

Rozważmy teraz, dla każdej m, następujące zdanie ψ_m:

$$\forall x_1 \ldots \forall x_m \forall y_1 \ldots \forall y_m \, (\bigwedge_{i=1}^{m} (\bigwedge_{j=1}^{m} \neg x_i \doteq y_j)) \rightarrow \exists z \, (\bigwedge_{i=1}^{m} R(x_i, z) \wedge \bigwedge_{j=1}^{m} \neg(R(z, y_j) \vee z = y_j)).$$

Zdanie to stwierdza, że dla dowolnych rozłącznych zbiorów wierzchołków $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$ oraz $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$ istnieje wierzchołek $z \notin X \cup Y$ taki, że z jest połączony krawędzią ze wszystkimi wierzchołkami w X, a nie jest połączony krawędzią z żadnym wierzchołkiem z Y. Można udowodnić, że:

$$\lim_{n \to \infty} P_n(\psi_m) = 1.$$

Dygresja: graf losowy

Zdefiniujmy teraz teorię T_{RG}, której aksjomatami są:

- $\forall x \, \neg R(x, x)$
- $\forall x \forall y \, (R(x, y) \equiv R(y, x))$
- $\exists x_1 \ldots \exists x_n \, (\bigwedge\limits_{i \neq j} \neg(x_i \doteq x_j))$, dla każdej $n \in \omega$
- ψ_m, dla każdej $m \in \omega$.

- T_{RG} jest $\aleph_0$-kategoryczna.
- W konsekwencji, T_{RG} jest zupełna.

Dygresja: graf losowy

Przez ***graf losowy*** rozumiemy jedyny (z dokładnością do izomorfizmu) model przeliczalny teorii T_{RG}, który oznaczamy przez G_R. Pokazuje się, że każdy graf skończony można elementarnie włożyć w dowolny model teorii T_{RG}. Wreszcie, bezpośrednią konsekwencją zupełności teorii T_{RG} są następujące prawa, nazywane ***prawami*** $0 - 1$ (dla grafów):

- Dla każdego zdania ψ teorii grafów zachodzi alternatywa: $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(\psi) = 0$ lub $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(\psi) = 1$.

- Podobne prawa uzyskujemy, gdy rozważamy język jedynie ze skończoną liczbą predykatów.

Poza logikę pierwszego rzędu

Praktyka badawcza matematyki nie jest ograniczona logiką pierwszego rzędu. Ważne są zatem ustalenia dotyczące własności logik od niej silniejszych. O niektórych mówiliśmy w wykładach 4–5. Poniżej uzupełnimy te uwagi w odniesieniu do:

- *logiki drugiego rzędu*
- *logik infinitarnych*.

Słuchacze zainteresowani poważnie tą problematyką (także w odniesieniu do innych rodzajów logik) zechcą zajrzeć np. do monumentalnej monografii Barwise, J., Feferman, S. (eds.) 1985. *Model-Theoretic Logics.* Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg Tokyo.

Logika drugiego rzędu

W ogólności, rozważa się dwa rodzaje semantyk dla logiki drugiego rzędu: w jednej z nich dopuszcza się, aby zmienne drugiego rzędu przebiegały cały zbiór potęgowy wszystkich skończonych iloczynów kartezjańskich uniwersum modelu, w drugiej ogranicza się ten zakres do pewnej podrodziny tego zbioru potęgowego.

W tzw. ***słabej logice drugiego rzędu*** dopuszcza się kwantyfikację po jedynie skończonych podzbiorach uniwersum modelu.

Z kolei, w ***monadycznej logice drugiego rzędu*** posługujemy się jedynie predykatami jednoargumentowymi (czyli możemy kwantyfikować jedynie po podzbiorach uniwersum, a nie po podzbiorach iloczynów kartezjańskich uniwersum).

Logika drugiego rzędu

Składnia logiki drugiego rzędu jest bardzo podobna do tej dla logiki rzędu pierwszego. Niech L będzie językiem pierwszego rzędu. Aby otrzymać język drugiego rzędu, dodajemy zbiór nowych zmiennych $\{X_n : n \in \omega\}$. Rozważmy teraz dwa przypadki:

- język L^{2m} monadycznej logiki drugiego rzędu
- język L^2 pełnej logiki drugiego rzędu.

W przypadku monadycznym zbiór ***termów*** L^{2m} jest taki sam jak zbiór termów L. ***Formuły atomowe*** L^{2m} obejmują formuły atomowe L oraz dodatkowo wszelkie wyrażenia o postaci $X_n(t)$, gdzie t jest termem, a X_n zmienną drugiego rzędu.

Logika drugiego rzędu

Indukcyjna definicja ***formuły*** języka monadycznej logiki drugiego rzędu wymaga dodania warunku:

- Jeśli ψ jest formułą, to formułami są również $\exists R\ \psi$ oraz $\forall R\ \psi$, dla dowolnego predykatu R z sygnatury rozważanego języka.

Struktury (interpretacje) dla L^{2m} są takie same jak dla L. ***Wartościowaniem*** w $\mathfrak{A}$ jest teraz para funkcji (α, β), gdzie α przyporządkowuje zmiennym indywidualnym (pierwszego rzędu) elementy uniwersum struktury $\mathfrak{A}$, natomiast β przyporządkowuje zmiennym drugiego rzędu podzbiory uniwersum struktury $\mathfrak{A}$. ***Wartość*** $t^{\mathfrak{A}}[\alpha, \beta]$ termu t w strukturze $\mathfrak{A}$ przy wartościowaniu (α, β) jest identyczna z wartością termu t w strukturze $\mathfrak{A}$ przy wartościowaniu α. Definicję ***spełniania formuły w strukturze przez wartościowanie*** trzeba rozszerzyć o warunki:

Logika drugiego rzędu

- $\mathfrak{A} \models X_n(t)[\alpha, \beta]$, gdy $t^{\mathfrak{A}}[\alpha] \in \beta(X_n)$;
- $\mathfrak{A} \models \exists X_n\, \psi[\alpha, \beta]$, gdy istnieje $B \subseteq dom(\mathfrak{A})$ taki, że $\mathfrak{A} \models \psi[\alpha, \beta^B_{X_n}]$, gdzie $\beta^B_{X_n}$ jest wartościowaniem różniącym się od β co najwyżej tym, iż zmiennej X_n przyporządkowuje zbiór B;
- $\mathfrak{A} \models \forall X_n\, \psi[\alpha, \beta]$, gdy dla wszystkich $B \subseteq dom(\mathfrak{A})$ taki, że $\mathfrak{A} \models \psi[\alpha, \beta^B_{X_n}]$, gdzie $\beta^B_{X_n}$ jest wartościowaniem różniącym się od β co najwyżej tym, iż zmiennej X_n przyporządkowuje zbiór B.

W pełnej logice drugiego rzędu L^2 do języka dodajemy dwie nieskończone rodziny zbiorów zmiennych (drugiego rzędu):

- $\{R^k_n : n \in \omega\}$ zmienne dla predykatów k-argumentowych, dla każdej $k \in \omega$;
- $\{F^k_n : n \in \omega\}$ zmienne dla symboli funkcyjnych k-argumentowych, dla każdej $k \in \omega$.

Logika drugiego rzędu

Tworzenie formuł języka tej logiki jest oczywiste. Strukturami dla tego języka są struktury dla L. ***Wartościowania*** w strukturze $\mathfrak{A}$ to pary funkcji (α, β) takich, że:

- α przyporządkowuje każdej zmiennej R_n^k pewną k-argumentową relację między elementami uniwersum struktury $\mathfrak{A}$
- β przyporządkowuje każdej zmiennej F_n^k pewną k-argumentową funkcję określoną na uniwersum struktury $\mathfrak{A}$.

Logika drugiego rzędu

Definicje ***wartości termu w strukturze przy danym wartościowaniu*** oraz ***spełniania formuły w strukturze przez wartościowanie*** definiujemy w oczywisty sposób, dla przykładu:

- $(F_n^k(t_1, \ldots, t_k))^{\mathfrak{A}}[\alpha, \beta] = \beta(F_n^k)(t_1^{\mathfrak{A}}[\alpha, \beta], \ldots, t_k^{\mathfrak{A}}[\alpha, \beta])$
- $\mathfrak{A} \models R_n^k(t_1, \ldots, t_k)[\alpha, \beta]$ dokładnie wtedy, gdy $(t_1^{\mathfrak{A}}[\alpha, \beta], \ldots, t_k^{\mathfrak{A}}[\alpha, \beta]) \in \beta(R_n^k)$
- $\mathfrak{A} \models \exists F_n^k\ \psi[\alpha, \beta]$ dokładnie wtedy, gdy istnieje funkcja k-argumentowa f określona na uniwersum struktury $\mathfrak{A}$ taka, że $\mathfrak{A} \models \psi[\alpha, \beta^f_{F_n^k}]$
- $\mathfrak{A} \models \forall R_n^k\ \psi[\alpha, \beta]$ dokładnie wtedy, gdy dla każdej relacji k-argumentowej $r \subseteq (dom(\mathfrak{A}))^k$ zachodzi $\mathfrak{A} \models \psi[\alpha, \beta^r_{R_n^k}]$.

Logika drugiego rzędu

W podobny sposób określa się podstawowe pojęcia składniowe i semantyczne dla logik jeszcze wyższych rzędów (trzeciego, czwartego, itd.). Wreszcie, możemy też określić język ***teorii typów***, zawierający w sobie wszystkie języki logik wyższych rzędów i w odpowiedni sposób podać dlań definicje pojęć składniowych i semantycznych.

W niniejszym punkcie podamy jeszcze jedynie, dla ilustracji, dwie rzeczy:

- przykłady zdań logik L^{2m} oraz L^2, wyrażających ważne pojęcia matematyczne (niewyrażalne w logice pierwszego rzędu);
- kilka uwag o własnościach metalogicznych L^{2m} oraz L^2.

Logika drugiego rzędu

1. Niech ψ_1 w języku z jednym predykatem dwuargumentowym $\prec$ będzie koniunkcją zdań:

- zdania stwierdzającego, że $\prec$ jest ostrym porządkiem liniowym oraz zdania
- $\forall X\, (\exists y\, X(y) \rightarrow \exists y\, (X(y) \wedge \neg \exists z\, (X(z) \wedge z \prec y)))$.

Wtedy struktura $\mathfrak{A} = (A, \prec^{\mathfrak{A}})$ dla rozważanego języka spełnia zdanie ψ_1 dokładnie wtedy, gdy $\prec^{\mathfrak{A}}$ jest dobrym porządkiem jej uniwersum.

2. Niech ψ_2 będzie aksjomatem indukcji (w języku ze stałą 0 zero oraz symbolem funkcyjnym s następnika), jak w oryginalnym sformułowaniu Peana. Wtedy modelami zdania ψ_2 są dokładnie te struktury $\mathfrak{A}$, dla których: $dom(\mathfrak{A}) = \{\overline{n}^{\mathfrak{A}} : n \in \omega\}$, gdzie $\overline{n}$ jest liczebnikiem nazywającym liczbę n.

Logika drugiego rzędu

3. Niech ψ_3 będzie koniunkcją następujących zdań:

- ψ_1
- $\forall x\, (\exists y\, y \prec x \rightarrow \exists y\, (y \prec x \wedge \forall z\, (z \prec x \rightarrow (z \prec y \vee z \doteq y))))$.

Drugie z tych zdań stwierdza, że element, który ma jakikolwiek poprzednik ma też bezpośredni poprzednik (względem porządku $\prec$). Jeśli $\mathfrak{A}$ spełnia zdanie ψ_3, to $\prec^{\mathfrak{A}}$ jest dobrym porządkiem w jej uniwersum, który jest albo skończony, albo ma typ porządkowy ω. Tak więc, zdanie ψ_3 ma modele skończone oraz przeliczalnie nieskończone, ale nie ma modeli nieprzeliczalnych.

Logika drugiego rzędu

4. Przyjmijmy naturalne oznaczenie: $x \preceq y$ dla $x \prec y \vee x \doteq y$. Niech ψ_4 będzie koniunkcją następujących zdań:

- zdania stwierdzającego, że $\prec$ jest gęstym porządkiem liniowym bez końców (zobacz rozdział 2)
- $\forall X\, (\exists y\, (X(y) \wedge \exists z \forall y\, (X(y) \rightarrow y \preceq z)) \rightarrow \exists z\, (\forall y\, (X(y) \rightarrow y \preceq z) \wedge \forall w\, (\forall y\ \, (X(y) \rightarrow y \preceq w) \rightarrow (z \preceq w))))$.

Drugie z tych zdań wyraża zupełność porządku. Tak więc, modelami ψ_4 są te struktury $\mathfrak{A}$, w których $\prec$ jest interpretowany jako (gęsty liniowy bez końców) porządek zupełny: każdy niepusty zbiór ograniczony z góry ma kres górny. Dla takich struktur $\mathfrak{A}$ istnieje włożenie zbioru liczb rzeczywistych z ich naturalnym porządkiem w $\mathfrak{A}$. Wynika stąd, że zdanie ψ_4 ma modele mocy co najmniej $2^{\aleph_0}$, ale nie ma modeli mocy mniejszych.

Logika drugiego rzędu

5. Niech ψ_5 będzie zdaniem stwierdzającym, iż każda injekcja jest surjekcją:
   - $\forall F\ (\forall x \forall y\ (F(x) \doteq F(y) \rightarrow x \doteq y) \rightarrow \forall y \exists x\ F(x) \doteq y)$.

Wtedy jedynymi strukturami, które spełniają zdanie ψ_5 są struktury skończone.

6. Niech ψ_6 będzie zdaniem $\exists R\ \psi_3$, gdzie w ψ_3 zastępujemy wszystkie wystąpienia $\prec$ przez dwuargumentowy predykat R. Struktura $\mathfrak{A}$ spełnia zdanie ψ_6 dokładnie wtedy, gdy na jej uniwersum istnieje dobry porządek bez elementów granicznych, a zatem dokładnie wtedy, gdy jest ona przeliczalna.

Logika drugiego rzędu

7. Niech ψ_7 będzie zdaniem stwierdzającym, iż istnieje dobry porządek uniwersum taki, że każdy jego segment początkowy jest przeliczalny. Struktura $\mathfrak{A}$ spełnia zdanie ψ_7 dokładnie wtedy, gdy jej moc jest niewiększa od $\aleph_1$.

8. W logice drugiego rzędu można skonstruować zdanie, które jest prawdziwe (zachodzi we wszystkich strukturach) dokładnie wtedy, gdy prawdziwa jest Hipoteza Kontinuum. Wykorzystamy w tym celu zdania: $\psi_8(Y)$, stwierdzające, że zbiór Y jest co najwyżej przeliczalny oraz ψ_4 (stwierdzające, że uniwersum ma moc kontinuum). Zdanie $\psi_8(Y)$ otrzymujemy ze zdania ψ_3, ograniczając wszystkie kwantyfikatory pierwszego rzędu do Y, w znany sposób.

Logika drugiego rzędu

Zdanie, którego szukamy, ma wyrażać własność: jeśli uniwersum jest równoliczne ze zbiorem liczb rzeczywistych, to każdy jego podzbiór jest albo co najwyżej przeliczalny, albo równoliczny z uniwersum (nie jest więc żadnej mocy pośredniej między $\aleph_0$ a $2^{\aleph_0}$). Niech ψ_9 będzie zdaniem:

- $\psi_4 \rightarrow \forall Y\, (\psi_8(Y) \vee \exists G\, (\forall x\; Y(G(x)) \wedge \forall x \forall y\, (G(x) \doteq G(y) \rightarrow x \doteq y) \wedge \forall y\, (Y(y) \rightarrow \exists x\; G(x) \doteq y)))$.

Wtedy zdanie ψ_9 jest prawdziwe dokładnie wtedy, gdy zachodzi Hipoteza Kontinuum. Przykład ten pokazuje, jak silna jest semantyka pełnej logiki drugiego rzędu. Nie należy się zatem spodziewać, iż pełna logika drugiego rzędu może zostać wyposażona w jakikolwiek efektywny, finitystyczny system dowodowy.

Logika drugiego rzędu

Z podanych wyżej przykładów wynikają pewne własności metalogiczne logiki drugiego rzędu. W szczególności, jest widoczne, że w monadycznej logice drugiego rzędu nie zachodzą twierdzenia:

- o zwartości,
- dolne twierdzenie Löwenheima-Skolema,
- górne twierdzenie Löwenheima-Skolema.

Dla dowolnych logik abstrakcyjnych (patrz wykłady 4–5) rozważa się pewne uogólnienia pojęć związanych ze zwartością, spełnianiem twierdzeń Löwenheima-Skolema itd. Podamy, bez dowodów, kilka faktów dotyczących tej problematyki.

Logika drugiego rzędu

Niech $\mathcal{L}$ będzie logiką abstrakcyjną, a κ i λ liczbami kardynalnymi. Mówimy, że:

- logika $\mathcal{L}$ jest (κ, λ) – *zwarta*, gdy dla dowolnego zbioru Δ zdań z $\mathcal{L}$ mocy niewiększej od κ, jeśli każdy podzbiór mocy mniejszej od λ zbioru Δ ma model, to Δ ma model;
- logika $\mathcal{L}$ ma własność ***Löwenheima-Skolema*** (κ, λ)***-w dół***, gdy dla dowolnego zbioru Δ zdań z $\mathcal{L}$ mocy niewiększej od κ, jeśli Δ ma model, to Δ ma model mocy co najwyżej λ;
- logika $\mathcal{L}$ ma własność ***Löwenheima-Skolema*** (κ, λ)***-w górę***, gdy dla dowolnego zbioru Δ zdań z $\mathcal{L}$ mocy niewiększej od κ oraz każdej liczby kardynalnej $\mu < \lambda$, jeśli Δ ma model mocy co najmniej μ, to dla każdej liczby kardynalnej $\nu \geqslant \lambda$, Δ ma model mocy co najmniej ν.

Logika drugiego rzędu

Jeśli w powyższych własnościach κ jest dowolnie duża, to używamy symbolu ∞; dla przykładu, logika pierwszego rzędu:

- jest (∞, ω)-zwarta,
- ma własność Löwenheima-Skolema (κ, κ)-w dół,
- ma własność Löwenheima-Skolema (∞, ω)-w górę.

Dla dowolnej logiki abstrakcyjnej $\mathcal{L}$ oraz liczby kardynalnej κ niech:

- $t_\kappa(\mathcal{L})$ będzie najmniejszą λ taką, że $\mathcal{L}$ jest (κ, λ)-zwarta;
- $\ell_\kappa(\mathcal{L})$ będzie najmniejszą λ taką, że $\mathcal{L}$ ma własność Löwenheima-Skolema (κ, λ)-w dół,
- $h_\kappa(\mathcal{L})$ będzie najmniejszą λ taką, że $\mathcal{L}$ ma własność Löwenheima-Skolema (κ, λ)-w górę.

Logika drugiego rzędu

- $t(\mathcal{L})$ równa z definicji $t_\infty(\mathcal{L})$ nazywana jest ***liczbą Tarskiego*** logiki $\mathcal{L}$;
- $\ell(\mathcal{L})$ równa z definicji $\ell_1(\mathcal{L})$ nazywana jest ***liczbą Löwenheima*** logiki $\mathcal{L}$;
- $h(\mathcal{L})$ równa z definicji $h_1(\mathcal{L})$ nazywana jest ***liczbą Hanfa*** logiki $\mathcal{L}$.

Dla klasycznej logiki pierwszego rzędu $\mathcal{L}_{\omega\omega}$ zachodzą równości:

- $t(\mathcal{L}_{\omega\omega}) = \ell(\mathcal{L}_{\omega\omega}) = h(\mathcal{L}_{\omega\omega}) = \omega$
- Dla każdej nieskończonej κ mamy: $\ell_\kappa(\mathcal{L}_{\omega\omega}) = \kappa$ oraz $h_\kappa(\mathcal{L}_{\omega\omega}) = \omega$.

Logika drugiego rzędu

Dla monadycznej logiki drugiego rzędu mamy wtedy oszacowania:

- $\ell(\mathcal{L}^{2m}) \geqslant 2^{\aleph_0}$
- $h(\mathcal{L}^{2m}) > \aleph_1$
- $t(\mathcal{L}^{2m}) > \aleph_1$.

Definiujemy przez indukcję liczby ***beth***:

- $\beth_0 = \aleph_0$
- $\beth_{\sigma+1} = 2^{\beth_\sigma}$
- $\beth_\lambda = \sup\{\beth_\sigma : \sigma < \lambda\}$ dla granicznych λ.

Zauważmy, że Uogólniona Hipoteza Kontinuum jest równoważna ze stwierdzeniem, że $\aleph_\sigma = \beth_\sigma$ dla wszystkich σ.

Logika drugiego rzędu

Wprowadźmy teraz oznaczenia:

- $\kappa_0 = \aleph_1$
- $\kappa_{n+1} = \beth_{\kappa_n}$
- $\kappa_\omega = \sup\{\kappa_n : n \in \omega\}$.

Wtedy κ_ω jest najmniejszą liczbą kardynalną λ taką, że $\lambda = \beth_\lambda$. Ponadto:

- $h(\mathcal{L}^{2m}) \geqslant \kappa_\omega$
- $t(\mathcal{L}^{2m}) \geqslant \kappa_\omega$
- $\ell(\mathcal{L}^{2m}) \geqslant \kappa_\omega$.

Logika drugiego rzędu

W logice pierwszego rzędu zbiór (numerów gödlowskich) wszystkich konsekwencji logicznych dowolnego rekurencyjnego zbioru (numerów gödlowskich) zdań jest rekurencyjnie przeliczalny. W monadycznej logice drugiego rzędu, a więc tym bardziej w pełnej logice drugiego rzędu, zbiór zdań logicznie prawdziwych nie jest rekurencyjnie przeliczalny.

Nadto, ponieważ istnienie finitarnego systemu dedukcji pełnego względem konsekwencji logicznej w danej logice abstrakcyjnej pociąga za sobą (∞, ω)-zwartość tej logiki, więc ani w monadycznej, ani w pełnej logice drugiego rzędu taki system nie istnieje. Można także pokazać, że nie istnieją dla tych logik pełne systemy dedukcji z pewnego rodzaju infinitarnymi regułami wnioskowania.

Logiki infinitarne

O logikach infinitarnych mówiliśmy już w wykładzie 4. W szczególności, podaliśmy tam nieco uwag o historii tych logik. Poniżej ograniczymy się do:

- przypomnienia kilku slajdów z wykładu 4,
- kilku ustaleń dotyczących własności metalogicznych logik infinitarnych.

Języki infinitarne — składnia

W językach $L_{\kappa\lambda}$, gdzie κ i λ są nieskończonymi liczbami kardynalnymi ($\lambda \leqslant \kappa$) dopuszczalne są koniunkcje i alternatywy długości mniejszej od κ oraz kwantyfikacje na ciągach zmiennych długości mniejszej od λ. W języku $L_{\kappa\lambda}$ mamy następujące symbole:

- symbole języka pierwszego rzędu L (ustalonej sygnatury);
- zbiór zmiennych zdaniowych Var mocy κ;
- symbol operacji $\bigwedge$ (nieskończonej koniunkcji).

Zbiór formuł języka $L_{\kappa\lambda}$ określamy w dwóch etapach.

Języki infinitarne — składnia

Zbiór ***preformuł*** języka $L_{\kappa\lambda}$ określamy indukcyjnie:

- każda formuła L jest preformułą;
- jeśli φ i ψ są preformułami, to $\varphi \wedge \psi$ oraz $\neg\psi$ są preformułami;
- jeśli Φ jest zbiorem preformuł mocy mniejszej od κ, to $\bigwedge \Phi$ jest preformułą;
- jeśli ψ jest preformułą, a $V \subseteq Var$ jest zbiorem zmiennych mocy mniejszej od λ, to $\exists X\ \psi$ jest preformułą;
- każda preformuła jest otrzymana przez powyższe warunki.

Pozostałe funktory prawdziwościowe wprowadzamy w zwykły sposób. Nadto:

- $\bigvee \Phi$ oznacza $\neg \bigwedge\{\neg\varphi : \varphi \in \Phi\}$
- $\forall X\ \psi$ oznacza $\neg\exists X\ \neg\psi$.

Języki infinitarne — składnia i semantyka

Przez ***formułę*** języka $L_{\kappa\lambda}$ rozumiemy preformułę zawierającą mniej niż λ zmiennych wolnych.

Pojęcia semantyczne dla $L_{\kappa\lambda}$ definiujemy tak jak dla L, z dodatkowymi warunkami:

- $\mathfrak{A}$ spełnia $\bigwedge \Phi$ przy wartościowaniu w wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{A}$ spełnia φ przy wartościowaniu w, dla wszystkich $\varphi \in \Phi$;
- $\mathfrak{A}$ spełnia $\exists X\ \psi$ przy wartościowaniu w wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg $\overrightarrow{a}$ elementów $dom(\mathfrak{A})$ spełniający ψ oraz bijekcja między X i $\overrightarrow{a}$.

Pozostałe pojęcia semantyczne (prawdziwości, wynikania logicznego, itd.) definiujemy w standardowy sposób.

Moc wyrażania logik infinitarnych

Języki $L_{\kappa\lambda}$, gdzie $\lambda \geqslant \omega_1$ „zachowują się" podobnie jak języki drugiego rzędu.
Przez $L_{\infty\omega}$ rozumiemy język z koniunkcjami i alternatywami ***dowolnej*** długości oraz skończonymi prefiksami kwantyfikatorowymi.

- Zdanie $Q_0 x\, \psi(x)$ języka L_{Q_0} (stwierdzające, że istnieje nieskończenie wiele x o własności ψ) ma te same modele co następujące zdanie z $L_{\omega_1\omega}$:
  $\neg \bigvee\limits_{n\in\omega} \exists x_1 \ldots \exists x_n \forall x\, (\psi(x) \rightarrow (x \doteq x_1 \vee \ldots \vee x \doteq x_n))$.
- Pojęcie dobrego porządku nie jest definiowalne w $L_{\omega_1\omega}$, jest natomiast definiowalne w $L_{\omega_1\omega_1}$ przez koniunkcję zdania charakteryzującego porządki liniowe i zdania:
  $(\forall x_n)_{n\in\omega} \exists x\, (\bigvee\limits_{n\in\omega} (x \doteq x_n) \wedge \bigwedge\limits_{n\in\omega} (x \leqslant x_n))$.

Moc wyrażania logik infinitarnych

- Predykat prawdziwości formuł języka o przeliczalnej liczbie symboli jest definiowalny w $L_{\omega_1\omega}$.
- W $L_{\omega_1\omega}$ dowolną przeliczalną strukturę z przeliczalną liczbą relacji można scharakteryzować z dokładnością do izomorfizmu (Twierdzenie Scotta).
- Teoria uporządkowanych ciał archimedesowych jest w $L_{\omega_1\omega}$ skończenie aksjomatyzowalna.
- Własności semantyczne modeli dla logik $L_{\kappa\lambda}$ i $L_{\infty\omega}$ (np. elementarną równoważność) można charakteryzować metodami algebraicznymi (twierdzenie Karp o częściowych izomorfizmach).
- W $L_{\omega_1\omega}$ zachodzi Lemat Interpolacyjny Craiga (nie zachodzi on w żadnej innej logice infinitarnej).

Logiki infinitarne

- Dolne twierdzenie Löwenheima-Skolema ma swój odpowiednik w $L_{\omega_1\omega}$ oraz właściwie we wszystkich logikach infinitarnych. Natomiast górne twierdzenie Löwenheima-Skolema-Tarskiego w swojej zwykłej formie nie zachodzi w tych logikach.
- W $L_{\omega_1\omega}$ zachodzi twierdzenie o pełności, gdy na infinitarną regułę wnioskowania pozwalającą wywnioskować koniunkcję $\bigwedge \Phi$ ze zbioru przesłanek Φ narzucimy warunek, aby Φ był przeliczalny.
- Ani w $L_{\omega_1\omega}$, ani w żadnej z logik $L_{\kappa\lambda}$, gdzie $\kappa \geqslant \aleph_1$, nie zachodzi twierdzenie o zwartości. Rozważano jednak stosowne modyfikacje tego twierdzenia i wykazano, iż zachodzenie tych uogólnionych wersji twierdzenia o zwartości powiązane jest z istnieniem dużych liczb kardynalnych.

Logiki infinitarne

Dowodzi się, że:

- $L_{\omega_1\omega}$ nie jest (ω, ω)-zwarta.
- $t(L_{\omega_1\omega}) \geqslant \aleph_1$.
- $h(L_{\omega_1\omega}) \geqslant \aleph_1$.
- Jeśli κ jest dowolną liczbą kardynalną nieskończoną, to:
  1. $\ell(L_{\kappa^+\omega}) \geqslant \kappa$
  2. $h(L_{\kappa^+\omega}) > \kappa^+$
  3. $t(L_{\kappa^+\omega}) > \kappa^+$
  4. $L_{\kappa^+\omega}$ nie jest (κ^+, κ^+)-zwarta.
- Jeśli κ jest dowolną liczbą kardynalną graniczną, to:
  1. $\ell(L_{\kappa\omega}) \geqslant \kappa$
  2. $h(L_{\kappa\omega}) \geqslant \kappa$
  3. $t(L_{\kappa\omega}) \geqslant \kappa$.

Logiki infinitarne

Wersje zwartości języków infinitarnych wiążą się z istnieniem dużych liczb kardynalnych. Powiemy mianowicie, że nieskończona liczba kardynalna κ jest:

- ***słabo zwarta***, gdy logika $L_{\kappa\omega}$ jest (κ, κ)-zwarta;
- ***mocno zwarta***, gdy logika $L_{\kappa\omega}$ jest (∞, κ)-zwarta.

Zachodzą wtedy następujące fakty:

- Każda liczba słabo zwarta jest słabo nieosiągalna.
- Każda liczba mocno zwarta jest mocno nieosiągalna.

Ponadto, stosownie określone systemy dedukcji dla logik infinitarnych $L_{\kappa\omega}$ nie mogą być pełne, jeśli κ nie jest liczbą mocno zwartą. Można jednak określić pewne słabsze pojęcia pełności dla takich logik. Jak już wspomniano, w szczególności logika $L_{\omega_1\omega}$ może zostać wyposażona w tak rozumiany pełny system dedukcyjny.

Wykorzystywana literatura

- Adamowicz, Z., Zbierski, P. 1991. *Logika matematyczna*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.
- Addison, J.W., Henkin, L., Tarski, A. (eds.) 1965. *The theory of models*. North-Holland, Amsterdam.
- Badesa, C. 2004. *The birth of model theory. Löwenheim's theorem in the frame of the theory of relatives*. Princeton University Press, Princeton and Oxford.
- Batóg, T. 1999. *Podstawy logiki*. Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań.
- Bell, J.L., Machover, M. 1977. *A course in mathematical logic*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam.
- Bell, J.L., Slomson, A.B. 1969. *Models and ultraproducts: an introduction*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam London.

Wykorzystywana literatura

- Chang, C.C., Keisler, J.H. 1973. *Model theory*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam London; American Elsevier Publishing Company, Inc., New York.
- Cohn, P. 1965. *Universal algebra*. Harper & Row Publishers, New York Evanstone and London.
- Cori, R., Lascar, D. 2001. *Mathematical logic. A course with exercises*. Oxford University Press, Oxford.
- Ebbinghaus, H.D., Flum, J. 1995. *Finite Model Theory.* Springer Verlag.
- Grzegorczyk, A. 1975. *Zarys logiki matematycznej*. PWN, Warszawa.
- Hedman, S. 2004. *A First Course in Logic. An Introduction to Model Theory, Proof Theory, Computability, and Complexity.* Oxford University Press, Oxford.

Wykorzystywana literatura

- Hinman, P.G. 2005. *Fundamentals of mathematical logic*. A K Peters, Wellesley, Massachusetts.
- Hodges, W. 1993. *Model theory*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Ježek, J. 1976. *Univerzálni algebra a teorie modelů*. Matematický seminář SNTL, Praha.
- Keisler, J.H. 1977. Fundamentals of model theory. W: J. Barwise (ed.) *Handbook of mathematical logic*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam New York Oxford, Part A: Model Theory, 47–103.
- Ławrow, I.A., Maksimowa, Ł.L. 2004. *Zadania z teorii mnogości, logiki matematycznej i teorii algorytmów*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Marciszewski, W. 1987. *Logika formalna. Zarys encyklopedyczny.* PWN, Warszawa.

Wykorzystywana literatura

- Marcja, A., Toffalori, C. 2003. *A guide to classical and modern model theory*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht Boston London.
- Marek, I. 2002. *Elementy logiki formalnej*. Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego, Katowice.
- Marker, D. 2002. *Model theory: an introduction*. Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg.
- Monk, J.D. 1976. *Mathematical logic.* Springer Verlag, New York Heidelberg.
- Piękosz, A. 2008. *Wstęp do teorii modeli.* Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Kraków.
- Pogorzelski, W.A. 1981. *Klasyczny rachunek predykatów*. PWN, Warszawa.

Wykorzystywana literatura

- Pogorzelski, W.A. 1992. *Elementarny słownik logiki formalnej*. Uniwersytet Warszawski, Filia w Białymstoku, Białystok.
- Poizat, B. 2000. *A course in model theory*. Springer.
- Porębska, M., Suchoń, W. 1991. *Elementarne wprowadzenie w logikę formalną*. PWN, Warszawa.
- Sacks, G.E. 1972. *Saturated model theory* . W.A. Benjamin, Inc., Reading, Massachusetts.
- Shoenfield, J. 1973. *Mathematical logic*. Reading, Massachusetts.
- Surma, S. (ed.) 1973. *Studies in the history of mathematical logic*. Zakład Narodowy imienia Ossolińskich, Wydawnictwo Polskiej Akademii Nauk, Wrocław, Warszawa, Kraków, Gdańsk.
- Zygmunt, J. 1973. On the sources of the notion of the reduced product. *Reports on Mathematical Logic* **1**, 53–67.