LOGIKA JAMESA BONDA

Treść zadania

Zadanie 1 z egzaminu z logiki dla Etnolingwistyki UAM z 2008 roku może być rozwiązywane różnymi sposobami. Przypomnijmy, w zadaniu tym chodziło o ustalenie, czy ze zdania:

(A) *Drink jest wstrząśnięty, ale nie zmieszany.*

wynikają logicznie pewne inne zdania, np.:

- (Ia) *Drink nie jest zmieszany, o ile jest wstrząśnięty.*
- (Ib) *Jeśli drink nie jest zmieszany, to nie jest wstrząśnięty.*
- (IIa) *Drink jest zmieszany, o ile nie jest wstrząśnięty.*
- (IIb) *Drink jest zmieszany dokładnie wtedy, gdy jest wstrząśnięty.*
- (IIIa) *Jeśli drink nie jest wstrząśnięty, to nie jest zmieszany.*
- (IIIb) *Drink jest zmieszany, o ile jest wstrząśnięty.*

Przypominamy: zdanie B wynika logicznie ze zdania A, gdy formuła β, będąca schematem zdania B wynika logicznie na gruncie KRZ z formuły α, będącej schematem zdania A.

Przypominamy: formuła β ***wynika logicznie*** na gruncie KRZ z formuły α, gdy przy każdym wartościowaniu zmiennych zdaniowych, przy którym α przyjmuje wartość 1, również β przyjmuje wartość 1.

A zatem formuła β ***nie wynika logicznie*** na gruncie KRZ z formuły α, gdy istnieje co najmniej jedno wartościowanie zmiennych zdaniowych, przy którym α przyjmuje wartość 1, a β wartość 0.

Wystarczyło zatem znaleźć schemat α zdania A oraz schemat β odpowiedniego zdania B z wyliczonych wyżej i ustalić, czy β wynika logicznie z α na gruncie KRZ.

Niech zdaniom prostym odpowiadają zmienne zdaniowe:

- *Drink jest wstrząśnięty* — p
- *Drink jest zmieszany* — q.

Wtedy schematem zdania A jest: $p \wedge \neg q$.

Schematami zdań wyliczonych wyżej są, odpowiednio:

- (Ia) $p \rightarrow \neg q$
- (Ib) $\neg q \rightarrow \neg p$
- (IIa) $\neg p \rightarrow q$
- (IIb) $q \equiv p$
- (IIIa) $\neg p \rightarrow \neg q$
- (IIIb) $p \rightarrow q$.

1. Najprostsza metoda rozwiązania

Niech β będzie którąś z formuł (Ia)–(IIIb). Najprościej było zapytać: czy istnieje wartościowanie zmiennych zdaniowych, przy którym $p \wedge \neg q$ ma wartość 1, a β ma wartość 0?

- Jeśli takie wartościowanie istnieje, to β ***nie wynika logicznie*** z $p \wedge \neg q$.
- Jeśli takie wartościowanie nie istnieje, to β ***wynika logicznie*** z $p \wedge \neg q$.

Zauważmy, że $p \wedge \neg q$ ma wartość 1 tylko przy wartościowaniu w, dla którego $w(p) = 1$ oraz $w(q) = 0$. Wystarczy zatem obliczyć, jaka jest wartość β dla tego wartościowania:

- Jeśli $w(\beta) = 0$, to β ***nie wynika logicznie*** z $p \wedge \neg q$.
- Jeśli $w(\beta) = 1$, to β ***wynika logicznie*** z $p \wedge \neg q$.

Dla pełności, podamy całą tablicę wartościowań stosownych formuł. Wystarczyło wykonać obliczenie w przedostatnim wierszu:

					(Ia)	(Ib)	(IIa)	(IIb)	(IIIa)	(IIIb)
p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$p \rightarrow \neg q$	$\neg q \rightarrow \neg p$	$\neg p \rightarrow q$	$q \equiv p$	$\neg p \rightarrow \neg q$	$p \rightarrow q$
0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1

Z tabeli tej widać zatem, że:

- Formuły: (Ia), (IIa) oraz (IIIa) wynikają logicznie z $p \wedge \neg q$.
- Formuły: (Ib), (IIb) oraz (IIIb) nie wynikają logicznie z $p \wedge \neg q$.

2. Tautologie i reguły niezawodne

Poprzednia metoda rozwiązania była prosta, bo i rozważane formuły były proste. W ogólności jednak powyższa metoda nie jest zalecana, jako bardzo pracochłonna. Gdy mamy sprawdzić, czy z formuły $F(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ wynika logicznie na gruncie KRZ formuła $G(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, gdzie F oraz G są dowolnymi funkcjami Boolowskimi zmiennych $p_1, p_2, \ldots, p_n$, to zaleca się stosowanie metod nie wprost.

Wiadomo, że formuła $G(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ wynika logicznie na gruncie KRZ z formuły $F(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ w każdym z obu poniższych przypadków:

- Implikacja $F(p_1, p_2, \ldots, p_n) \rightarrow G(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ jest tautologią KRZ.
- Reguła o przesłance $F(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ i wniosku $G(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ jest niezawodna w KRZ.

W przypadku naszego zadania problem sprowadza się zatem do ustalenia, które z poniższych formuł są tautologiami KRZ:

- (TIa) $(p \wedge \neg q) \rightarrow (p \rightarrow \neg q)$
- (TIb) $(p \wedge \neg q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$
- (TIIa) $(p \wedge \neg q) \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$
- (TIIb) $(p \wedge \neg q) \rightarrow (q \equiv p)$
- (TIIIa) $(p \wedge \neg q) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg q)$
- (TIIIb) $(p \wedge \neg q) \rightarrow (p \rightarrow q)$.

Podamy rozwiązanie, metodą nie wprost, dla formuł (TIa) oraz (TIb). W pozostałych przypadkach postępujemy podobnie.

Formuła (TIa) $(p \wedge \neg q) \rightarrow (p \rightarrow \neg q)$.

Przypuśćmy, że (TIa) ***nie jest*** tautologią KRZ. Wtedy istnieje wartościowanie w takie, że $w((p \wedge \neg q) \rightarrow (p \rightarrow \neg q)) = 0$. Mamy stąd kolejno:

1. $w(p \wedge \neg q) = 1$ oraz $w(p \rightarrow \neg q) = 0$.
2. Skoro $w(p \wedge \neg q) = 1$, to $w(p) = 1$ oraz $w(\neg q) = 1$.
3. Skoro $w(\neg q) = 1$, to $w(q) = 0$.
4. Skoro $w(p) = 1$ oraz $w(q) = 0$, to $w(p \rightarrow \neg q) = 1$.
5. Wyniki otrzymane w punktach 1 oraz 4 są sprzeczne: nie może być jednocześnie $w(p \rightarrow \neg q) = 0$ oraz $w(p \rightarrow \neg q) = 1$.
6. A zatem nie istnieje wartościowanie w, dla którego:
   $w((p \wedge \neg q) \rightarrow (p \rightarrow \neg q)) = 0$.

7. Stąd, dla każdego wartościowania w mamy: $w((p \wedge \neg q) \rightarrow (p \rightarrow \neg q)) = 1$.

8. Oznacza to, że $(p \wedge \neg q) \rightarrow (p \rightarrow \neg q)$ jest tautologią KRZ.

9. Wreszcie, oznacza to także, że formuła $p \rightarrow \neg q$ ***wynika logicznie*** na gruncie KRZ z formuły $p \wedge \neg q$.

Formuła (TIb) $(p \wedge \neg q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$.

Przypuśćmy, że (TIb) ***nie jest*** tautologią KRZ. Wtedy istnieje wartościowanie w takie, że $w((p \wedge \neg q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)) = 0$. Mamy stąd kolejno:

1. $w(p \wedge \neg q) = 1$ oraz $w(\neg q \rightarrow \neg p) = 0$.

2. Skoro $w(p \wedge \neg q) = 1$, to $w(p) = 1$ oraz $w(\neg q) = 1$.

3. Skoro $w(\neg q) = 1$, to $w(q) = 0$.

4. Skoro $w(\neg q \rightarrow \neg p) = 0$, to $w(\neg q) = 1$ oraz $w(\neg p) = 0$.

5. Skoro $w(\neg q) = 1$, to $w(q) = 0$.

6. Skoro $w(\neg p) = 0$, to $w(p) = 1$.

7. Znaleźliśmy zatem wartościowanie w takie, że: $w(p) = 1$, $w(q) = 0$ oraz
   $w((p \wedge \neg q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)) = 0$.

8. A zatem formuła $(p \wedge \neg q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$ przyjmuje wartość 0 przy co najmniej jednym wartościowaniu zmiennych zdaniowych.

9. Stąd, formuła $(p \wedge \neg q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$ nie jest tautologią KRZ.

10. Oznacza to, że formuła $\neg q \rightarrow \neg p$ ***nie wynika logicznie*** na gruncie KRZ z formuły $p \wedge \neg q$.

Analogicznie pokazujemy, że formuły: (TIIa) i (TIIIa) są tautologiami KRZ, a formuły: (TIIb) i (TIIIb) nie są tautologiami KRZ.

3. Tablice analityczne

Jak pamiętamy z wykładu, metoda tablic analitycznych dla KRZ jest trafna i pełna. Można więc za jej pomocą rozstrzygać pytania o tautologiczność formuł języka KRZ, o wynikanie logiczne na gruncie KRZ, o semantyczną niesprzeczność zbiorów formuł języka KRZ, itp.

W szczególności, dla dowolnych funkcji Boolowskich F oraz G mamy:

- Implikacja $F(p_1, p_2, \ldots, p_n) \rightarrow G(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ jest tautologią KRZ wtedy i tylko wtedy, gdy tablica analityczna formuły

$$\neg(F(p_1, p_2, \ldots, p_n) \rightarrow G(p_1, p_2, \ldots, p_n))$$

  jest zamknięta (czyli ma wszystkie gałęzie zamknięte, lub, inaczej mówiąc: na każdej gałęzi tej tablicy występuje para formuł wzajem sprzecznych).

- Reguła o przesłance $F(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ i wniosku $G(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ jest niezawodna w KRZ wtedy i tylko wtedy, gdy tablicowo sprzeczny jest zbiór złożony z formuł $F(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ oraz $\neg G(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, czyli gdy tablica analityczna rozpoczynająca się od tych formuł jest zamknięta.

Rozwiązanie naszego zadania metodą tablic analitycznych sprowadza się zatem do ustalenia, czy tablice analityczne następujących formuł są zamknięte:

- (TAIa) $\neg((p \wedge \neg q) \rightarrow (p \rightarrow \neg q))$
- (TAIb) $\neg((p \wedge \neg q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p))$
- (TAIIa) $\neg((p \wedge \neg q) \rightarrow (\neg p \rightarrow q))$
- (TAIIb) $\neg((p \wedge \neg q) \rightarrow (q \equiv p))$
- (TAIIIa) $\neg((p \wedge \neg q) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg q))$
- (TAIIIb) $\neg((p \wedge \neg q) \rightarrow (p \rightarrow q))$.

Równoważnie, można sprawdzać, czy następujące zbiory formuł są tablicowo sprzeczne:

- (TSIa) $\{p \wedge \neg q,\ \neg(p \rightarrow \neg q)\}$
- (TSIb) $\{p \wedge \neg q,\ \neg(\neg q \rightarrow \neg p)\}$
- (TSIIa) $\{p \wedge \neg q,\ \neg(\neg p \rightarrow q)\}$
- (TSIIb) $\{p \wedge \neg q,\ \neg(q \equiv p)\}$
- (TSIIIa) $\{p \wedge \neg q,\ \neg(\neg p \rightarrow \neg q)\}$
- (TSIIIb) $\{p \wedge \neg q,\ \neg(p \rightarrow q)\}$.

Podamy, przykładowo, rozwiązania dla (TAIIa), (TAIIb), (TSIIIa), (TSIIIb). W pozostałych przypadkach postępuje się analogicznie.

Tablica analityczna formuły (TAIIa): $\neg((p \wedge \neg q) \rightarrow (\neg p \rightarrow q))$

$$
\begin{array}{c}
(0)\ \neg((p \wedge \neg q) \rightarrow (\neg p \rightarrow q))\ ^{1.\neg\rightarrow} \\
| \\
(1_g)\ p \wedge \neg q\ ^{2.\wedge} \\
| \\
(1_d)\ \neg(\neg p \rightarrow q)\ ^{3.\neg\rightarrow} \\
| \\
(2_g)\ p \\
| \\
(2_d)\ \neg q \\
| \\
(3_g)\ \neg p \\
| \\
(3_d)\ \neg q \\
| \\
\times_{2_g,3_g}
\end{array}
$$

Tablica jest zamknięta, co oznacza (na mocy trafności i pełności metody tablic analitycznych w KRZ), że formuła $(p \wedge \neg q) \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$ jest tautologią KRZ.

Tablica analityczna formuły (TAIIb): $\neg((p \wedge \neg q) \rightarrow (q \equiv p))$

$$
\begin{array}{c}
(0)\ \neg((p \wedge \neg q) \rightarrow (q \equiv p))\ ^{1.\neg\rightarrow} \\
| \\
(1_g)\ p \wedge \neg q\ ^{2.\wedge} \\
| \\
(1_d)\ \neg(q \equiv p)\ ^{3.\neg\equiv} \\
| \\
(2_g)\ p \\
| \\
(2_d)\ \neg q \\
\swarrow \qquad \searrow \\
\begin{array}{cc}
(3_{lg})\ q & (3_{pg})\ \neg q \\
| & | \\
(3_{ld})\ \neg p & (3_{pd})\ p \\
| & | \\
\times_{2_d,3_{lg}} & \spadesuit
\end{array}
\end{array}
$$

Tablica ma gałąź otwartą, a zatem (na mocy trafności i pełności metody tablic analitycznych w KRZ), formuła $(p \wedge \neg q) \rightarrow (q \equiv p)$ nie jest tautologią KRZ.

(TSIIIa). Czy zbiór $\{p \wedge \neg q,\ \neg(\neg p \rightarrow \neg q)\}$ jest tablicowo sprzeczny?

Budujemy tablicę analityczną zaczynającą się od formuł $p \wedge \neg q$ oraz $\neg(\neg p \rightarrow \neg q)$:

$$
\begin{array}{c}
(0.1)\ p \wedge \neg q \ ^{1.\wedge} \\
| \\
(0.2)\ \neg(\neg p \rightarrow \neg q) \ ^{2.\neg\rightarrow} \\
| \\
(1_g)\ p \\
| \\
(1_d)\ \neg q \\
| \\
(2_g)\ \neg p \\
| \\
(2_d)\ \neg\neg q \\
| \\
\times_{1_g, 2_g}
\end{array}
$$

Tablica zamknięta, co oznacza, że zbiór formuł $\{p \wedge \neg q,\ \neg(\neg p \rightarrow \neg q)\}$ jest tablicowo sprzeczny. A zatem (na mocy trafności i pełności metody tablic analitycznych w KRZ) formuła $\neg p \rightarrow \neg q$ wynika logicznie na gruncie KRZ z formuły $p \wedge \neg q$.

(TSIIIb). Czy zbiór $\{p \wedge \neg q,\ \neg(p \rightarrow q)\}$ jest tablicowo sprzeczny?

Budujemy tablicę analityczną zaczynającą się od formuł $p \wedge \neg q$ oraz $\neg(p \rightarrow q)$:

$$
\begin{array}{c}
(0.1)\ p \wedge \neg q \ ^{1.\wedge} \\
| \\
(0.2)\ \neg(p \rightarrow q) \ ^{2.\neg\rightarrow} \\
| \\
(1_g)\ p \\
| \\
(1_d)\ \neg q \\
| \\
(2_g)\ p \\
| \\
(2_d)\ \neg q \\
| \\
\spadesuit
\end{array}
$$

Tablica ma gałąź otwartą, a zatem zbiór $\{p \wedge \neg q,\ \neg(p \rightarrow q)\}$ nie jest tablicowo sprzeczny. Oznacza to (na mocy trafności i pełności metody tablic analitycznych w KRZ), że formuła $p \rightarrow q$ nie wynika logicznie na gruncie KRZ z formuły $p \wedge \neg q$.

Analogicznie pokazuje się, że:

- Formuły (TAIa) i (TAIIIa) mają tablice zamknięte.
- Formuły (TAIb) i (TAIIIb) mają tablice otwarte.
- Zbiory (TSIa) i (TSIIa) są tablicowo sprzeczne.
- Zbiory (TSIb) i (TSIIb) nie są tablicowo sprzeczne.

4. Dowody założeniowe

Niech β będzie jedną z formuł (Ia)–(IIIb). Nasze zadanie byłoby rozwiązane, gdyby udało się pokazać, że $(p \wedge \neg q) \rightarrow \beta$ jest (bądź nie jest) tezą systemu założeniowego KRZ. Wtedy, korzystając z twierdzenia o trafności i pełności metody założeniowej w KRZ, wiedzielibyśmy też, czy $(p \wedge \neg q) \rightarrow \beta$ jest (bądź nie jest) tautologią KRZ, a stąd również, czy formuła β wynika logicznie na gruncie KRZ z formuły $p \wedge \neg q$.

Dowody założeniowe formuł:

- (ZIa) $(p \wedge \neg q) \rightarrow (p \rightarrow \neg q)$
- (ZIIa) $(p \wedge \neg q) \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$
- (ZIIIa) $(p \wedge \neg q) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg q)$

są bardzo proste, podajemy je niżej.

Dowód założeniowy formuły (ZIa) $(p \wedge \neg q) \rightarrow (p \rightarrow \neg q)$:

1.	$p \wedge \neg q$	założenie
2.	p	założenie
3.	$\neg q$	OK: 1.

Dowód założeniowy formuły (ZIIa) $(p \wedge \neg q) \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$:

1.	$p \wedge \neg q$	założenie
2.	$\neg p$	założenie
3.	p	OK: 1
4.	q	Reguła Dunsa Scotusa: 2,3.

Dowód założeniowy formuły (ZIIIa) $(p \wedge \neg q) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg q)$:

1.	$p \wedge \neg q$	założenie
2.	$\neg p$	założenie
3.	$\neg q$	OK: 1.

Natomiast formuły:

- (ZIb) $(p \wedge \neg q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$
- (ZIIb) $(p \wedge \neg q) \rightarrow (q \equiv p)$
- (ZIIIb) $(p \wedge \neg q) \rightarrow (p \rightarrow q)$

nie posiadają dowodów założeniowych, a więc nie są tezami systemu założeniowego KRZ. Przekonujemy się o tym, ***próbując*** zbudować dowody ***nie wprost*** tych formuł i ponosząc przy tym porażkę. Próby te kończą się mianowicie uzyskaniem w wierszach dowodowych tzw. *literałów*, tj. zmiennych lub negacji zmiennych (występujących w rozważanej formule), przy czym nie otrzymuje się żadnej pary literałów wzajem sprzecznych. Ponieważ w naszym przypadku jedynymi zmiennymi zdaniowymi są

p oraz q, to literałami są: p, q, $\neg p$ oraz $\neg q$. Brak powodzenia w próbach budowy dowodów nie wprost sprowadza się do tego, że nie uzyskujemy ani pary p i $\neg p$, ani pary q i $\neg q$. Należy pamiętać, że pokazanie w ten sposób, iż nie otrzymuje się pary wzajem sprzecznych literałów jest w istocie ***sukcesem***: pokazuje, że rozważana formuła nie ma dowodu założeniowego nie wprost, a więc nie jest tezą systemu założeniowego KRZ.

A oto owe próby, wykazujące, że rozważane formuły ***nie mają żadnego*** dowodu założeniowego nie wprost, a więc nie są tezami systemu założeniowego KRZ.

Próba zbudowania dowodu nie wprost formuły (ZIb) $(p \wedge \neg q) \to (\neg q \to \neg p)$:

1.	$p \wedge \neg q$	założenie
2.	$\neg q$	założenie
3.	$\neg\neg p$	z.d.n.
4.	p	OK: 1
5.	$\neg q$	OK: 1
6.	p	ON: 3.

Otrzymaliśmy zmienną zdaniową p oraz negację zmiennej zdaniowej q. Widać, że z wierszy dowodu nie można otrzymać pary formuł wzajem sprzecznych. A zatem formuła $(p \wedge \neg q) \to (\neg q \to \neg p)$ nie jest tezą systemu założeniowego KRZ.

Próba zbudowania dowodu nie wprost formuły (ZIIb) $(p \wedge \neg q) \to (q \equiv p)$:

1.	$p \wedge \neg q$	założenie
2.	$\neg(q \equiv p)$	z.d.n.
3.	$\neg((q \to p) \wedge (p \to q))$	na mocy tezy: $(q \equiv p) \equiv ((q \to p) \wedge (p \to q))$
4.	$\neg(q \to p) \vee \neg(p \to q)$	Prawo De Morgana dla koniunkcji: 3
5.	$(q \wedge \neg p) \vee (p \wedge \neg q)$	Negowanie implikacji: 4
6.	$((q \wedge \neg p) \vee p) \wedge ((q \wedge \neg p) \vee \neg q)$	Prawo rozdzielności: 5
7.	$((q \vee p) \wedge (\neg p \vee p)) \wedge ((q \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg q))$	Prawo rozdzielności: 6
8.	$(q \vee p) \wedge (\neg p \vee p)$	OK: 7
9.	$(q \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$	OK: 7
10.	$q \vee p$	OK: 8
11.	$\neg p \vee p$	OK: 8
12.	$q \vee \neg q$	OK: 9
13.	$\neg p \vee \neg q$	OK: 9
14.	p	OK: 1
15.	$\neg q$	OK: 1
16.	p	OA: 10, 15
17.	$\neg\neg p$	DN: 16
18.	$\neg q$	OA: 13, 17.

W powyższych przekształceniach wykorzystaliśmy milcząco pewne tezy systemu założeniowego KRZ. W wierszach 10.–13. otrzymaliśmy tzw. *alternatywy elementarne*. Ostatecznie, otrzymaliśmy w wierszu 14. zmienną zdaniową p, a w wierszu 15 negację zmiennej zdaniowej q. Z wierszy 11. oraz 12. nie otrzymamy ani $\neg p$, ani q. A zatem nie otrzymamy pary formuł wzajem sprzecznych. Oznacza to, że formuła $(p \wedge \neg q) \rightarrow (q \equiv p)$ nie jest tezą systemu założeniowego KRZ.

Próba zbudowania dowodu nie wprost formuły (ZIIIb) $(p \wedge \neg q) \rightarrow (p \rightarrow q)$:

1.	$p \wedge \neg q$	założenie
2.	p	założenie
3.	$\neg q$	z.d.n.
4.	p	OK: 1
5.	$\neg q$	OK: 1.

Otrzymaliśmy zmienną zdaniową p oraz negację zmiennej zdaniowej q. Widać, że z wierszy dowodu nie można otrzymać ani $\neg p$, ani q. Zatem formuła $(p \wedge \neg q) \rightarrow (p \rightarrow q)$ nie jest tezą systemu założeniowego KRZ.

Metodę dowodów założeniowych można zastosować w jeszcze jeden sposób w rozwiązaniu tego zadania. Można mianowicie sprawdzać, czy następujące zbiory formuł są ***syntaktycznie*** sprzeczne:

- (ZSIa) $\{p \wedge \neg q,\ \neg(p \rightarrow \neg q)\}$
- (ZSIb) $\{p \wedge \neg q,\ \neg(\neg q \rightarrow \neg p)\}$
- (ZSIIa) $\{p \wedge \neg q,\ \neg(\neg p \rightarrow q)\}$
- (ZSIIb) $\{p \wedge \neg q,\ \neg(q \equiv p)\}$
- (ZSIIIa) $\{p \wedge \neg q,\ \neg(\neg p \rightarrow \neg q)\}$
- (ZSIIIb) $\{p \wedge \neg q,\ \neg(p \rightarrow q)\}$.

Jeśli mianowicie zbiór złożony z formuł: $p \wedge \neg q$ oraz $\neg\beta$, gdzie β jest jedną z formuł (Ia)–(IIIb), jest syntaktycznie sprzeczny, to jest również (na mocy twierdzenia o trafności i pełności metody założeniowej w KRZ) ***semantycznie*** sprzeczny. A to oznacza, jak pamiętamy, że w takim przypadku formuła β wynika logicznie na gruncie KRZ z formuły $p \wedge \neg q$.

Łatwo pokazuje się, że zbiory: (ZSIa), (ZSIIa) oraz (ZSIIIa) są wszystkie syntaktycznie sprzeczne. Oto stosowne dowody.

Dowód, że zbiór $\{p \wedge \neg q,\ \neg(p \rightarrow \neg q)\}$ ***jest syntaktycznie sprzeczny***:

1.	$p \wedge \neg q$	założenie
2.	$\neg(p \rightarrow \neg q)$	założenie
3.	$\neg q$	OK: 1
4.	$p \wedge \neg\neg q$	Negowanie implikacji: 2
5.	$\neg\neg q$	OK: 4
6.	$\perp$	sprzeczność: 3, 5.

Dowód, że zbiór $\{p \wedge \neg q,\ \neg(\neg p \rightarrow q)\}$ ***jest syntaktycznie sprzeczny***:

1.	$p \wedge \neg q$	założenie
2.	$\neg(\neg p \rightarrow q)$	założenie
3.	p	OK: 1
4.	$\neg p \wedge \neg q$	Negowanie implikacji: 2
5.	$\neg p$	OK: 4
6.	$\perp$	sprzeczność: 3, 5.

Dowód, że zbiór $\{p \wedge \neg q,\ \neg(\neg p \rightarrow \neg q)\}$ ***jest syntaktycznie sprzeczny***:

1.	$p \wedge \neg q$	założenie
2.	$\neg(\neg p \rightarrow \neg q)$	założenie
3.	$\neg p \wedge \neg\neg q$	Negowanie implikacji: 2
4.	p	OK: 1
5.	$\neg p$	OK: 3
6.	$\perp$	sprzeczność: 4, 5.

Natomiast ***próby*** pokazania syntaktycznej sprzeczności zbiorów (ZSIb), (ZSIIb) oraz (ZSIIIb) muszą zakończyć się porażką.

Pokazujemy to niżej, stosując pewne uproszczenia.

Próba dowodu, że zbiór $\{p \wedge \neg q,\ \neg(\neg q \rightarrow \neg p)\}$ ***jest syntaktycznie sprzeczny***:

1.	$p \wedge \neg q$	założenie
2.	$\neg(\neg q \rightarrow \neg p)$	założenie
3.	p	OK: 1
4.	$\neg q$	OK: 1
5.	$\neg q \wedge \neg\neg p$	Negowanie implikacji: 2
6.	$\neg q$	OK: 5
7.	$\neg\neg p$	OK: 5
8.	p	ON: 7.

Otrzymaliśmy w wierszach dowodowych zmienną zdaniową p oraz negację zmiennej zdaniowej q. Nie stanowią one pary formuł wzajem sprzecznych i widać, że nie uzyskamy żadnej pary wzajem sprzecznych literałów z wierszy dowodu. A zatem badany zbiór formuł nie jest syntaktycznie sprzeczny.

Próba dowodu, że zbiór $\{p \wedge \neg q,\ \neg(q \equiv p)\}$ ***jest syntaktycznie sprzeczny*** (jest to w istocie powtórzenie próby dowodu nie wprost, jakoby formuła (ZIIb) miała być tezą systemu założeniowego KRZ):

1.	$p \wedge \neg q$	założenie
2.	$\neg(q \equiv p)$	założenie
3.	$\neg((q \to p) \wedge (p \to q))$	na mocy tezy: $(q \equiv p) \equiv ((q \to p) \wedge (p \to q))$
4.	$\neg(q \to p) \vee \neg(p \to q)$	Prawo De Morgana dla koniunkcji: 3
5.	$(q \wedge \neg p) \vee (p \wedge \neg q)$	Negowanie implikacji: 4
6.	$((q \wedge \neg p) \vee p) \wedge ((q \wedge \neg p) \vee \neg q)$	Prawo rozdzielności: 5
7.	$((q \vee p) \wedge (\neg p \vee p)) \wedge ((q \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg q))$	Prawo rozdzielności: 6
8.	$(q \vee p) \wedge (\neg p \vee p)$	OK: 7
9.	$(q \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$	OK: 7
10.	$q \vee p$	OK: 8
11.	$\neg p \vee p$	OK: 8
12.	$q \vee \neg q$	OK: 9
13.	$\neg p \vee \neg q$	OK: 9
14.	p	OK: 1
15.	$\neg q$	OK: 1
16.	p	OA: 10, 15
17.	$\neg\neg p$	DN: 16
18.	$\neg q$	OA: 13, 17.

W powyższych przekształceniach wykorzystaliśmy milcząco pewne tezy systemu założeniowego KRZ. W wierszach 10.–13. otrzymaliśmy tzw. *alternatywy elementarne*. Ostatecznie, otrzymaliśmy w wierszu 14. zmienną zdaniową p, a w wierszu 15 negację zmiennej zdaniowej q. Z wierszy 11. oraz 12. nie otrzymamy ani $\neg p$, ani q. A zatem rozważany zbiór formuł nie jest syntaktycznie sprzeczny.

Próba dowodu, że zbiór $\{p \wedge \neg q,\ \neg(p \to q)\}$ ***jest syntaktycznie sprzeczny***:

1.	$p \wedge \neg q$	założenie
2.	$\neg(p \to q)$	założenie
3.	$p \wedge \neg q$	Negacja implikacji: 2
4.	p	OK: 1
5.	$\neg q$	OK: 1.

Otrzymaliśmy zatem zmienną zdaniową p oraz negację zmiennej zdaniowej q. Nie ma żadnej możliwości, aby otrzymać tu $\neg p$ lub q. A zatem rozważany zbiór formuł nie jest syntaktycznie sprzeczny.

* * *

Oczywiście, Agent 007, JAMES BOND zna wszystkie podane wyżej metody i zawsze wie, co wynika z tego, iż jego drink jest ***wstrząśnięty, ale nie zmieszany***.

JERZY POGONOWSKI
Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl