III. Drzewa Semantyczne dla KRP

Klasyczny rachunek predykatów (KRP) stanowi współczesny elementarz logiczny. W krajach cywilizowanych naucza się fragmentów tego elementarza na poziomie szkoły średniej; w Rzeczpospolitej Polskiej KRP wykładany jest studentkom i studentom matematyki oraz filozofii, lokalnie także studentkom i studentom niektórych innych kierunków studiów.

Metoda drzew semantycznych w KRP polega, podobnie jak w klasycznym rachunku zdań, na eliminacji stałych logicznych. Do omówionych poprzednio spójników prawdziwościowych dochodzą dodatkowo kwantyfikatory: generalny i egzystencjalny. Wśród predykatów szczególną rolę odgrywa predykat *identyczności*; traktowany on jest w rozważanej metodzie właściwie także jako stała logiczna.

Podstawowa różnica między KRZ oraz KRP, jeśli chodzi o rozważaną metodę, to to, iż KRP jest *nierozstrzygalny*: nie istnieje algorytm, pozwalający rozstrzygnąć o dowolnej formule języka KRP, czy jest ona czy też nie jest prawem tego rachunku. KRP jest jednak *półrozstrzygalny*: jeśli jakaś formuła **jest** prawem tego rachunku, to metoda drzew semantycznych pozwala to potwierdzić. Jeśli formuła **nie jest** prawem KRP, to omawiana metoda może nie dać konkluzywnej odpowiedzi na pytanie, czy tak właśnie rzeczy się mają.[1]

Język KRP — umowy notacyjne

Szczegółowy opis języka KRP podano w części wstępnej niniejszych notatek. Przyjmiemy następujące umowy notacyjne:

- zmienne indywiduowe oznaczamy symbolami x, y, z (ewentualnie z indeksami);
- stałe indywiduowe oznaczamy symbolami a, b, c (ewentualnie z indeksami);
- predykaty oznaczamy symbolami P, Q, R;
- jeśli t, t_1, t_2 są termami a P predykatem jednoargumentowym, zaś Q predykatem dwuargumentowym, to formuły atomowe zapisywać będziemy w postaci Pt oraz t_1Qt_2; formuły atomowe z predykatami więcej niż dwuargumentowymi w podrozdziałach III.1.–III.5. nie wystąpią (podobnie jak symbole funkcyjne); w rozdziale VI skryptu, tj. w *Zadaniach* formułę atomową z n-argumentowym predykatem R zapisywać będziemy $R(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, gdzie $t_1, t_2, \ldots t_n$ są dowolnymi termami;
- symbole $\forall$ oraz $\exists$ oznaczają, odpowiednio, kwantyfikator generalny oraz egzystencjalny;
- w charakterze metazmiennych (oznaczających formuły języka KRP) używać będziemy symboli A, B, C, ewentualnie z indeksami; gdy zmiennymi wolnymi formuły A są dokładnie zmienne indywiduowe $x_1, x_2, \ldots x_n$, to będziemy odwoływać się do tej formuły używając symbolu $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$;
- formułę otrzymaną w wyniku podstawienia za wszystkie wolne wystąpienia zmiennej x w formule $A(x)$ stałej idywiduowej a oznaczać będziemy przez $A(a/x)$; a gdy będzie bezdyskusyjnie jasne o jakie podstawienie chodzi, po prostu przez $A(a)$.

O semantyce KRP — dwie intuicyjne uwagi

Definicje podstawowych pojęć semantycznych dla KRP podano w części wstępnej niniejszych notatek. Najistotniejsza dla omawianej metody jest *podstawieniowa* interpretacja kwantyfikatorów. Warunki spełniania formuł języka KRP (przez wartościowania w strukturach relacyjnych) wykorzystują stałe indywiduowe nazywające elementy uniwersum interpretacji. Tu zakładamy, że Czytelniczki bez protestu zgodzą się na następujące, intuicyjnie sformułowane, ustalenia:

[1] Poprawność rozważanej metody dla KRP pokazujemy w rozdziale IV skryptu. W podrozdziałach III.1.–III.5. podajemy szereg przykładów jej zastosowania.

- Gdy za prawdziwe (w ustalonej interpretacji) uznajemy zdanie postaci $\exists x A(x)$, to uznamy też za prawdziwe zdanie postaci $A(a)$, dla ***pewnej*** stałej indywiduowej a, oznaczającej jakiś obiekt w uniwersum tej intepretacji.
- Gdy za prawdziwe (w ustalonej interpretacji) uznamy zdanie postaci $\forall x A(x)$, to uznamy też za prawdziwe wszystkie zdania postaci $A(a)$, dla ***każdej*** stałej indywiduowej oznaczającej jakiś obiekt z uniwersum tejże interpretacji.

1. O budowaniu drzew semantycznych w KRP

Możemy już przystąpić do prezentacji metody drzew semantycznych w KRP. Podobnie jak w przypadku rachunku zdań, ograniczymy się do reguł tworzenia drzew oraz ilustracji działania metody w rozwiązywaniu typowych problemów formułowanych w KRP (i jego zastosowaniach).

1.1. Reguły budowania drzew semantycznych

Dla spójników zdaniowych obowiązują reguły omówione w rozdziale II, poświęconym rachunkowi zdań, a więc reguły $R(\wedge)$, $R(\vee)$, $R(\rightarrow)$, oraz $R(\equiv)$, a także reguły $R(\neg\wedge)$, $R(\neg\vee)$ $R(\neg\rightarrow)$, $R(\neg\equiv)$ oraz $R(\neg\neg)$.

Dla kompletności wykładu, przypomnijmy raz jeszcze te reguły:

- ***Koniunkcja*** (prawdziwa tylko wtedy, gdy oba jej człony są prawdziwe):

$$R(\wedge) \qquad \begin{array}{c} A \wedge B \\ | \\ A \\ | \\ B \end{array}$$

- ***Alternatywa*** (prawdziwa, gdy przynajmniej jeden z jej członów jest prawdziwy):

$$R(\vee) \qquad \begin{array}{ccc} & A \vee B & \\ / & & \backslash \\ A & & B \end{array}$$

- ***Implikacja*** (prawdziwa, gdy jej poprzednik jest fałszywy lub następnik jest prawdziwy):

$$R(\rightarrow) \qquad \begin{array}{ccc} & A \rightarrow B & \\ / & & \backslash \\ \neg A & & B \end{array}$$

- ***Równoważność*** (prawdziwa, gdy oba jej człony mają tę samą wartość logiczną):

$$R(\equiv) \qquad \begin{array}{ccc} & A \equiv B & \\ / & & \backslash \\ A & & \neg A \\ | & & | \\ B & & \neg B \end{array}$$

Reguły dla formuł języka KRZ, w których spójnikiem głównym jest negacja mają postać następującą:[2]

[2] ***Wydaje się***, że zapamiętanie tej grupy reguł jest łatwiejsze, gdy mówimy, kiedy poszczególne formuły są ***fałszywe***. Zgodnie z przyjętą konwencją notacyjną (jak pamiętamy z rozdziału II), drzewo semantyczne danej formuły ma w wierzchołkach jej podformuły lub negacje jej podformuł.

- ***Koniunkcja*** (fałszywa, gdy przynajmniej jeden z jej członów jest fałszywy):

$$R(\neg\wedge) \qquad \begin{array}{ccc} & \neg(A \wedge B) & \\ \diagup & & \diagdown \\ \neg A & & \neg B \end{array}$$

- ***Alternatywa*** (fałszywa, gdy oba jej człony fałszywe):

$$R(\neg\vee) \qquad \begin{array}{c} \neg(A \vee B) \\ | \\ \neg A \\ | \\ \neg B \end{array}$$

- ***Implikacja*** (fałszywa tylko wtedy, gdy jej poprzednik jest prawdziwy, a następnik fałszywy):

$$R(\neg \rightarrow) \qquad \begin{array}{c} \neg(A \rightarrow B) \\ | \\ A \\ | \\ \neg B \end{array}$$

- ***Równoważność*** (fałszywa, gdy jej człony mają różne wartości logiczne):

$$R(\neg \equiv) \qquad \begin{array}{ccc} & \neg(A \equiv B) & \\ \diagup & & \diagdown \\ A & & \neg A \\ | & & | \\ \neg B & & B \end{array}$$

- ***Negacja*** ($\neg A$ fałszywa, gdy A prawdziwa):

$$R(\neg\neg) \qquad \begin{array}{c} \neg\neg A \\ | \\ A \end{array}$$

Nowymi stałymi logicznymi są kwantyfikatory; nowe reguły dotyczą więc formuł rozpoczynających się kwantyfikatorem oraz negacji takich formuł.

- $R(\forall)$. Jeśli w danej gałęzi drzewa wystąpiła formuła postaci $\forall x A(x)$, to na tejże gałęzi umieszczamy wszystkie formuły postaci $A(a)$, dla każdej stałej indywiduowej a występującej na rozważanej gałęzi.
- $R(\exists)$. Jeśli w danej gałęzi drzewa wystąpiła formuła postaci $\exists x A(x)$, to na tejże gałęzi umieszczamy formułę postaci $A(a)$, gdzie a jest nową stałą indywiduową, nie występującą dotąd na rozważanej gałęzi.
- $R(\neg\forall)$. Jeśli w danej gałęzi drzewa wystąpiła formuła postaci $\neg\forall x A(x)$, to na tejże gałęzi umieszczamy formułę postaci $\neg A(a)$, gdzie a jest nową stałą indywiduową, nie występującą dotąd na rozważanej gałęzi.
- $R(\neg\exists)$. Jeśli w danej gałęzi drzewa wystąpiła formuła postaci $\neg\exists x A(x)$, to na tejże gałęzi umieszczamy wszystkie formuły postaci $\neg A(a)$, dla każdej stałej indywiduowej a występującej na rozważanej gałęzi.

W przypadku drugiej i trzeciej z wymienionych wyżej reguł mówimy o *wprowadzaniu nowej stałej indywiduowej* (i opuszczaniu kwantyfikatora egzystencjalnego lub zanegowanego kwantyfikatora generalnego), w przypadku pierwszej i czwartej z wymienionych reguł mówimy o *rozwijaniu formuły generalnie skwantyfikowanej* ze względu na daną stałą indywiduową (oraz opuszczaniu kwantyfikatora generalnego lub zanegowanego kwantyfikatora egzystencjalnego).

Budując drzewa semantyczne w KRP najpierw rozważamy formuły egzystencjalnie skwantyfikowane i wprowadzamy nowe stałe indywiduowe, następnie dla wszystkich formuł generalnie skwantyfikowanych umieszczamy na danej gałęzi odpowiednie formuły otrzymane poprzez opuszczenie kwantyfikatora generalnego (lub negacji kwantyfikatora egzystencjalnego) i zastąpienie wiązanej przezeń zmiennej każdą stałą indywiduową występującą na tej gałęzi. Jeśli nie mamy do dyspozycji żadnej formuły egzystencjalnie skwantyfikowanej, a mamy jakieś formuły generalnie skwantyfikowane (lub negacje egzystencjalnie skwantyfikowanych), to wprowadzamy nowe stałe indywiduowe przez rozwinięcie dowolnej formuły generalnie skwantyfikowanej (lub negacji egzystencjalnie skwantyfikowanej). Jeśli w formule dla której zaczynamy budować drzewo występują już jakieś stałe indywiduowe, to oczywiście obowiązują dla nich reguły $R(\forall)$ oraz $R(\neg\exists)$.

Stosować będziemy następującą umowę notacyjną w graficznych reprezentacjach drzew semantycznych:

- $^{\surd}a$ oznacza opuszczenie kwantyfikatora egzystencjalnego (bądź negacji kwantyfikatora generalnego) i wprowadzenie w formule za tym kwantyfikatorem (odpowiednio, w negacji formuły) nowej stałej indywiduowej a w miejsce zmiennej wiązanej przez ten kwantyfikator;

- $^{\star}a$ oznacza zastąpienie formuły generalnie skwantyfikowanej (lub negacji formuły egzystencjalnie skwantyfikowanej) przez formułę bez kwantyfikatora generalnego (odpowiednio, negację formuły), ze stałą indywidouwą a wstawioną w miejsce zmiennej wiązanej przez ten kwantyfikator;

- numery (z kropką) umieszczane w górnej frakcji po prawej stronie formuł informują o kolejności wykonywanych działań; po kropce występuje symbol spójnika (bądź negacji spójnika) do którego stosujemy odnośną regułę (z reguł budowania drzew semantycznych w KRZ) lub symbole $^{\surd}$ albo * wraz ze stałą indywiduową, których dotyczą;

- numery (w nawiasach) po lewej stronie formuł informują o wynikach wykonywanych działań; formuły z pnia drzewa, które nie powstały w wyniku stosowania żadnych reguł otrzymują domyślne (nie zapisywane) numery 0.1, 0.2, 0.3,... (z koniecznością użycia tego ostatniego typu numerów spotkamy się jedynie sporadycznie).

Przypomnijmy, że przez *pień* drzewa rozumiemy część wspólną wszystkich jego gałęzi.

Tak więc, symbol $^{\surd}$ dotyczy zastosowań reguł $R(\exists)$ oraz $R(\neg\forall)$, natomiast symbol * zastosowań reguł $R(\forall)$ oraz $R(\neg\exists)$.

Powyższą gadaninę zastąpić można krótko np. tak. Poniższe reguły określają, jaką formułę należy dopisać do tworzonej gałęzi, jeśli na gałęzi tej wystąpiła formuła danej postaci. Przypominamy, że $A(a/x)$ oznacza formułę otrzymaną z formuły o zmiennej wolnej x przez zastąpienie wszystkich wolnych wystąpień tej zmiennej stałą indywiduową a.

Reguły rozkładu formuł dotyczące kwantyfikatorów mają postać następującą:

- ***Reguła dla formuł generalnie skwantyfikowanych:***

$$R(\forall) \qquad \begin{array}{c} \forall x\, A(x) \\ | \\ A(a/x) \end{array}$$

dla każdej stałej indywiduowej a występującej na rozważanej gałęzi.

- ***Reguła dla formuł egzystencjalnie skwantyfikowanych:***

$$R(\exists) \qquad \begin{array}{c} \exists x\, A(x) \\ | \\ A(a/x) \end{array}$$

dla nowej stałej indywiduowej a nie występującej dotąd na rozważanej gałęzi.

- ***Reguła dla negacji formuł generalnie skwantyfikowanych:***

$$R(\neg\forall) \qquad \begin{array}{c} \neg\forall x\ A(x) \\ | \\ \neg A(a/x) \end{array}$$

dla nowej stałej indywiduowej a nie występującej dotąd na rozważanej gałęzi.

- ***Reguła dla negacji formuł egzystencjalnie skwantyfikowanych:***

$$R(\neg\exists) \qquad \begin{array}{c} \neg\exists x\ A(x) \\ | \\ \neg A(a/x) \end{array}$$

dla każdej stałej indywiduowej a występującej na rozważanej gałęzi.

Reguły $R(\forall)$ oraz $R(\neg\exists)$ są wzmocnione dodatkowym warunkiem: jeśli na gałęzi, której dotyczy ich zastosowanie nie ma jeszcze żadnej stałej indywiduowej, to posługujemy się jakąś z góry ustaloną stałą.

Zilustrujmy podane wyżej reguły oraz umowę przykładami. We wszystkich tych przykładach kolejne kroki budowania drzew wyliczane są przez komentarze (z prawej strony, w górnej frakcji) opatrzone numerami z kropką; wyniki wykonania tych kroków są numerowane z lewej strony, numery otrzymanych formuł podawane są w nawiasach. Śledzenie budowy drzewa sprowadza się do obserwowania kolejności wykonywanych kroków (z prawej strony formuł) i otrzymywanych wyników (z lewej strony formuł).

Stosowanie reguł dających rozgałęzienia (np. $R(\rightarrow)$, $R(\neg\wedge)$ daje w wyniku dwie formuły; będziemy wtedy używać numerów (w nawiasach) z indeksami dolnymi: l (dla lewej formuły) oraz p (dla prawej formuły). W przypadku reguł bez rozgałęzień dających dwie formuły (np. $R(\wedge)$, $R(\neg \rightarrow)$ otrzymane formuły numerować będziemy numerami z indeksami dolnymi g (dla pierwszej, górnej formuły) oraz d (dla drugiej, dolnej formuły). Reguły nie powodujące rozgałęzień i dające w wyniku jedną formułę (np. $R(\neg\neg)$, $R(\forall)$, $R(\neg\exists)$) nie wymagają sztuczek z indeksami. Wreszcie, reguły $R(\equiv)$ oraz $R(\neg \equiv)$ dają w rezultacie cztery formuły, numerowane liczbami z indeksami dolnymi: lg, ld, pg oraz pd (odpowiednio: lewa górna, lewa dolna, prawa górna, prawa dolna).

1.2. Przykłady

Przykład III.1.1.: Kikut

$$\begin{array}{rc} & \exists x\forall y(xPy)\ ^{1.\checkmark a} \\ & | \\ (1) & \forall y(aPy)\ ^{2.\star a} \\ & | \\ (2) & aPa \end{array}$$

W korzeniu drzewa jest formuła egzystencjalna. W pierwszym kroku wprowadzamy nową stałą indywiduową a. Otrzymujemy formułę generalnie skwantyfikowaną. W kroku drugim rozwijamy tę formułę ze względu na stałą a. Otrzymujemy formułę atomową. Żadnych reguł nie można już do żadnej formuły stosować. Koniec.

Niepotrzebny komentarz semantyczny.

Miałaś zdanie „mówiące”, że istnieje obiekt pozostający w pewnej (ustalonej) relacji ze wszystkimi obiektami. Wprowadziłaś nazwę dla takiego obiektu. Otrzymałaś zdanie „mówiące”, że ów nazwany obiekt pozostaje w rozważanej relacji ze wszystkimi obiektami. Zdanie to rozwinęłaś ze względu na wprowadzoną stałą: skoro ów nazwany obiekt pozostaje w rozważanej relacji ze wszystkimi obiektami, to pozostaje w niej także z sobą samym. Otrzymałaś zdanie atomowe „mówiące", że ów nazwany obiekt jest punktem stałym rozważanej relacji: zachodzi ona między tym obiektem a nim samym.

Deklaracja Metodologiczna.

Piszący te słowa czuje wewnętrzną potrzebę złożenia deklaracji. Wszelkie podawane dalej przykłady wykorzystujące język naturalny (polski) są czczą jedynie igraszką. Moglibyśmy ograniczyć się do rozważania jedynie formuł języka rachunku predykatów (bo tego języka dotyczy w istocie omawiana metoda!). Wierzę, że formuły języka rachunku predykatów można próbować odczytywać w języku naturalnym; czasami odczytania takie mają nawet odrobinę sensu. Nie wierzę, że „przekład" w drugą stronę jest jakoś wyraźnie zdeterminowany, tj. nie wierzę w możliwość bezpośredniej reprezentacji dowolnych wyrażeń języka naturalnego w języku KRP.[3] To *Szema Israel* logiczno-lingwistyczne jest jednak tematem na osobną książkę (ale — uspokoję zatrwożone Czytelniczki — nie czuję potrzeby jej napisania; może jedynie ograniczę się do stosownych komentarzy w rozdziale zawierającym zadania).

Przykład III.1.2.: Drzewo rośnie w twoich oczach

Spokojnie, nie szukamy belki pod twoją powieką (nie jest to także refleksja nad twoim, usytuowanym — w dalekiej przyszłości, w czarującej okolicy — grobem). Pokażemy tylko, krok po kroku, jak rośnie drzewo semantyczne formuły. Wybierzmy formułę prościutką:

$$(\exists x\, Px \rightarrow \exists y\, Qy) \rightarrow \exists x\, (Px \rightarrow Qx)$$

choć dającą drzewo semantyczne nieco bardziej rozwinięte od kikuta z poprzedniego przykładu.

Umieszczamy formułę w korzeniu drzewa:

$$(\exists x\, Px \rightarrow \exists y\, Qy) \rightarrow \exists x\, (Px \rightarrow Qx)$$

Jest to implikacja, a więc stosujemy regułę dotyczącą tego spójnika, dającą w rezultacie rozgałęzienie. Zastosowanie reguły dotyczącej implikacji zaznaczamy z prawej strony formuły, której to zastosowanie dotyczy, przy numerze kroku, który tym samym wykonujemy. Formuły otrzymane w rezultacie wykonania tego kroku opatrujemy numerami w nawiasach z lewej strony, jeśli potrzeba, to z indeksami. W rozważanym przypadku z prawej strony formuły, od której zaczęliśmy umieszczamy komentarz $^{1.\rightarrow}$, który możemy odczytać: w kroku pierwszym stosujemy regułę dotyczącą implikacji do formuły z lewej strony komentarza. Otrzymujemy, zgodnie ze stosowaną regułą, zaprzeczony poprzednik implikacji (formuła w gałęzi lewej, o numerze (1_l)) oraz, w gałęzi prawej, następnik tej implikacji (formuła o numerze (1_p)):

$$(\exists x\, Px \rightarrow \exists y\, Qy) \rightarrow \exists x\, (Px \rightarrow Qx) \quad ^{1.\rightarrow}$$

$$(1_l)\quad \neg(\exists x\, Px \rightarrow \exists y\, Qy) \qquad\qquad (1_p)\quad \exists x\, (Px \rightarrow Qx)$$

Zajmiemy się najpierw gałęzią lewą. Formuła o numerze (1_l) jest zaprzeczoną implikacją, a więc zastosowanie odpowiedniej reguły (co zaznaczamy pisząc w komentarzu z prawej strony $^{2.\neg\rightarrow}$) daje w wyniku dwie formuły: poprzednik tej implikacji (formuła o numerze (2_g)) oraz jej zaprzeczony następnik (formuła o numerze (2_d)), umieszczone jedna pod drugą na rozważanej gałęzi:

[3] Trochę (złośliwie dobranych) przykładów uzasadniających ten sceptycyzm znajdą Czytelniczki w rozdziale VI skryptu. Postaram się, aby były one nie tak banalne, jak np. polecenia oddania formułą języka KRP struktury składniowej wyrażeń w rodzaju: *Jestem obcy i nic co obce nie jest mi obce.* lub *Uwaga żołnierze! Zbiórka przed kościołem — za kościołem; po kościele — przed kościołem.*

$$(\exists x\, Px \rightarrow \exists y\, Qy) \rightarrow \exists x\, (Px \rightarrow Qx)\ ^{1.\rightarrow}$$

$$(1_l)\quad \neg(\exists x\, Px \rightarrow \exists y\, Qy)\ ^{2.\neg\rightarrow} \qquad (1_p)\quad \exists x\, (Px \rightarrow Qx)$$

$$(2_g)\quad \exists x\, Px$$

$$(2_d)\quad \neg\exists y\, Qy$$

Formuła o numerze (2_g) jest formułą egzystencjalnie skwantyfikowaną, możemy więc zastosować do niej regułę dotyczącą wprowadzania nowych stałych indywiduowych; zaznaczamy wykonanie kroku trzeciego pisząc z lewej strony formuły o numerze (2_g) komentarz $^{3.\checkmark a}$ (wprowadzenie nowej stałej indywiduowej a) i otrzymując w rezultacie formułę o numerze (3):

$$(\exists x\, Px \rightarrow \exists y\, Qy) \rightarrow \exists x\, (Px \rightarrow Qx)\ ^{1.\rightarrow}$$

$$(1_l)\quad \neg(\exists x\, Px \rightarrow \exists y\, Qy)\ ^{2.\neg\rightarrow} \qquad (1_p)\quad \exists x\, (Px \rightarrow Qx)$$

$$(2_g)\quad \exists x\, Px\ ^{3.\checkmark a}$$

$$(2_d)\quad \neg\exists y\, Qy$$

$$(3)\quad Pa$$

Względem nowowprowadzonej stałej indywiduowej a należy rozwinąć (tzn. zastosować regułę opuszczania kwantyfikatora generalnego lub zanegowanego kwantyfikatora egzystencjalnego) wszystkie formuły generalnie skwantyfikowane lub zaprzeczenia wszystkich formuł egzystencjalnie skwantyfikowanych znajdujących się na rozpatrywanej gałęzi. Tu mamy formułę o numerze (2_d), która jest zaprzeczeniem formuły generalnie skwantyfikowanej. Krok czwarty polega więc na zastosowaniu odnośnej reguły, tj. $R(\neg\forall)$ i zapisania komentarza $^{4.\star a}$ z prawej strony formuły, do której reguła jest stosowana. Otrzymujemy w ten sposób formułę o numerze (4):

$$(\exists x\, Px \rightarrow \exists y\, Qy) \rightarrow \exists x\, (Px \rightarrow Qx)\ ^{1.\rightarrow}$$

$$(1_l)\quad \neg(\exists x\, Px \rightarrow \exists y\, Qy)\ ^{2.\neg\rightarrow} \qquad (1_p)\quad \exists x\, (Px \rightarrow Qx)$$

$$(2_g)\quad \exists x\, Px\ ^{3.\checkmark a}$$

$$(2_d)\quad \neg\exists y\, Qy\ ^{4.\star a}$$

$$(3)\quad Pa$$

$$(4)\quad \neg Qa$$

To kończy budowanie lewej gałęzi drzewa; do znajdujących się na niej formuł nie można już zastosować żadnej z reguł, które mamy do dyspozycji. Zwinnie przeskakujemy więc na gałąź prawą. Formuła o numerze (1_p) jest egzystencjalnie skwantyfikowana, stosujemy więc do niej regułę $R(\exists)$ dotyczącą opuszczania kwantyfikatora egzystencjalnego i wprowadzania nowej stałej indywiduowej. Ten, piąty krok zaznaczamy pisząc komentarz $^{5.\checkmark b}$ z prawej strony formuły o numerze (1_p) i otrzymujemy w rezultacie formułę o numerze (5):

$$(\exists x\, Px \to \exists y\, Qy) \to \exists x\, (Px \to Qx) \quad {}^{1.\to}$$

(1_l) $\neg(\exists x\, Px \to \exists y\, Qy)$ $^{2.\neg\to}$	(1_p) $\exists x\, (Px \to Qx)$ $^{5.\checkmark b}$
(2_g) $\exists x\, Px$ $^{3.\checkmark a}$	(5) $Pb \to Qb$
(2_d) $\neg\exists y\, Qy$ $^{4.\star a}$	
(3) Pa	
(4) $\neg Qa$	

Jedyne, co można jeszcze zrobić na tej gałęzi, to zastosowanie reguły dotyczącej implikacji do formuły o numerze (5). Ten, szósty krok (zaznaczony komentarzem $^{6.\to}$ z prawej strony formuły o numerze (5)) daje w rezultacie rozgałęzienie na formuły o numerach (6_l) oraz (6_p):

$$(\exists x\, Px \to \exists y\, Qy) \to \exists x\, (Px \to Qx) \quad {}^{1.\to}$$

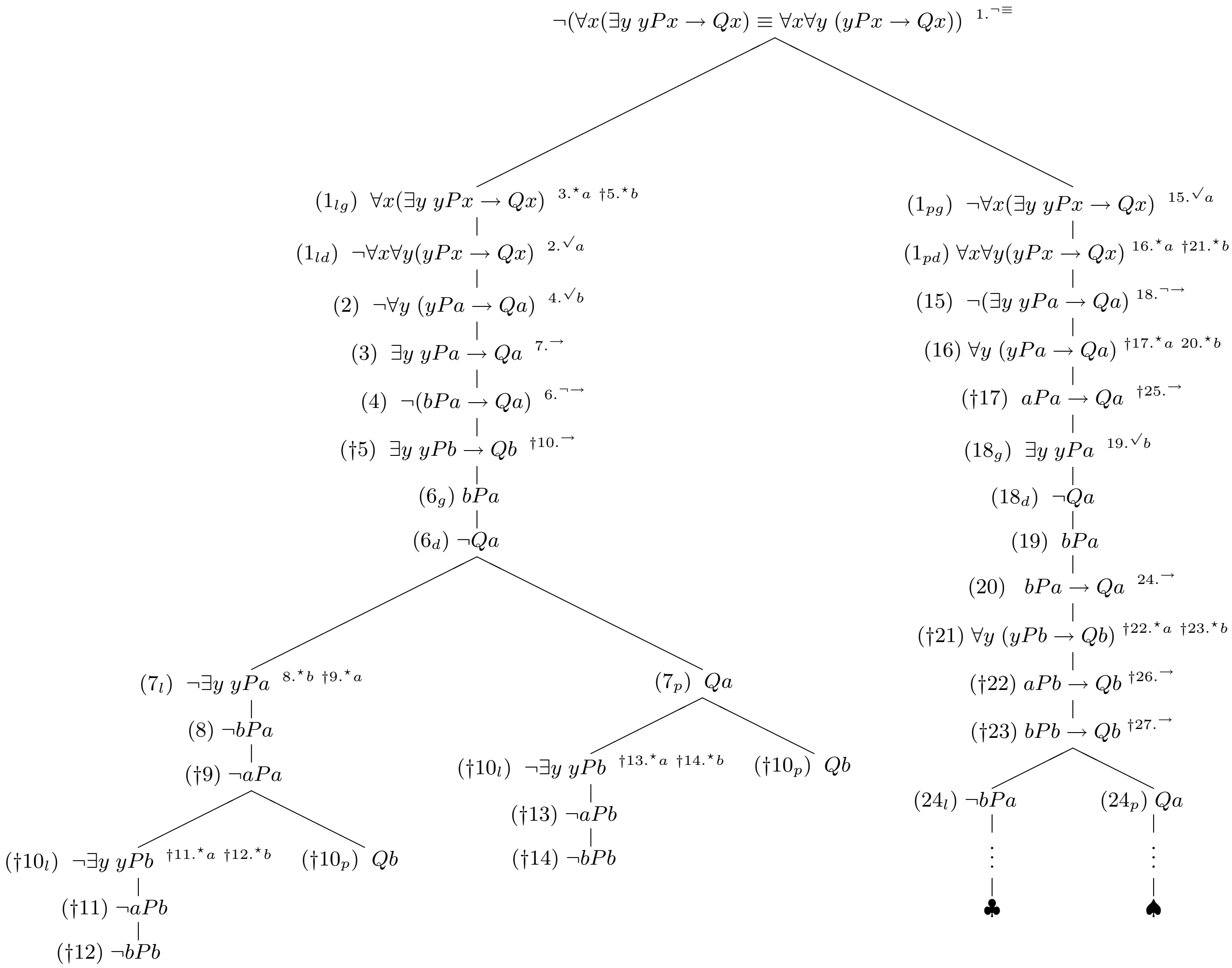
(1_l) $\neg(\exists x\, Px \to \exists y\, Qy)$ $^{2.\neg\to}$	(1_p) $\exists x\, (Px \to Qx)$ $^{5.\checkmark b}$	
(2_g) $\exists x\, Px$ $^{3.\checkmark a}$	(5) $Pb \to Qb$	
(2_d) $\neg\exists y\, Qy$ $^{4.\star a}$	$(6_l$ $\neg Pb$	(6_p) Qb
(3) Pa		
(4) $\neg Qa$		

Budowa drzewa została zakończona. Dodajmy jeszcze, że w rozważanym przypadku kolejność stosowania reguł była jednoznacznie określona. Nie zawsze będziemy zmuszeni do tak rozkosznej bezmyślności; często to, jakie reguły stosować w jakiej kolejności jest niezwykle istotne dla budowania drzew w sposób możliwie najbardziej efektywny (ze względu na rozważany problem), a ponadto zaspokoić pozwala tęsknoty estetyczne, które nie są zarezerwowane jedynie dla przedstawicieli wyższej klasy średniej w krajach cywilizacji judeochrześcijańskiej i euroatlantyckiej.

Zauważmy też, że w gałęzi prawej mogliśmy się posłużyć symbolem a dla wprowadzenia nowej stałej indywiduowej (krok 5.). Tak samo jak w KRZ, to co „dzieje się” na jednej gałęzi nie ma żadnego wpływu na to, co „dzieje się” na pozostałych gałęziach.

Przykład III.1.3.: Chwast

Rozważmy nieco bardziej złożone drzewo semantyczne:



Na pierwszy rzut oka drzewo to nie wygląda najlepiej: zwichrowane, mnóstwo numerków z groźnymi krzyżami, jakieś zwisające z prawej strony czarne liście, itp. ***Spokojnie.***[4] Wszystko zostanie skrupulatnie objaśnione. Do ogrodów logiki droga wiedzie czasem przez chwasty.

W korzeniu drzewa znajduje się zanegowana równoważność. Stosujemy $R(\neg \equiv)$ i otrzymujemy dwie gałęzie: na lewej gałęzi mamy pierwszy człon rozważanej równoważności (1_{lg}) oraz negację drugiego członu (1_{ld}), na gałęzi prawej mamy negację pierwszego członu rozważanej równoważności (1_{pg}) oraz jej drugi człon (1_{pd}).

Bez żadnych uprzedzeń politycznych (nie sympatyzujemy ani z Sojuszami Mańkutów ani z Wszechnawiedzoną Prawicą) ***rozpatrzmy najpierw gałąź lewą.***

W (1_{ld}) mamy zanegowaną formułę generalną, a więc stosujemy $R(\neg\forall)$, wprowadzając nową stałą indywiduową a, co zaznaczamy pisząc z prawej strony formuły (1_{ld}) komentarz: $^{2.\surd a}$; otrzymana w wyniku formuła otrzymuje (z lewej strony) numer (2). Zdaniem generalnym na tej gałęzi jest (1_{lg}), a więc stosujemy $R(\forall)$, umieszczając z prawej strony formuły (1_{lg}) komentarz $^{3.\star a}$ i otrzymując formułę o numerze (3) (umieszczonym z lewej strony). Formuła o numerze (2) jest zanegowaną formułą generalną, a więc stosujemy regułę $R(\neg\forall)$, wprowadzając nową stałą indywiduową b i zaznaczając to działanie komentarzem $^{4.\surd b}$ umieszczonym

[4] To *in extenso* cytowana, najczęściej trafna wypowiedź Profesora Romana Murawskiego. Warto o stosowaniu zalecenia w niej zawartego pamiętać. Ćwiczenie (pozalogiczne) dla Humanistek: czy w wypowiedzi tej mamy *Iussivus*, czy też *Hortativus*? Czy można w tej wypowiedzi wskazać *tryb*? A jaki tryb mamy w często powtarzanych przez Gombrowicza słowach: *Opamiętania, Panie Kazimierzu! Oprzytomnienia!* Czy potraficie odpowiedzieć, nie znając kontekstu wypowiedzi? Zalecenie z tego drugiego cytatu pozwalamy sobie skierować do licznych Zwierzchności, *no names, of course.*

z prawej strony formuły o numerze (2); otrzymujemy przy tym formułę o numerze (4). Następny, piąty krok to zastosowanie $R(\forall)$ do formuły generalnie skwantyfikowanej o numerze (1_{lg}) dla wprowadzonej stałej b: umieszczamy komentarz $^{\dagger 5.\star b}$ z prawej strony formuły (1_{lg}) i otrzymujemy formułę o numerze (†5).

Uwaga. Te kroki oraz otrzymane w wyniku ich wykonania formuły, które mają z lewej strony znak † są, jak wkrótce wyjaśnimy, ***zbędne*** z punktu widzenia podstawowego celu budowania drzew semantycznych, tj. szukania na poszczególnych gałęziach par formuł wzajem sprzecznych. Notację taką stosujemy tylko w tym przykładzie, aby problem klarownie przedstawić i wyjaśnić. Stosowny komentarz znajdą Czytelniczki po skonstruowaniu całego Chwasta.

W tym momencie nie ma już na rozważanej gałęzi formuł, do których można byłoby zastosować regułę $R(\exists)$ lub regułę $R(\neg\forall)$, żadne nowe stałe indywiduowe nie zostaną więc wprowadzone. Ponadto, względem każdej z już nowowprowadzonych stałych (tu: a oraz b) zastosowano też wszędzie gdzie należało regułę $R(\forall)$. Do formuły o numerze (4) stosujemy regułę $R(\neg\rightarrow)$, zaznaczając to komentarzem $^{6.\neg\rightarrow}$ i otrzymując formuły o numerach (6_g) i (6_d) (umieszczone jedna pod drugą w budowanej obecnie gałęzi). Z kolei, do formuły o numerze (3) stosujemy regułę $R(\rightarrow)$, umieszczając komentarz $^{7.\rightarrow}$ z prawej strony formuły o numerze (3) i otrzymując rozgałęzienie drzewa: w lewej gałęzi tego rozgałęzienia mamy formułę o numerze (7_l), a w prawej formułę o numerze (7_p).

W otrzymanej lewej gałęzi pojawiła się negacja formuły egzystencjalnej, a więc powinna ona zostać rozwinięta względem wszystkich występujących na tej gałęzi (idąc od korzenia drzewa) stałych indywiduowych, tj. w naszym przypadku: względem a oraz b. Wykonujemy te działania, tzn. stosujemy do formuły o numerze (7_l) regułę $R(\neg\exists)$: w kroku o opatrzonym komentarzem $^{8.\star b}$ otrzymujemy formułę o numerze (8), a w kroku opatrzonym komentarzem $^{\dagger 9.\star a}$ otrzymujemy formułę o numerze (†9).

Ostatnimi formułami budowanej lewej części (wychodzącej z korzenia) dotąd utworzonego drzewa są formuły o numerach: (†9) oraz (7_p). Jedyną formułą na części wspólnej gałęzi kończących się tymi liśćmi, do której można zastosować jakiekolwiek reguły opuszczania stałych logicznych jest formuła o numerze (†5).[5] Jest to implikacja, a więc zastosowanie odnośnej reguły, tj. $R(\rightarrow)$ daje dwa nowe rozgałęzienia: wykonując krok o komentarzu $^{\dagger 10.\rightarrow}$ tworzymy te rozgałęzienia (formuły o numerach $(\dagger 10_l)$ oraz $(\dagger 10_p)$) zarówno w gałęzi zakończonej formułą (†9), jak i w gałęzi zakończonej formułą o numerze (7_p). W otrzymanych czterech gałęziach tej części budowanego drzewa tylko do formuły o numerze $(\dagger 10_l)$ (występującej na dwóch z tych gałęzi) zastosować można jeszcze jakieś reguły: jest to bowiem negacja formuły egzystencjalnej, a więc nadająca się do zastosowania do niej reguły $R(\neg\exists)$ względem stałych a oraz b. Żwawo wykonujemy tę pracę: kroki opatrzone komentarzami $^{\dagger 11.\star a}$ oraz $^{\dagger 12.\star b}$ dają w rezultacie formuły o numerach, odpowiednio, (†11) i (†12), które umieszczamy pod formułą o numerze $(\dagger 10_l)$ w najbardziej lewej gałęzi drzewa. Podobną pracę musimy wykonać w przypadku formuły o numerze $(\dagger 10_l)$, ale znajdującej się na trzeciej od lewej gałęzi drzewa: kroki opatrzone komentarzami $^{\dagger 13.\star a}$ oraz $^{\dagger 14.\star b}$ dają w rezultacie formuły o numerach, odpowiednio, (†13) i (†14), które umieszczamy pod tą formułą. Dlaczego raz umieszcza się formułę o danym numerze na różnych gałęziach drzewa, a potem wykonując na niej *takie same* operacje (a więc i otrzymując *takie same* wyniki) stosuje się numerację odrębną? To powinno być jasne: formuła o numerze $(\dagger 10_l)$ ***musiała*** być wpisana, jako (lewy) potomek formuły o numerze (†5) zarówno pod formułą o numerze (†9), jak i pod formułą o numerze (7_p). Natomiast kroki $^{\dagger 11.\star a}$ i $^{\dagger 12.\star b}$ są już ***wykonywane na innej*** gałęzi niż kroki $^{\dagger 13.\star a}$ oraz $^{\dagger 14.\star b}$, i stąd inna numeracja. Wykonanie jakiegoś kroku na danej formule jest istotne dla wszystkich formuł, będących ***potomkami*** tej formuły. Mówiąc metaforycznie, każdy krok wykonany na danej formule jest istotny dla wszystkich formuł znajdujących się niżej w drzewie od tej formuły. Żaden z wykonywanych kroków ***nie*** „działa w górę" drzewa.

Teraz Czytelniczki widzą całą lewą część drzewa, wychodzącą z korzenia budowanego drzewa semantycznego. Do żadnej z występujących tu formuł nie można już zastosować żadnej z reguł. Tak więc, ta część drzewa zakończona jest czterema liśćmi. Nie mamy tu nic więcej do roboty.

Wracamy teraz do ***prawej gałęzi*** wyrastającej z korzenia drzewa, tj. do formuł o numerach (1_{pg}) oraz (1_{pd}). Do formuły (1_{pg}) stosujemy regułę $R(\neg\forall)$; wprowadzamy nową ***na tej gałęzi*** stałą — możemy użyć jeszcze nie użytego symbolu, np. c, ale równie dobrze możemy użyć symbolu a, i tak właśnie (z wielkopolską oszczędnością) uczynimy.[6] Z prawej strony formuły o numerze (1_{pg}) umieszczamy więc komentarz $^{15.\checkmark a}$ i

[5] Zajmujemy się tą formułą ***dopiero*** teraz (tj. ***po*** wykonaniu kroku $^{6.\neg\rightarrow}$) z powodów natury pragmatycznej: aby uniknąć rozgałęzienia w drzewie, podwajającego liczbę gałęzi.

[6] To, co „dzieje się" na danej gałęzi drzewa jest niezależne od tego, co „dzieje się" na pozostałych gałęziach, jeśli tę metaforę uznać za tłumaczącą cokolwiek.

otrzymujemy formułę o numerze (15). Formuła o numerze (1_{pd}) jest generalnie skwantyfikowana, należy zatem zastosować do niej regułę $R(\forall)$ względem wprowadzonej przed chwilą nowej stałej a. Jest to krok, do którego komentarz o postaci $^{16.\star a}$ umieszczamy po prawej stronie formuły o numerze (1_{pd}) i w wyniku którego otrzymujemy formułę o numerze (16). Jest to formuła generalnie skwantyfikowana, stosujemy więc do niej regułę $R(\forall)$ względem stałej a; zaznaczamy ten krok pisząc z prawej strony formuły o numerze (16) komentarz $^{\dagger 17.\star a}$ i otrzymujemy formułę o numerze (†17). Do formuły o numerze (15) stosujemy regułę $R(\neg \rightarrow)$, pisząc w odpowiednim miejscu stosowny komentarz i otrzymując formuły o numerach (18_g) oraz (18_d). Formuła o numerze (18_g) jest egzystencjalnie skwantyfikowana, a więc stosujemy regułę $R(\exists)$ wprowadzając nową ***na tej gałęzi*** stałą indywiduową b, umieszczamy komentarz $^{19.\checkmark b}$ z prawej strony formuły o numerze (18_g) i otrzymujemy formułę o numerze (19). Na gałęzi, na której teraz pracujemy, są dwa zdania generalnie skwantyfikowane, do których zastosować należałoby regułę $R(\forall)$ względem stałej b: są to formuły o numerach (1_{pd}) oraz (16). Stosujemy najpierw regułę $R(\forall)$ do formuły o numerze (16) względem stałej b, umieszczając z prawej strony formuły o numerze (16) komentarz $^{20.\star b}$ i otrzymując formułę o numerze (20).

Stosujemy jeszcze trzykrotnie regułę $R(\forall)$: do formuły o numerze (1_{pd}) w kroku $^{\dagger 21.\star b}$, i dwukrotnie do formuły o numerze (†21),[7] w krokach o numerach $^{\dagger 22.\star a}$ oraz $^{\dagger 23.\star b}$, dających w rezultacie formuły o numerach (†22) oraz (†23), odpowiednio.

W prawej części drzewa, na gałęzi na której teraz pracujemy, nie można już stosować żadnych reguł dotyczących kwantyfikatorów.

Do formuły o numerze (20) stosujemy $R(\rightarrow)$ otrzymując rozgałęzienie: formuły o numerach (24_l) oraz (24_p).

Przerywamy w tym miejscu dalszą konstrukcję, i to nie dlatego, że braknie miejsca na stronie. Do pełnego narysowania prawych gałęzi drzewa wyrastających z korzenia potrzeba byłoby jeszcze wykonać trzy kroki: mianowicie do formuł o numerach (†17), (†22) oraz (†23) zastosować regułę $R(\rightarrow)$. Kroki te mają numery: $^{\dagger 25.\rightarrow}$, $^{\dagger 26.\rightarrow}$ oraz $^{\dagger 27.\rightarrow}$, odpowiednio. W rezultacie otrzymamy ostatecznie w prawej części drzewa szesnaście gałęzi (rysunek za chwilę).

Teraz wytłumaczmy, dlaczego przerwaliśmy konstrukcję (i dlaczego wielokrotnie straszyliśmy Czytelniczki znakiem krzyża †). Otóż drzewa semantyczne budujemy w jakimś celu, a nie po to, aby zbudować je po prostu do końca. Proszę zauważyć, że na każdej z sześciu gałęzi powyższego (niedokończonego) drzewa (a w sumie na każdej z dwudziestu gałęzi całego drzewa, jak za chwilę ujrzymy) występuje para formuł sprzecznych (tj. takich, iż jedna jest zaprzeczeniem drugiej); są to formuły o numerach:

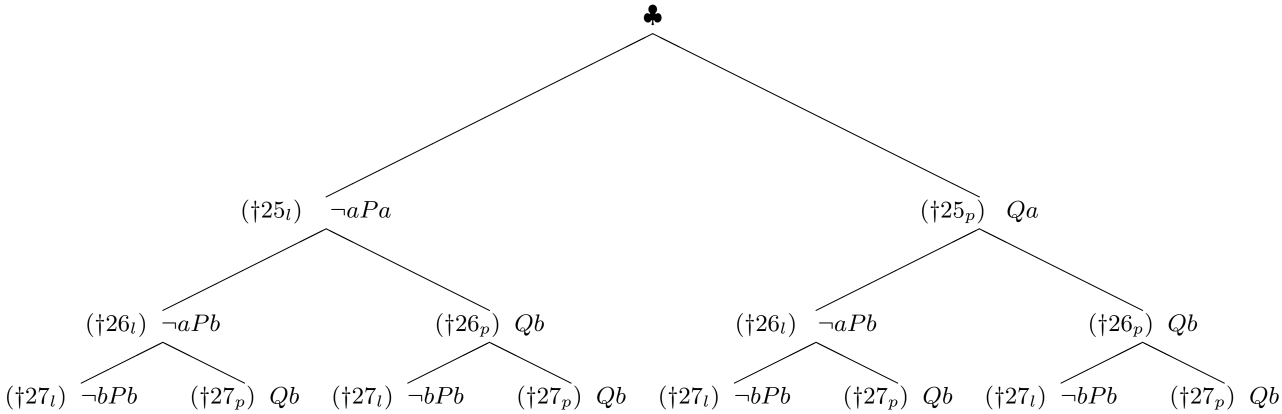
- (6_g) oraz (8);
- (6_d) oraz (7_p);
- (19) oraz (24_l);
- (18_d) oraz (24_p).

W przypadku omawianej metody drzew semantycznych sprzeczność cieszy, bo oznacza zakończenie pracy na danej gałęzi. Inaczej niż w wojsku, reguły budowania drzew wykorzystywać należy z rozsądkiem. Otóż, jak za chwilę się okaże, kompletne wypisywanie tych gałęzi danego drzewa semantycznego, które zawierają parę formuł postaci A oraz $\neg A$ nie jest potrzebne dla celów przeprowadzanej analizy semantycznej. Może ucieszymy (?) Humanistki metaforą, zanim podamy stosowne techniczne definicje: gałęzie zawierające parę formuł sprzecznych są ***martwe***. SPRZECZNOŚĆ TO ŚMIERĆ LOGICZNA.

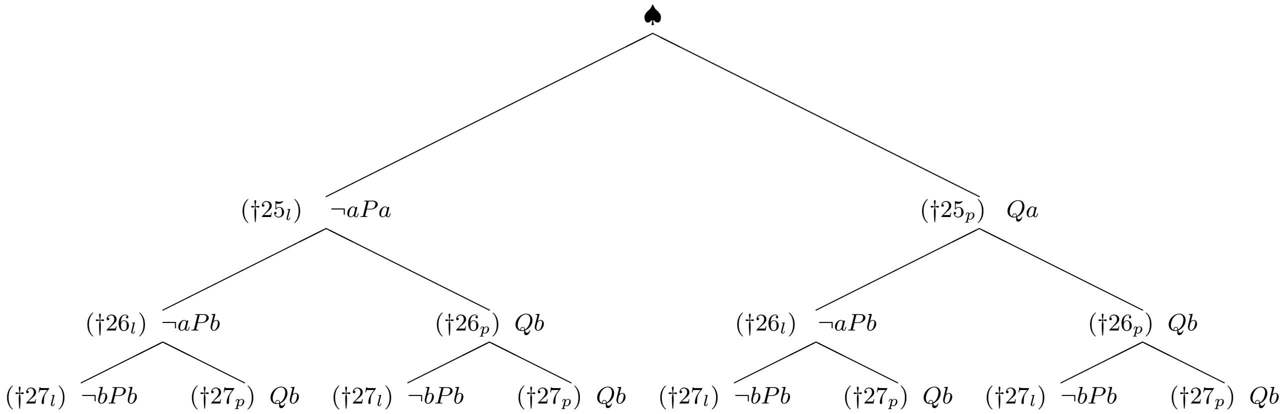
Aby jednak czytający ten tekst Wojskowi nie poczuli się urażeni (nie było naszym zamiarem dworowanie sobie z Sił Zbrojnych oraz ich Zwierzchnika!) podajemy niżej resztę CHWASTA, a mianowicie te jego fragmenty, które trzeba wpisać w miejsce liści: ♣ oraz ♠ (oczywiście usuwając jednocześnie ♣ oraz ♠ z drzewa).

W miejsce liścia ♣ należy wpisać:

[7] Zauważmy, że formuła o numerze (†21) jest formułą generalnie skwantyfikowaną, należy więc rozwinąć ją ze względu na wszystkie występujące na rozważanej gałęzi stałe indywiduowe.



Natomiast w miejsce liścia ♠ należy wpisać:



Bystre Czytelniczki zauważą natychmiast, że w miejsce liścia ♣ wpisujemy dokładnie to samo, co w miejsce liścia ♠. I te Czytelniczki mają absolutną rację! Tak właśnie ma być — wymagają tego reguły budowania drzew semantycznych.

Teraz to już naprawdę nie można dalej kultywować tego Chwasta. Do żadnej z formuł, w żadnej gałęzi nie można już zastosować żadnych reguł. Budowa drzewa została definitywnie zakończona. Aby ujrzeć je w całości, wystarczy wkleić kopie powyższego drzewa w miejsce liści ♣ oraz ♠ w poprzednio budowanym drzewie. Zachęcamy do precyzyjnego wykonania tych czynności osoby odsiadujące zasłużone wyroki.

Pozostaje jeszcze do wyjaśnienia użycie znaku krzyża † w numeracji formuł i komentarzy w rozważanym drzewie. Jak wspomnieliśmy, ma on sygnalizować, że odnośne kroki były ***zbędne*** dla uzyskania stosownych efektów semantycznych. Najpierw jednak definicje.

Bardzo ważne pojęcia związane z rozważaną metodą to pojęcia gałęzi *zamkniętej* oraz *otwartej*.

Gałąź drzewa nazywamy ***zamkniętą***, jeśli występuje na niej para formuł postaci A, $\neg A$. W przeciwnym przypadku gałąź nazywamy ***otwartą***.

Umowa notacyjna. Gałąź zamkniętą drzewa kończyć będziemy liściem z symbolem $\times$ opatrzonym indeksami wskazującymi numery formuł z tej gałęzi, które pozwalają ją zamknąć, tj. które są wzajem sprzeczne.

W drzewie z przykładu Chwast, po formule o numerze (8) możemy gałąź z tą formułą zamknąć, dodając liść postaci: $\times_{6_g,8}$ (i tym samym zakończyć budowanie tej gałęzi), jako iż formuła o numerze (6_g) ma postać bPa, natomiast formuła o numerze (8) jest postaci $\neg bPa$. Prawdę mówiąc, *wszystkie* gałęzie tego drzewa semantycznego można zamknąć: po formule o numerze (7_p) dodajemy liść $\times_{6_d,7_p}$ (wyrzucając wszystkie formuły z obu gałęzi pod formułą o numerze (7_p)), po formule o numerze (24_l) dodajemy liść $\times_{19,24_l}$ (zamiast poddrzewa, które wklejaliśmy w miejsce zaznaczone przez ♣), a po formule o numerze (24_p) dodajemy liść $\times_{18_d,24_p}$ (zamiast poddrzewa, które wklejaliśmy w miejsce zaznaczone przez ♠).

Gałęzie otwarte drzew zaznaczać będziemy, podobnie jak czyniliśmy to w przypadku KRZ, liściem z symbolem $\circ$. W niektórych przypadkach używać też będziemy symbolu $\circ$ z indeksami, lub specjalnie dobranych symboli (np. ♣, ♠, itp.) gdy będzie to przydatne w odwoływaniu się do takiej gałęzi w tekście. Zauważmy, że drzewa semantyczne z przykładów III.1.1. oraz III.1.2. miały wszystkie gałęzie otwarte (pierwsze z nich — jedną, drugie — trzy).

To co najważniejsze, jeśli chodzi o metodę drzew semantycznych da się streścić tak oto. Masz jakąś formułę języka KRP. Budujesz jej drzewo semantyczne. Każda z konstruowanych gałęzi jest próbą konstrukcji interpretacji, w której rozważana formuła jest prawdziwa. Jeśli gałąź jest zamknięta (zawiera parę formuł wzajem sprzecznych), to gałąź taka ***nie może*** odpowiadać żadnej interpretacji, w której badana formuła jest prawdziwa. Zamykanie gałęzi to zatem wykluczanie zachodzenia pewnych sytuacji. Natomiast istnienie gałęzi otwartych w drzewie semantycznym danej formuły ukazuje, że istnieją interpretacje, w których formuła ta jest prawdziwa.

Ważna uwaga natury pragmatycznej.

Cały czas wyrażamy się nieprecyzyjnie, mówiąc o ***zamykaniu*** gałęzi drzew semantycznych. Tak naprawdę, to budując drzewa semantyczne trzeba po prostu zastosować przewidziane reguły do odpowiednich wszystkich formuł. Dopiero wtedy, gdy do żadnej formuły, na żadnej gałęzi ***dotąd otrzymanego*** drzewa nie można już stosować żadnych reguł, budowa drzewa jest zakończona. Ten brak precyzji spróbujemy usprawiedliwić następującym (nieco demagogicznym) apelem do Humanistek (dla wzmocnienia mocy perswazyjnej, podajemy go w dwóch wersjach):[8]

- ***Bądź mądrzejsza od komputera!***
- ***Nie bądź głupsza od komputera!***

Jeśli podczas tworzenia łańcucha formuł w konstruowanym drzewie semantycznym uzyskamy w tym łańcuchu parę formuł wzajem sprzecznych, to dalsza praca z tym łańcuchem jest niepotrzebna: możemy ją zakończyć, doklejając do takiego łańcucha liść z informacją o uzyskaniu sprzeczności i otrzymując w ten sposób gałąź zamkniętą drzewa, traktowaną jako twór kompletny. Pamiętasz: Sprzeczność to śmierć logiczna. Nadto, z kultury masowej pamiętasz: A kto umarł, ten nie żyje. Podstawowym celem budowania drzew semantycznych jest uzyskiwanie łańcuchów zamkniętych, tj. zbiorów formuł wśród których jest para formuł wzajem sprzecznych. Jeśli jakiś zbiór formuł zawiera parę formuł wzajem sprzecznych, to ***każdy*** jego nadzbiór także tę parę zawiera. Można zakończyć pracę.

Mam nadzieję, że ten (również nieco nieprecyzyjny) komentarz trochę ułatwi zrozumienie, na czym w istocie polega metoda drzew semantycznych.

Sens powyższego apelu proszę odbierać następująco: nie wykonuj bezmyślnie wszystkich reguł, staraj się pamiętać, jakiemu celowi służy Twoja praca — masz mianowicie ***wykluczać*** zachodzenie pewnych sytuacji.

Koniec uwagi pragmatycznej.

Gdy wszystkie gałęzie drzewa semantycznego formuły A są zamknięte, to nie istnieje interpretacja, w której formuła ta jest spełniona. Gdy któraś gałąź drzewa semantycznego formuły A jest otwarta, to gałąź taka odpowiada interpretacji, w której A jest spełniona, tj. biorąc pod uwagę wszystkie formuły (atomowe) występujące na tej gałęzi można podać interpretację, w której wszystkie formuły tej gałęzi (a więc także formuła stanowiąca korzeń drzewa) są prawdziwe. W rozdziale IV pokazujemy, że gałęzie otwarte drzew semantycznych (budowanych w pewien specjalny, pedantyczny sposób) tworzą *zbiory Hintikki*, a więc na mocy lematu Hintikki mają modele.[9]

[8]Wersje te nie są semantycznie równoważne. Problematyka dotycząca porównywania możliwości intelektualnych człowieka z możliwościami programu komputerowego należy do ważnych zagadnień badanych w *Artificial Intelligence*. W tym miejscu chodzi nam jedynie o to, że Humanistka może poczuć wyższość intelektualną wobec programu komputerowego w rozwiązywaniu niektórych problemów logicznych.

[9]W używanej w tych notatkach metodzie budowania drzew semantycznych gałęzie otwarte takich drzew dają się rozszerzyć do zbiorów Hintikki.

Formuły, które są ***tautologiami*** KRP mają skończone drzewa semantyczne.[10] Jak stosować metodę drzew semantycznych w badaniu, czy dana formuła języka KRP jest tautologią KRP pokazujemy w podrozdziale III.2. (plik krp322.pdf). Nasze bystre Czytelniczki, lubujące się nie tylko w *czytaniu ze zrozumieniem*, ale także nękane bezustanną świadomością, że stale warto czujnie zadawać (świadczące o opuszczeniu Beztroskiego Dzieciństwa) pytanie PO CO? domyślają się w tym miejscu, że metoda sprawdzania przy pomocy drzew semantycznych, czy dana formuła języka KRP jest tautologią KRP, ma charakter *apagogiczny* — wykluczenie możliwości, że $\neg A$ jest prawdziwa w jakiejś interpretacji (a więc zamknięcie wszystkich gałęzi drzewa semantycznego formuły $\neg A$) pozwala stwierdzić, że formuła A ***jest tautologią*** KRP.

Gdy formuła A ***nie jest*** tautologią KRP, to drzewo semantyczne dla $\neg A$ może być nieskończone.[11] W takim przypadku omawiana metoda uzupełniona może być pewnymi regułami heurystycznymi, które skrótowo omówimy w dalszym rozdziale, dotyczącym zastosowań rozważanej metody.

Drzewa semantyczne budujemy także dla skończonych zbiorów formuł. Na przykład pytanie, czy zbiór formuł $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ jest ***semantycznie niesprzeczny*** (spełnialny) sprowadza się do rozstrzygnięcia, czy istnieje co najmniej jedna interpretacja, w której wszystkie te formuły są jednocześnie prawdziwe; gdy tak jest, to zbiór ów jest semantycznie niesprzeczny, a gdy nie istnieje interpretacja, w której $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ są wszystkie prawdziwe, to zbiór ten jest semantycznie sprzeczny. Gdy więc rozpoczniemy budowę drzewa semantycznego od pnia złożonego z formuł $A_1, A_2, \ldots, A_n$ i wszystkie jego gałęzie będą zamknięte, to wykluczona zostanie możliwość, aby formuły te były prawdziwe w jakiejś wspólnej interpretacji, a to oznacza, iż $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ jest semantycznie sprzeczny. Gdy natomiast drzewo, w którego pniu znajdują się formuły $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ma co najmniej jedną gałąź otwartą, to zbiór $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ jest semantycznie niesprzeczny — interpretację, w której wszystkie formuły $A_1, A_2, \ldots, A_n$ są jednocześnie prawdziwe odtworzyć można z informacji zawartych na tejże właśnie otwartej gałęzi. Więcej na ten temat — w podrozdziale III.3. (plik krp333.pdf).

W przypadku badania metodą drzew semantycznych, czy ze zbioru formuł $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ ***wynika logicznie*** formuła B budujemy drzewo, w którego pniu umieszczamy wszystkie formuły $A_1, A_2, \ldots, A_n$ oraz formułę $\neg B$. Jeśli wszystkie gałęzie tego drzewa są zamknięte, to B wynika logicznie z $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, jako iż wykluczone zostaje istnienie interpretacji, w której prawdziwe byłyby wszystkie formuły $A_1, A_2, \ldots, A_n$ oraz formuła $\neg B$, czyli interpretacji, w której ***prawdziwe*** byłyby wszystkie formuły $A_1, A_2, \ldots, A_n$ oraz ***fałszywa*** byłaby formuła B. Gdy zaś drzewo takie ma co najmniej jedną gałąź otwartą, to dostarcza ona przykładu interpretacji, w której wszystkie formuły $A_1, A_2, \ldots, A_n$ są prawdziwe, a formuła B jest fałszywa (bo $\neg B$ wtedy prawdziwa) — a to oznacza, że B nie wynika logicznie z $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$. Więcej na ten temat — w podrozdziale III.4. (plik krp344.pdf).

W przykładzie CHWAST wszystkie gałęzie były zamknięte (niektóre zamykały się jeszcze przed wykonaniem wszystkich możliwych operacji). Tak więc, zanegowana równoważność z tego przykładu *nie jest prawdziwa* w żadnej interpretacji. Stąd, równoważność występująca w nawiasie *jest prawdziwa* we wszystkich interpretacjach, a zatem jest tautologią KRP. W tym przykładzie wykonanie kroków $^{\dagger 5.\star b}$, $^{\dagger 9.\star a}$ oraz $^{\dagger 17 \star a}$ było niepotrzebne, w tym sensie, że formuły otrzymane w wyniku ich wykonania nie były wykorzystane do zamknięcia gałęzi. To samo dotyczy także kroków o numerach: $^{\dagger 10.\rightarrow}$, $^{\dagger 11.\star a}$, $^{\dagger 12.\star b}$, $^{\dagger 13.\star a}$, $^{\dagger 14.\star b}$, jak również kroków: $^{\dagger 21.\star b}$, $^{\dagger 22.\star a}$, $^{\dagger 23.\star b}$, $^{\dagger 25.\rightarrow}$, $^{\dagger 26.\rightarrow}$ i $^{\dagger 27.\rightarrow}$.

Znak krzyża † umieszczaliśmy zatem wszędzie tam, gdzie wykonywana praca (i w konsekwencji, jej efekty) była bezcelowa dla uzyskania zamierzonych efektów semantycznych. Uprzejmie proszę zauważyć, że jeśli jakaś formuła miała numer oznaczony krzyżem †, to także wszystkie kroki wykonane na tej formule oraz, oczywiście, także rezultaty wykonania takich kroków, również oznaczone były krzyżem †. Można więc rzec, że działanie niepotrzebne (bezsensowne) jest dziedziczne: jeśli poczniesz coś niepotrzebnie (bez sensu), to cokolwiek zrobi wynikłe stąd potomstwo też będzie niepotrzebne (bez sensu).

W pozostałych przykładach omawianych w tych notatkach nie będziemy już używać znaku krzyża †. Będziemy natomiast dodawać stosowne komentarze wszędzie tam, gdzie któreś z wykonywanych kroków będą zbędne dla zamykania gałęzi drzew semantycznych.

Proszę na koniec zwrócić uwagę, że o krokach zbędnych mówiliśmy tylko w przypadku konstruowania gałęzi ***zamkniętych***. Jak rzecz się ma z krokami zbędnymi w przypadku gałęzi otwartych (i co miałoby oznaczać, że jakaś formuła jest zbędna w gałęzi otwartej) zobaczymy w niektórych dalszych przykładach.

[10] To stwierdzenie wymaga oczywiście uzasadnienia — zob. rozdział IV.

[11] Także to stwierdzenie jest uzasadniane w rozdziale IV.

Usilnie zachęcamy Czytelniczki do wykonania nietrudnego ćwiczenia: narysowania tego fragmentu drzewa z przykładu Chwast, w którym nie występują żadne zbędne kroki konstrukcyjne (zbędne w tym sensie, iż mogą zostać opuszczone, a w skonstruowanym drzewie wszystkie gałęzie będą zamknięte). Otrzymane drzewo powinno mieć cztery gałęzie, wszystkie zamknięte.

Na koniec tego podrozdziału podamy jeszcze dwa przykłady, w których wystąpią drzewa *nieskończone.*

Przykład III.1.4.: Nie jest dobrze

Niewinnie wyglądająca formuła języka KRP

$$\exists x\, Px \wedge \forall y \exists z\, yQz$$

ma nieskończone drzewo semantyczne:

$$\begin{array}{rc}
 & \exists x\, Px \wedge \forall y \exists z\, yQz \quad {}^{1.\wedge} \\
 & | \\
(1_g) & \exists x\, Px \quad {}^{2.\checkmark a} \\
 & | \\
(1_d) & \forall y \exists z\, yQz \quad {}^{3.\star a\ 5.\star b\ 7.\star c} \\
 & | \\
(2) & Pa \\
 & | \\
(3) & \exists z\, aQz \quad {}^{4.\checkmark b} \\
 & | \\
(4) & aQb \\
 & | \\
(5) & \exists z\, bQz \quad {}^{6.\checkmark c} \\
 & | \\
(6) & bQc \\
 & | \\
(7) & \exists z\, cQz \\
 & | \\
 & \vdots
\end{array}$$

Powinno być widoczne, że budowy tego drzewa semantycznego zakończyć nie można. Tak, jak każą reguły, wprowadziliśmy stałą indywiduową opuszczając kwantyfikator egzystencjalny w formule o numerze (1_g). Rozwinięcie formuły generalnej (1_d) ze względu na tę stałą dało w wyniku zdanie egzystencjalne. Wprowadziliśmy nową stałą, rozwinęliśmy względem niej formułę generalną (1_d), znów otrzymaliśmy formułę egzystencjalną, itd.

Jeśli Czytelniczki pragną bliższego oswojenia się z ewentualnymi interpretacjami tej formuły, to proponujemy czytać Px np. jako *x jest bezrobotna*, zaś xQy jako *x jest zapożyczona u y*. Czy zdanie: *Nie dość, że mamy bezrobocie, to w dodatku wszyscy mają długi* brzmi swojsko?

Przykład III.1.5.: Sadomasochista

Zdanie:

Jest ktoś, kto jest szczęśliwy tylko wtedy, gdy wszyscy są nieszczęśliwi.

ma dość ponury wydźwięk społeczny. Pokażemy, że choć istnienie takiego osobnika nie jest (niestety) logicznie wykluczone, to nie jest też ono (na szczęście) logicznie konieczne.

Uznajmy (zgroza!), że *być szczęśliwym* to predykat jednoargumentowy. Czytajmy Sx jako: *x jest szczęśliwy.* Zbudujmy drzewo dla formuły języka KRP, która odpowiada strukturze składniowej rozważanego zdania:

$$
\begin{array}{c}
\exists x \forall y\,(Sx \to \neg Sy)\ \ ^{1.\checkmark a}\\
|\\
(1)\ \ \forall y\,(Sa \to \neg Sy)\ \ ^{2.\star a}\\
|\\
(2)\ \ Sa \to \neg Sa\ \ ^{3\to}\\
\begin{array}{cc}
/ & \backslash\\
(3_l)\ \ \neg Sa & (3_p)\ \ \neg Sa\\
| & |\\
\circ & \circ
\end{array}
\end{array}
$$

Na tym budowę drzewa musimy zakończyć — na żadnej jego gałęzi nie ma żadnych formuł, do których można byłoby stosować jakiekolwiek reguły opuszczania stałych logicznych.

Ponieważ drzewo to ma gałęzie otwarte, więc rozważana formuła jest prawdziwa w jakichś interpretacjach. Na przykład, jest prawdziwa w uniwersum jednoelementowym, w którym dopełnienie denotacji predykatu S zawiera całe to uniwersum. Wracając do interpretacji wyjściowej, rozpatrywane zdanie jest prawdziwe np. w świecie złożonym z jednego nieszczęśliwego osobnika. Jako ćwiczenie polecamy namysł nad tym, w jakich innych jeszcze światach zdanie to jest prawdziwe (czy mogą w nich istnieć ludzie szczęśliwi?).

Zbudujmy teraz drzewo semantyczne dla negacji rozważanej formuły:

$$
\begin{array}{c}
\neg(\exists x \forall y(Sx \to \neg Sy))\ \ ^{1.\star a\ \ 3.\star b\ \ 7.\star c}\\
|\\
(1)\ \ \neg\forall y\,(Sa \to \neg Sy)\ \ ^{2.\checkmark b}\\
|\\
(2)\ \ \neg(Sa \to \neg Sb)\ \ ^{4.\neg\to}\\
|\\
(3)\ \ \neg\forall y\ \ (Sb \to \neg Sy)\ \ ^{6.\checkmark c}\\
|\\
(4_g)\ \ Sa\\
|\\
(4_d)\ \ \neg\neg Sb\ \ ^{5.\neg\neg}\\
|\\
(5)\ \ Sb\\
|\\
(6)\ \ \neg(Sb \to \neg Sc)\ \ ^{8.\neg\to}\\
|\\
(7)\ \ \neg\forall y\,(Sc \to \neg Sy)\\
|\\
(8_g)\ \ Sb\\
|\\
(8_d)\ \ \neg\neg Sc\ \ ^{9.\neg\neg}\\
|\\
(9)\ \ Sc\\
|\\
\vdots
\end{array}
$$

Na początku, nie mamy tu do dyspozycji formuły egzystencjalnie skwantyfikowanej, do której moglibyśmy bezpośrednio zastosować regułę $R(\exists)$ ani negacji formuły generalnie skwantyfikowanej, do której moglibyśmy zastosować regułę $R(\neg\forall)$. W takich przypadkach wprowadzamy nową stałą indywiduową korzystając z dowolnego zdania generalnie skwantyfikowanego lub negacji zdania egzystencjalnie skwantyfikowanego, tzn. rozwijamy takie zdanie ze względu na dowolną stałą indywiduową z języka KRP.[12] Tu mamy do czynienia z

[12]Logicy uprawiają ***semantykę z zabezpieczeniem***, mówiąc po aptekarsku. Zakłada się, że w języku mamy do dyspozycji stałe indywiduowe, a więc zawsze można ich użyć, gdy jest taka potrzeba. Tu mamy do czynienia z taką właśnie sytuacją. Dodajmy jeszcze, że możliwość *konstruowania* odniesienia przedmiotowego (interpretacji) języka KRP z wyrażeń tego języka jest jedną z podstawowych technik pokazywania ***pełności*** KRP, a także ***pełności*** metody drzew semantycznych. Wykorzystywane są przy tym uniwersa Herbranda, o których wspominaliśmy w części wstępnej niniejszych notatek, i które umożliwiają zbudowanie interpretacji języka KRP z wyrażeń tego języka, bez odwoływania się do jakiejkolwiek innej, zgrzebnej, siermiężnej, itp. rzeczywistości. Dokładniej o tych zagadnieniach piszemy w rozdziale IV.

drugim z takich przypadków. Wprowadzenie nowej stałej daje w wyniku negację zdania generalnie skwantyfikowanego, to pozwala wprowadzić kolejną nową stałą; zastosowanie wobec tej drugiej stałej reguły $R(\neg\exists)$ generuje następne zdanie egzystencjalne, itd.

W rezultacie otrzymujemy gałąź nieskończoną, a to oznacza, że formuła $\exists x \forall y(Sx \rightarrow \neg Sy)$ nie jest tautologią KRP. A więc — w szczególności — istnienie kogoś, kto żywiłby się wyłącznie *Schadenfreude* nie jest logicznie konieczne. Jako ćwiczenie proponujemy Czytelniczkom znalezienie kilku innych jeszcze, w miarę możności wesołych, acz przyzwoitych (lub choćby mieszczących się w granicach prawa) interpretacji dla predykatu S i odczytanie co „mówi" o tych interpretacjach badana formuła.

* * *

Zachęcamy do lektury dalszych podrozdziałów. Może zakończą się weselej?

Jerzy Pogonowski
Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl