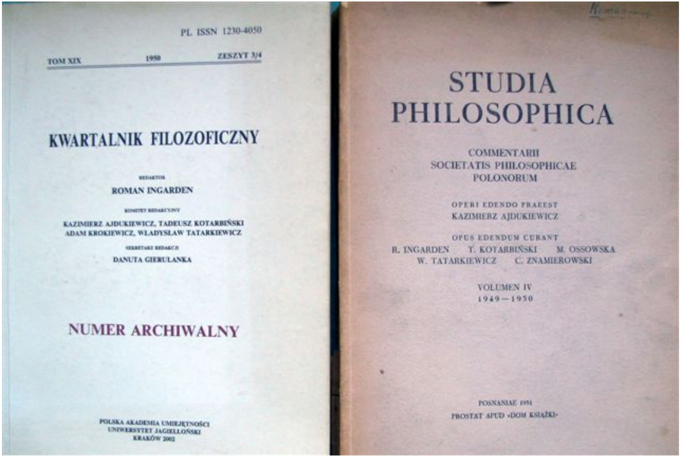
Aksjomat kanoniczności Romana Suszki

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl
pogon@amu.edu.pl

18 września 2009

Rozprawa habilitacyjna Suszki: Canonic axiomatic systems



Konstruowalne przedmioty i kanoniczne systemy aksjomatyczne (12 VI 1950) oraz *Canonic axiomatic systems* (25 XI 1950).

P r o t o k ó ł

z dyskusji habilitacyjnej w zakresie logiki dra Romana S u s z k i, odbytej na IV posiedzeniu Rady Wydziału Matematyki, Fizyki i Chemii Uniwersytetu Poznańskiego w dniu 19 listopada 1951 r. o godz.12-tej. w Dziekanacie.

Obecni: Dziekan z.prof.dr A.Alexiewicz – przewodniczący
Zaproszeni profesorowie -członkowie Komisji habilitacyjnej: Andrzej Mostowski, JMRektor K.Ajdukiewicz, Wł.Orlicz.
Profesorowie Wydziału: Z.Krygowski, A.Gałecki, J.Witkowski, W.Kucnydzki, A.Lewandowski, doc.st.Kwiek
Dol.pom.sił nauk.: dr Lempka, dr Kranz.

Nieobecność usprawiedliwili: prof.Krause.

Członkowie Komisji habilitacyjnej i Rady Wydziału postawili kandydatowi następujące pytania:

JMRektor Ajdukiewicz:

1)Stosunek postulatu kanoniczności a intuicjonizm Brouwera.
2)Paradoks Löwenheima – Skolema i jego rozwiązanie.
3)Paradoks a antynomia.
4)Logika a dialektyka.

Prof.Mostowski:

1)Zbiory konstruowalne w sensie określonym przez Gödla i w sensie określonym przez Suszkę.
2)Teoria typów prosta i rozgałęziona.
3)Logiki nie oparte na teorii typów.
4)Funkcje obliczalne i ich zastosowania.

Prof.Orlicz:

1)Pewnik wyboru i jego znaczenie w matematyce.
2)Różne metody wprowadzenia pojęcia liczby rzeczywistej.

Prof.Krygowski:

1)Czy istnieją w dalszym ciągu różnice co do pojmowania niezależności względnie niesprzeczności aksjomatów arytmetyki (aksjomatyka Peano'a – Padoa) (Poglądy Szkoły Hilberta oraz zapatrywanie i krytyka Poincare'go – Hadamard's).
2)Czy maszyny elektryczne np.maszyna Torresa, która rozgrywa partię dwóch królów szachowych – można podciągnąć pod pojęcie funkcji arytmetycznych wyznaczalnych.

Prof.Witkowski:

1)Pojęcie nieskończoności świata.

Doc.Kwiek:

1) Czy istnieje odpowiedzialność pomiędzy zbiorem konstruowanym a funkcją poddaną ekstrapolacji.

Po ukończeniu dyskusji ha-bilitacyjnej na wniosek JMRektora Ajdukiewicza w głosowaniu tajnym jednomyślnie Rada Wydziału uchwaliła dopuścić dr Romana Suszkę do wykładu habilitacyjnego.

Spośród trzech tematów, przedstawionych przez kandydata:
1)Co to jest logika wielowartościowa.
2)Przegląd różnych systematyzacji teorii mnogości.
3)Rola antynomii w rozwoju logiki matematycznej.

na wniosek JMRektora Ajdukiewicza Rada Wydziału jednomyślnie w tajnym głosowaniu zaaprobowała temat pierwszy.

Koniec posiedzenia o godz.14,15.

Prowadzący protokół: (-)dr A.Lempka

Przewodniczący: (-)A.Alexiewicz

odpis

P r o t o k ó ł

V posiedzenia Rady Wydziału Matematyki, Fizyki i Chemii Uniwersytetu Poznańskiego, odbytego dnia 19 listopada 1951 r. o godz.17-tej w Dziekanacie.

Obecni: Dziekan z.prof.dr A.Alexiewicz – przewodniczący.
Zaproszeni profesorowie: – członkowie Komisji habilitacyjnej: Andrzej Mostowski, JMRektor K.Ajdukiewicz, Wł.Orlicz
Profesorowie Wydziału Prorektor J.Suszko, Lewandowski.
Dol.pom.sił nauk.: dr Kranz, dr Lempka.

Nieobecność usprawiedliwili: prof.Krause.

Wykład habilitacyjny dra Romana Suszki p.t."Co to jest logika wielowartościowości"

Rada Wydziału uznała jednomyślnie wynik wykładu habilitacyjnego dr R.Suszki p.t. "Co to jest logika wielowartościowa" za zadowalający.

Zamykając całość przewodu habilitacyjnego Rada Wydziału postanowiła przyznać dr Suszce Romanowi veniam legendi w zakresie logiki i podstaw matematyki w głosowaniu tajnym. Wynik głosowania 9 kartek – 8 kartek tak – jedna kartka pusta.-

Koniec posiedzenia o godz.18,15.

Prowadzący protokół: (-)dr A.Lempka

Przewodniczący: (-)A.Alexiewicz

Canonic axiomatic systems

Rozprawa Suszki była recenzowana przez Jana Kalickiego w *Journal of Symbolic Logic* **17** (1952), 211–212. Była też omawiana w literaturze, np.:

- Fraenkel, A., Bernays, P. 1958. *Axiomatic set theory*. North Holland Publishing Company, Amsterdam.
- Fraenkel, A.A., Bar-Hillel, Y.,Levy. 1973. *Foundations of set theory*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam London.
- Mostowski, A. 1955. Współczesny stan badań nad podstawami matematyki. *Prace matematyczne* **1**, 13–55.
- Wang, H. 1955. On denumerable bases of formal systems. *Mathematical interpretation of formal systems*, North Holland Publishing Company, Amsterdam, 57–84.

Paradoks Skolema

Suszko odwołuje się do sformułowań Carnapa (*The logical syntax of language*, 267–268) przedstawiających paradoks Skolema jako kolizję między: faktem dowodliwości w teorii mnogości istnienia zbiorów nieprzeliczalnych a przeliczalnymi jedynie środkami służącymi do nazywania zbiorów.

Wywodom powyższego typu, które, jak się wydaje, są bardziej istotne dla paradoksu Löwenheima-Skolema aniżeli twierdzenie Löwenheima-Skolema, nigdzie nie zostało nadane należyte sformułowanie. Dlatego też paradoks Löwenheima-Skolema w postaci niezależnej od twierdzenia Löwenheima-Skolema nie był jeszcze przedmiotem ścisłych i wyczerpujących rozważań.
Głównym więc naszym zadaniem jest ścisłe sformułowanie paradoksu Löwenheima-Skolema i stworzenie przez to podstawy do dalszej analizy tego paradoksu oraz wiążących się z nim zagadnień. [Suszko 2002, 333.]

Dygresja 1: doktorat Romana Suszki

Suszko wykorzystuje pojęcia i konstrukcje ze swojego doktoratu (1948) opublikowanego w 1949 roku w zeszycie Poznańskiego Towarzystwa Przyjaciół Nauk, Prace Komisji Filozoficznej, tom **VII**, zeszyt **5**, Poznań:

- *O analitycznych aksjomatach i logicznych regułach wnioskowania.*
- *Z teorii definicji.*

Suszko proponuje tam uogólnioną teorię definicji dla systemów elementarnych. Warunki przekładalności i nietwórczości zastępuje warunkiem jednoznaczności zakresowej. Bada: rodzaje rozszerzeń definicyjnych, różne gatunki uogólnionych definicji, zasady indukcji zupełnej przyporządkowane definicjom uwikłanym. Dowodzi twierdzeń o rozkładzie przyporządkowanych definicjom ancestralnym.

Przykład. Niech w systemie (X) obowiązują następujące aksjomaty (tu 0 jest stałą indywidualną [zero], a $n(x)$ czytamy: następnik x):

- $\neg(n(x) = 0), \qquad n(x) = n(y) \to x = y.$

Wprowadzamy definicję funktora N ($N(a)$ czytamy: a jest liczbą naturalną) przez przyjęcie aksjomatów:

- $N(0), \qquad N(x) \to N(n(x))$

oraz wprowadzenie, jako pierwotnej reguły wnioskowania, zasady indukcji przedstawionej sekwentem:

$$\frac{G(0) \qquad G(x) \to G(n(x))}{N(y) \to G(y)}.$$

Wtedy twierdzeniem tak rozszerzonego systemu jest:

$$N(x) \equiv [x = 0 \vee \exists z\, (N(z) \wedge x = n(z))].$$

System (M)

Suszko buduje system teorii mnogości (ze zbiorami i klasami), wzorowany na pracach Bernaysa, Gödla i Quine'a:

- Bernays, P. 1937–1948. A system of axiomatic set theory. *Journal of Symbolic Logic*: I **2** (1937), II **6** (1941), III, IV **7** (1942), V **8** (1943), VI **13** (1948).
- Gödel, K. 1940. The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis with the axioms of set theory. *Annals of Mathematics Studies* 3, Princeton.
- Quine, W.V.O. 1940. *Mathematical Logic*. New York.
- Quine, W.V.O. 1941. Element and number. *The Journal of Symbolic Logic* **6**, 135–149.

Uogólnione twierdzenie Cantora

W systemie (M) można zbudować wyrażenie $\Phi_x[a, b, \psi(x)]$, które wyraża fakt, że: relacja a odwzorowuje wzajemnie jednoznacznie wszystkie niepuste podzbiory x zbioru b spełniające warunek $\psi(x)$ na skończone liczby porządkowe (niekoniecznie wszystkie).

Inaczej mówiąc, wyrażenie to stwierdza, że relacja a wykazuje (co najwyżej) przeliczalną nieskończoność wszystkich niepustych podzbiorów x zbioru b spełniających warunek $\psi(x)$.

Tak więc, wyrażenie $\exists y\ \Phi_x[y, b, \psi(x)]$ stwierdza, że niepustych podzbiorów x zbioru b spełniających warunek $\psi(x)$ jest (co najwyżej) przeliczalnie nieskończenie wiele.

W konsekwencji, wyrażenie $\neg\exists y\ \Phi_x[y, b, \psi(x)]$ odczytywane jest następująco: nie istnieje relacja, która wykazywałaby (co najwyżej) przeliczalną nieskończoność ogółu wszystkich niepustych podzbiorów x zbioru b spełniających warunek $\psi(x)$. Inaczej mówiąc, wyrażenie to stwierdza, że niepustych podzbiorów x zbioru b, spełniających warunek $\psi(x)$ jest nieprzeliczalnie wiele.

Konstrukcja powyższego wyrażenia jest bardzo ogólna. Można dowodzić w (M) twierdzeń wyrażających nieprzeliczalność różnorakich zbiorów, odwołując się do konkretnych przypadków tego wyrażenia. Suszko wymienia przykładowo dwa takie twierdzenia:

- $\neg\exists x\ \Phi_t[x, \omega_0, t = t]$.
- $\neg\exists x\ \Phi_t[x, V, t = t]$.

Pierwsze z nich stwierdza nieprzeliczalność klasy wszystkich niepustych zbiorów skończonych liczb porządkowych, a drugie nieprzeliczalność klasy wszystkich zbiorów niepustych.

Metasystem (μM)

Suszko buduje metasystem (μM) dla systemu (M), dołączając do (M) opisy strukturalne jego wyrażeń (oraz stosowne aksjomaty i reguły indukcji). Wzoruje się na pracach:

- Tarski, A. 1933. Einige Betrachtungen über die Begriffe der ω-Widerspruchsfreihet und ω-Vollständigkeit. *Monatshefte für Mathematik und Physik* **40**, 97–112.
- Tarski, A. 1935. Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen. *Studia Philosophica* **1**, 261–405.
- Quine, W.V.O. 1946. Concatenation as a basis for arithmetic. *Journal of Symbolic Logic* **11**, 105–114.

Systemy kanoniczne

W metasystemie (μM) określone są pojęcia: *k*-nazwy, *k*-desygnowania oraz przedmiotu konstruowalnego w (M) (czyli przedmiotu *k*-desygnowanego przez *k*-nazwę).

System jest *kanoniczny*, jeśli spełnia *aksjomat kanoniczności*:

- Każdy przedmiot (z uniwersum systemu) jest konstruowalny.

Suszko twierdzi, że aksjomat kanoniczności jest precyzyjnym sformułowaniem *Beschränkheitsaxiom* Fraenkla z 1922 roku (zob. np. *Einleitung in die Mengenlehre*, 1928, 355):

- *Axiom der Beschränkheit*. Außer den durch die Axiome II bis VII (bzw. VIII) gefordeten Mengen existieren keine weitere Mengen.

Dygresja 2: aksjomaty ekstremalne

- Carnap, R., Bachmann, F. 1936. Über Extremalaxiome. *Erkenntnis* **6**, 166–188. Przekład angielski [H.G. Bohnert] On Extremal Axioms. *History and Philosophy of Logic* **2** (1981), 67–85.

- Aksjomat zupełności w *Grundlagen der Geometrie* Hilberta.
- Aksjomat ograniczenia Fraenkla.
- Aksjomat maksymalności von Neumanna.
- Aksjomat konstruowalności Gödla.
- Aksjomat kanoniczności Suszki. Niezależnie: propozycja Myhilla.
- Aksjomat (schemat) indukcji w arytmetyce.
- Kategoryczność (w mocy) w klasycznej i współczesnej teorii modeli.
- Twierdzenia o reprezentacji. Model zamierzony teorii.

System zbiorów konstruowalnych (M^*)

System (M) zostaje rozszerzony do systemu (M^*) poprzez wprowadzenie predykatu K (oraz stosownych aksjomatów i reguły indukcji). Wyrażenie $K(x)$ czytamy: x jest *k-zbiorem* (*zbiorem konstruowalnym*). Pojęcie to, pisze Suszko, jest rzeczowym odpowiednikiem pojęcia przedmiotu konstruowalnego. Dowodzi się np., że:

- $\neg \exists x \, (K(x) \wedge \Phi_t[x, \omega_0, K(t)])$.
  (Jest nieprzeliczalnie wiele niepustych podzbiorów ω_0, które są k-zbiorami. Dokładniej: nie istnieje *konstruowalna* relacja ustalająca przeliczalność ogółu takich zbiorów.)
- $\neg \exists x \, (K(x) \wedge \Phi_t[x, V, K(t)])$.
  (Jest nieprzeliczalnie wiele wszystkich niepustych k-zbiorów.)
- $\neg \exists x \, (K(x) \wedge \Phi_t[x, V, K(t) \wedge \forall z \, (z \in t \rightarrow K(z))])$.
  (Jest nieprzeliczalnie wiele niepustych k-zbiorów, których elementy są wyłącznie k-zbiorami.)

Niektóre ustalenia metateoretyczne

Suszko tworzy system $(\overline{M^*})$ poprzez dodanie do (M^*) aksjomatu kanoniczności. Dowodzi m.in., że:

- System $(\overline{M^*})$ jest kanoniczny.
- System $(\overline{M^*})$ jest niesprzeczny, o ile niesprzeczny jest system (M^*).

Każde twierdzenie systemu (M) jest też twierdzeniem systemu (M^*), a każde twierdzenie systemu (M^*) jest też twierdzeniem systemu $(\overline{M^*})$. W szczególności, w (kanonicznym !) systemie $(\overline{M^*})$ możemy udowodnić istnienie zbiorów nieprzeliczalnych. Otrzymujemy zatem ciekawe sformułowanie (rzekomego!) paradoksu Skolema.

Kilka problemów otwartych

Suszko wskazuje na kilka problemów otwartych, wiążących się z wynikami jego rozprawy:

- pojęcie efektywności w matematyce,
- intuicjonizm,
- konstruowalność w sensie Gödla,
- arytmetyzacja metalogiki,
- analiza rozumienia pojęcia przeliczalności.

Być może, rozprawie *Canonic axiomatic systems* warto się także przyjrzeć z perspektywy otrzymanych później wyników dotyczących modeli dla teorii mnogości.

Jak Suszko dziś odpowiedziałby na pytanie Mostowskiego?

Kilka faktów dotyczących aksjomatu konstruowalności Gödla:

- Jeśli VNB niesprzeczna, to w VNB nie można dowieść negacji II aksjomatu ograniczenia, czyli VNB *non* $\vdash$ „Jeśli $V = L$, to istnieje zbiór przechodni, który jest modelem ZF.”
- Metodą modeli wewnętrznych nie można pokazać, że $V = L$ nie jest twierdzeniem ZFC.
- Metodą Cohena nie można pokazać, że jakieś zdanie jest niezależne od $V = L$.
- Scott (1961): Jeśli istnieją liczby mierzalne, to $V \neq L$.
- Solovay (1967): $0^{\#}$ jest Δ^1_3 niekonstruowalnym zbiorem liczb naturalnych. Devlin, Jensen (1975): Konsekwencje (nie)istnienia $0^{\#}$.
- Woodin & Co.: Modele wewnętrzne dla bardzo dużych liczb kardynalnych są istotnie różne od L.

Koniec

Niezależnie od Suszki, podobną problematyką zajmował się ówcześnie John Myhill:

- Myhill, J. 1952. The hypothesis that all classes are nameable. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **38**, 979.

Suszko już nigdy później nie wracał do problematyki poruszanej w *Canonic axiomatic systems*. Napisał jednak recenzję *Wyprawa przeciw Skolemitom* (*Studia Filozoficzne*, nr **2** (**49**), (1967), 264–266) pracy Michaela Davida Resnika *On Skolem's paradox* zamieszczonej w *The Journal of Philosophy* **LXIII**/**15**, (1966), 425–438.