LOGIKA MATEMATYCZNA (4) – 30X2013

I rok Językoznawstwa i Nauk o Informacji UAM

1. Skrócona metoda 0-1

Czasem sprawdzenie czy formuła o n zmiennych zdaniowych jest tautologią nie wymaga obliczania jej wartości dla wszystkich 2^n wzz: wystarczy mianowicie *wykluczyć*, aby formuła ta miała wartość 0 przy co najmniej jednym wzz. Poszczególne kroki rozumowania numerujemy (np. indeksem dolnym), pisząc uzyskiwane wartości pod funktorem głównym każdej formuły.

Przykład 1. Przypuśćmy, że dla pewnego wzz w mamy $Val(((p \to q) \to r) \to (p \to (q \to r)), w) = 0$. Wtedy:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
((p & \to & q) & \to & r) & \to & (p & \to & (q & \to & r)) \\
1_7 & 0_6 & 0_8 & 1_2 & 0_5 & 0_1 & 1_3 & 0_2 & 1_4 & 0_3 & 0_4\ ;
\end{array}$$

Przypuszczenie 0_1 doprowadziło do wzajem sprzecznych wyników: 1_4 oraz 0_8, musimy więc je odrzucić. Badana formuła ma wartość 1 dla *każdego* wzz w, albowiem *wykluczyliśmy*, że ma ona wartość 0 przy co najmniej jednym wzz w. Zauważ, że kroki 0_5 oraz 1_7 polegają na *wstawieniu* w odpowiednie miejsca wcześniej obliczonych wartości (a pozostałe kroki, oprócz 0_1, to *obliczenia*).

Przykład 2. Przypuśćmy, że dla pewnego wzz w mamy: $Val(((p \vee q) \wedge p) \to \neg q, w) = 0$. Wtedy:

$$\begin{array}{ccccccc}
((p & \vee & q) & \wedge & p) & \to & \neg & q \\
 & 1_4 & & 1_2 & 1_4 & 0_1 & 0_2 & 1_3 \\
1_5 & 1_7 & 1_6 & & & & &
\end{array}$$

Przypuszczenie 0_1 potwierdziło się dla wzz w takiego, że $Val(p, w) = 1$ oraz $Val(q, w) = 1$. Badana formuła nie jest więc tautologią. Krok 1_5 to wstawienie wartości 1_4 (dla p), a krok 1_6 to wstawienie wartości 1_3 (dla q) w odpowiednie miejsca.

1.1. Reguły niezawodne, wynikanie logiczne, prawa KRZ

Czy są regułami niezawodnymi: $\frac{\alpha \to (\beta \to \gamma)}{(\alpha \wedge \beta) \to \gamma}$, $\frac{(\alpha \wedge \beta) \to \gamma}{\alpha \to (\beta \to \gamma)}$, $\frac{\alpha \to \beta, \beta \to \gamma}{\gamma \to \alpha}$?

Czy zachodzi wynikanie logiczne: $\{\alpha \to \beta, \beta \to \gamma\} \models_{krz} \alpha \to \gamma$, $\{\alpha \to \beta, \beta \to \gamma\} \models_{krz} \gamma \to \alpha$?

Czy są prawami (tautologiami): $(p \to q) \vee (q \to p)$, $(p \equiv q) \vee ((q \equiv r) \vee (p \equiv r))$, $(p \to q) \to (\neg p \to \neg q)$?

1.2. Semantyczna niesprzeczność

Przykład 1. Przypuśćmy, że semantycznie niesprzeczny jest zbiór formuł: $\{p \vee \neg q,\ r \to q,\ \neg(s \wedge \neg r),\ s \wedge \neg p\}$. Wtedy:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
p & \vee & \neg & q & , & r & \to & q & , & \neg & (s & \wedge & \neg & r) & , & s & \wedge & \neg & p \\
0_5 & 1_1 & 1_6 & 0_7 & & 0_9 & 1_1 & 0_8 & & 1_1 & 1_{10} & 0_4 & 0_{11} & 1_{12} & & 1_2 & 1_1 & 1_2 & 0_3
\end{array}$$

Przypuszczenie 1_1 doprowadziło do wzajem sprzecznych wyników: 0_9 oraz 1_{12}, a więc musimy je odrzucić. Oznacza to, że *nie istnieje* wzz w, dla którego wszystkie formuły z tego zbioru mają wartość 1, czyli jest to zbiór semantycznie sprzeczny.

Przykład 2. Przypuśćmy, że semantycznie niesprzeczny jest zbiór formuł: $\{\neg p \to (q \to r),\ q,\ \neg(p \to r)\}$. Wtedy:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
\neg & p & \to & (q & \to & r) & , & q & , & \neg & (p & \to & r) \\
0_7 & 1_8 & 1_1 & 1_4 & 0_6 & 0_5 & & 1_1 & & 1_1 & 1_3 & 0_2 & 0_3
\end{array}$$

Przypuszczenie 1_1 potwierdziło się. Dla wzz w takiego, że $Val(p, w) = 1$, $Val(q, w) = 1$ oraz $Val(r, w) = 0$ wszystkie formuły z tego zbioru przyjmują wartość 1, a więc jest to zbiór semantycznie niesprzeczny.

2. Związki między funktorami, postacie normalne, układy zupełne

Formuły α i β nazywamy (semantycznie) *równoważnymi* ($\alpha \sim \beta$), jeśli dla dowolnego wzz w wartość α dla w jest równa wartości β dla w. Formuła $\alpha \equiv \beta$ jest tautologią dokładnie wtedy, gdy $\alpha \sim \beta$. Każde dwie tautologie KRZ są semantycznie równoważne.

Literał: zmienna lub negacja zmiennej. *Alternatywa elementarna*: alternatywa literałów. *Koniunkcyjna postać normalna*: koniunkcja alternatyw elementarnych. Każda formuła języka KRZ jest semantycznie równoważna pewnej koniunkcyjnej postaci normalnej. Zauważ, że tautologiami są:

$$(\alpha \equiv \beta) \equiv ((\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)), \quad (\alpha \to \beta) \equiv (\neg\alpha \vee \beta), \quad \neg(\alpha \wedge \beta) \equiv (\neg\alpha \vee \neg\beta), \quad \neg(\alpha \vee \beta) \equiv (\neg\alpha \wedge \neg\beta),$$
$$\neg\neg\alpha \equiv \alpha, \quad (\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)) \equiv ((\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)), \quad (\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)) \equiv ((\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma))$$

Każdą funkcję prawdziwościową otrzymać można poprzez złożenia funkcji np. z następujących układów: $\{Ng, Kn\}$, $\{Ng, Al\}$, $\{Ng, Im\}$. Binegacja oraz kreska Sheffera są jedynymi funkcjami, z których można otrzymać wszystkie pozostałe.

Binegacja: $\downarrow(x, y) = Ng(Al(x, y))$. Zauważ, że: $Ng(x) = |(x, x)$ oraz $Al(x, y) = \downarrow(\downarrow(x, y), \downarrow(x, y))$.

Kreska Sheffera: $|(x, y) = Ng(Kn(x, y))$. Zauważ, że: $Ng(x) = \downarrow(x, x)$ oraz $Kn(x, y) = |(|(x, y), |(x, y))$.

Binegacja odpowiada spójnikowi „ani …, ani …”, a kreska Sheffera spójnikowi „co najwyżej jedno z dwojga …, …”.

3. Zadanie domowe

1. Przeczytaj slajdy 35–40 z prezentacji *Semantyka KRZ.*
2. Rozwiąż (w kajecie) zadania: 23, 24, 25, 26 z *Ćwiczeń z logiki.*
3. Pisemnie (termin – 6xi2013, godz. 15:20). Znajdź i podaj znaczenie terminów: *antynomia*, *paradoks*, *sofizmat*, *paralogizm*. Podaj własne, oryginalne przykłady. Podaj źródła, z których korzystałaś. Najwyżej jedna strona.

JERZY POGONOWSKI   Zakład Logiki Stosowanej UAM   www.logic.amu.edu.pl   pogon@amu.edu.pl