Dobre i złe intuicje matematyczne

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
pogon@amu.edu.pl

KFNMFF 2016

Plan na dziś

- *Kontekst odkrycia*. Obejmuje intuicje profesjonalnych matematyków.
- *Kontekst uzasadnienia*. Dedukcja i obliczenia.
- ***Kontekst przekazu***. Odnosi się do procesów przekazywania i nabywania wiedzy matematycznej.

- Przykłady objaśnień intuicyjnych. Opinie matematyków, filozofów, dydaktyków na temat *intuicji matematycznych*.
- *Dobre intuicje matematyczne* kształtujemy poprzez odwołanie się: bądź do modeli fizycznych bądź do wcześniej przyswojonych pojęć matematycznych. *Złe intuicje matematyczne* tworzą się na podstawie pochopnych analogii oraz uogólnień, myślenia „na skróty”, niewłaściwego korzystania z semantyki terminów, nieszczęsnych (nietrafnych) metafor. Model fizyczny nie może chyba generować złych intuicji, wszystko co złe bierze się z nieuzasadnionej wiary.

Projekt badawczy NCN

- Odczyt został przygotowany w ramach projektu badawczego NCN 2015/17/B/HS1/02232:
  Aksjomaty ekstremalne: aspekty logiczne, matematyczne i kognitywne.
- Projekt jest realizowany w Zakładzie Logiki i Kognitywistyki UAM (2016–2018).
- Strona projektu: http://logic.amu.edu.pl/index.php/Ncn2015jp

- W ramach projektu przewiduje się dwa skromne stypendia dla doktorantów, ewentualnie zainteresowanych współpracą.
- Konkurs zostanie ogłoszony pod koniec 2016 roku.

Poincaré: *Science and Method*

We are in a class of the fourth grade. The teacher is dictating: 'A circle is the position of the points in a plane which are at the same distance from an interior point called the centre.' The good pupil writes this phrase in his copy-book and the bad pupil draws faces, but neither of them understands. Then the teacher takes the chalk and draws a circle on the board. 'Ah', think the pupils, 'why didn't he say at once, a circle is a round, and we should have understood.'

- Cytat za: Sierpińska 1994 (*Understanding in Mathematics*, str. 1). Każdy rozdział tej książki rozpoczyna się cytatem z prac Poincaré'go.
- Ujęcie rozumienia w matematyce proponowane przez Sierpińską bazuje na ideach Ajdukiewicza z *Logiki pragmatycznej*.

Sierpińska: *Understanding in Mathematics*

- The quest for an explanation in mathematics cannot be a quest for proof, but it may be an attempt to find a rationale of a choice of axioms, definitions, methods of constructing of a theory. A rationale does not reduce to logical premisses. An explanation in mathematics can reach for historical, philosophical, pragmatic arguments. In explaining something in mathematics, we speak *about* mathematics: our discourse becomes more metamathematical than mathematical (76).
- Explanation of an abstract mathematical theory may consist in a construction of its model, in which the variables, rules and axioms of the theory are interpreted and acquire meaning. The model becomes a certain 'reality', ruled by its own 'laws'. In explaining a theory, we deduce its rules, axioms, definitions, and theorems from the 'laws' of the model (77).

Kłopoty z intuicją matematyczną

- Znaczenia pojęć matematycznych są określone w samej teorii. Są podobne chimerom. *Objaśnienia intuicyjne* (w procesie dydaktycznym) nie są raz na zawsze ustalone. Czynimy co w naszej mocy, aby oswajać chimery.
- *Objaśnienie intuicyjne* jest pojęciem relacyjnym. Rozumiemy je tutaj w sensie pragmatycznym (rozjaśnienie idei, metody heurystyczne, wskazówki ułatwiające rozumienie), nie odwołując się do ogólnej metodologii nauk.

- Kontekst przekazu: całość procesu dydaktycznego.
- Cel objaśnień intuicyjnych: wspomaganie rozumienia.
- Używane środki: parafraza, przekład, metafora, analogia, budowanie modeli, itd.

Wzorcowe przykłady

- *Euklides*: powierzchnia sfery definiowana jako wynik *obrotu* półokręgu względem średnicy.
- *Archimedes*: sfera, stożek i walec; argumentacja mechaniczna oraz dowód matematyczny metodą wyczerpywania.

- *Hilbert i Gödel*: aksjomat zupełności w teorii mnogości; pragmatyczne uzasadnienie.
- *Cohen*: budowa modeli teorii mnogości metodą wymuszania; intuicyjne analogie z rozszerzeniami ciał o elementy przestępne.

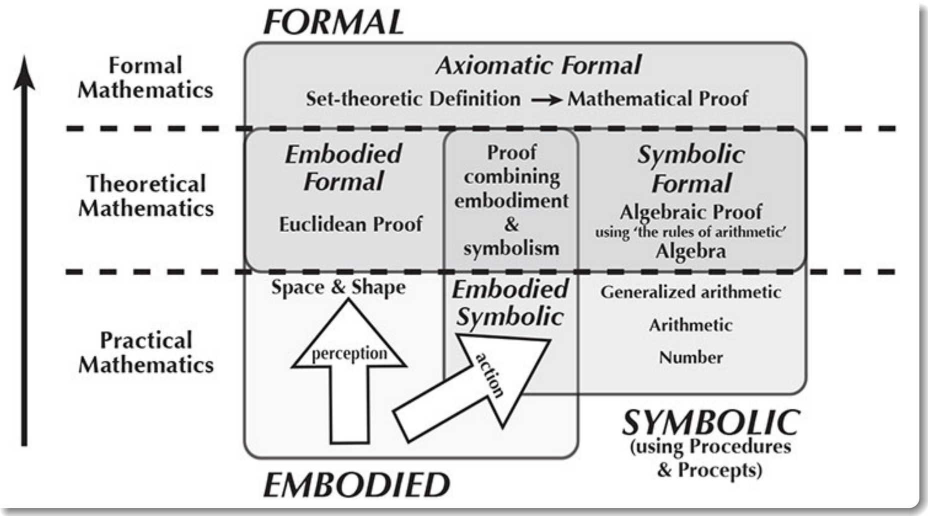
- Wzór dwumianowy: $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$
- Pochodna iloczynu: $(f(x) \cdot g(x))^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x)$

Przegląd opinii

- Piaget: fazy rozwoju intelektualnego.
- Wygotski: wyższe funkcje poznawcze wyłaniają się poprzez praktykę społeczną.
- Polya: strategie rozwiązywania problemów.
- Fischbein: intuicja jako analogon percepcji na poziomie symbolicznym.
- Schoenfeld: tworzenie sensu oraz samokontrola poznawcza.
- Tall: trzy światy matematyki.

- Sierpińska: rozumienie – pojęć, twierdzeń, dowodów, konstrukcji, itd.
- Sierpińska: *epistemological obstacles*.

David Tall: trzy światy matematyki



Język matematyki i język naturalny

- Zbiory: paradoksy, zbiory rozmyte, kłopoty z nieskończonością, *definiowalne* versus *opisywalne*.
- Granice: uwaga na metafory!
- Ciągłość: objaśnianie własności „przekraczającej" gęstość.
- Rachunek różniczkowy: logiczna złożoność ε-δ-sformułowań. Remedium: analiza niestandardowa (trudność dydaktyczna: konstrukcja liczb hiperrzeczywistych).
- Notacja: ikoniczna notacja Leśniewskiego.

- Do jakiego stopnia język naturalny jest niezbędny w dydaktyce matematyki?
- Jakie są granice objaśnień lingwistycznych?

Doświadczenie zmysłowe

- Rysunki, diagramy, schematy: potęga reprezentacji wizualnych i niebezpieczeństwo sugestii. Śmieszna sprzeczka dot. diagramów Venna.
- Modele 3D: pomoce dydaktyczne Istvána Lénárta.
- Filmy: przenicowanie sfery, wiązka Hopfa, podróż w wyższe wymiary, itd.
- Piosenki matematyczne: środki mnemotechniczne.

- Kolory w reprezentacjach graficznych funkcji zespolonych.
- Szacowanie wielkości w poziomie i w pionie.

Lego audio video erro ergo disco.

Sfery Istvána Lénárta

István Lénárt

i jego sfery

www.gombigeometria.eoldal.hu

Inspiracje z Natury

- Archimedes: obliczanie powierzchni i objętości przy użyciu mechaniki.
- Robert Ghrist: *linkages* i rozmaitości. *Any smooth compact manifold is diffeomorphic to the configuration space of some planar linkage*
- Mark Levi: *The Mathematical Mechanic.*
- Analogie kinematyczne: geometria.
- Pola elektromagnetyczne: Poincaré o dowodzie Kleina.
- Przepływy cieczy i ciepła: analiza zespolona.
- Problemy wariacyjne: mądrość Natury.

- Eksperymenty probabilistyczne: igła Buffona, paradoks Bertranda.
- Fizyka i nieskończoność: czy *supertasks* są możliwe?

Potoczność

- Topologia: „gumowate" obiekty i operacje na nich.
- Geometryczne reprezentacje liczb naturalnych (trójkątne, itd.).
- Liczby ujemne: długi, temperatura, piętra, skaczące żaby.
- Narzędzia: linijka, cyrkiel, pantograf, *Peaucellier-Lipkin linkage*, itp.
- Gry: gry Ehrenfeuchta, aksjomat determinacji.
- Komputery: programy, eksperymenty, metafory.

- *Filtry i ideały*: duże i małe obiekty.
- *Prawie wszędzie*: dziedziny skończone i nieskończone.
- *Model thinks*: mowa figuratywna.

Spójność matematyki

- Euklides: teoria proporcji w systemie geometrii.
- Descartes: powstanie geometrii analitycznej.
- Współcześnie: np. topologia algebraiczna, gałęzie teorii liczb.
- Logika algebraiczna: matematyczna reprezentacja semantyki.
- Programy unifikacji: Weierstrass & Co., Hilbert, Thurston, Laglands.

- Uogólnienia operacji i relacji arytmetycznych na abstrakcyjne dziedziny.
- Wymuszanie w teorii mnogości a rozszerzenia ciał.
- Aksjomat zupełności w teorii mnogości: uzasadnienie pragmatyczne.

Horyzont wyobraźni

- Liczby ujemne: kilkaset lat oswajania; obecnie akceptowalne przez większość populacji.
- Liczby zespolone: kilkaset lat oswajania; obecnie standardowe obiekty w badaniach matematycznych, jednak stale trudne do pojęcia przez ogół obywateli.
- Wyższe wymiary: szybkie oswojenie (przez profesjonalistów); dla większości populacji wciąż iluzoryczne.

- Nieskończenie wymiarowe przestrzenie liniowe: załamanie intuicji potocznych.
- Dzikie struktury topologiczne w niskich wymiarach.
- Struktury egzotyczne.

Nasza wędrówka trwa, dopóki czynny jest horyzont.

Kto wie lepiej?

- Poincaré: wiele rodzajów intuicji matematycznej.
- Hadamard: etapy odkrycia matematycznego.
- Gödel: bezkompromisowy Platonizm.

- Lakatos: quasi-empirycyzm w matematyce.
- Davis, Hersh: intuicja wyłaniająca się z praktyki.
- Thurston: wyższe poziomy mentalne odkrycia matematycznego.
- Tao: trzy etapy rozumienia; dobre i złe intuicje.

Problem badawczy: jak rekonstruować intuicje profesjonalnych matematyków z tekstów źródłowych?

Stanowiska w filozofii matematyki

Staraliśmy się unikać odwołań do rozwiązań proponowanych przez filozofów (uwagi na ten temat zawiera tekst odczytu przygotowywany do druku).

- Descartes: rozumienie dowodów.
- Kant: zdania syntetyczne a priori.

- Parsons: intuition *of* and intuition *that*.
- Tieszen: podejście fenomenologiczne.
- Byers: rola antynomii i paradoksów.

Dylemat: *Creation or Discovery in Mathematics* jest problemem *filozoficznym* i jest niezależny od praktyki badawczej matematyków.

Drogi prowadzące do dowodów

- Styl Gaussa i styl Eulera w publikowaniu wyników.
- Dowody *wyjaśniające*: istotne własności obiektów, jednolita perspektywa.
- Dowody matematyczne: poglądy ortodoksyjne oraz innowacje (dowody kolektywne, dowody komputerowe).
- Język prywatny w matematyce: przypadki Erdősa i Ramanujana.
- Wyobraźnia: rola myślenia kontrfaktycznego.
- Wgląd: czy intuicja jest wynikiem operowania na reprezentacjach mentalnych obiektów matematycznych?
- Uogólnianie i abstrahowanie: tworzenie nowych kontekstów, poszerzanie perspektywy.
- Analogia: podobieństwo strukturalne.
- Indukcja: od obserwowanych regularności do hipotez.

Nauczyciele i uczniowie

Nauczyciele: potrzeba bycia przekonującym.

- Nauczyciele i podręczniki.
- Nauczanie jako negocjacja.
- Dramat stale zmieniających się zaleceń stylów nauczania.
- Cele i środki nauczania w konfrontacji z wiedzą nauczyciela i jego wizją matematyki.

Uczniowie: potrzeba rozumienia.

- Od idiosynkrazji do unifikacji intuicji.
- Kreatywność uczniów a rygor szkoły.
- Rozwój intelektualny, emocje, umiejętności społeczne.

Problem skuteczności

- Doświadczenie dydaktyczne autora, choć dość długie, jest jednak ograniczone do specyficznego audytorium: dorosłych studentów kierunków humanistycznych.
- Jest zatem możliwe, że nasze uwagi oraz refleksje mają niewielkie znaczenie dla edukacji matematycznej.

- Niebezpieczeństwo uproszczeń oraz błędnego rozumienia, powodowane przez objaśnienia intuicyjne.
- Podejście empiryczne: eksperymenty dydaktyczne oraz ich ocena.

Poincaré: *Science and Method*

How is it that there are so many minds that are incapable of understanding mathematics? Is there not something paradoxical in this? Here is a science which appeals only to the fundamental principles of logic, to the principle of contradiction, for instance, to what forms, so to speak, the skeleton of our understanding, to what we could not be deprived of without ceasing to think, and yet there are people who find it obscure, and actually are the majority. That they should be incapable of discovery we can understand, but that they should fail to understand the demonstrations expounded to them, that they should remain blind when they are shown a light that seems to us to shine with a pure brilliance, it is altogether miraculous. And yet one need have no great experience of examinations to know that these blind people are by no means exceptional beings. We have here a problem that is not easy of solution, but yet must engage the attention of all who wish to devote themselves to education.

Cytat za: Sierpińska 1994, 112.

- Davis, P.J., Hersh, R. 1981. *Mathematical experience*. Birkhäuser, Boston.
- Fischbein, H. 1987. *Intuition in Science and Mathematics: An Educational Approach*. Kluwer Academic Publishers, New York / Boston / Dordrecht / London / Moscow.
- Ghrist, R. 2014. *Elementary Applied Topology*. Createspace, ISBN 978-1502880857.
- Hanna, G., Jahnke, H.N., Pulte, H. (Eds.) 2010. *Explanation and Proof in Mathematics. Philosophical and Educational Perspectives*. Springer, New York Dordrecht Heidelberg London.
- Lange, M. 2014. Depth and Explanation in Mathematics. *Philosophia Mathematica*. Advance Access published September 12, 2014.
- Levi, M. 2009. *The Mathematical Mechanic. Using Physical Reasoning to Solve Problems*. Princeton University Press, Princeton and Oxford.
- Needham, T. 1997. *Visual complex analysis*. Clarendon Press, Oxford.

- Polya, G. 2009. *Mathematical Discovery on Understanding, Learning, and Teaching Problem Solving*. Ishi Press International, New York, Tokyo.
- Polya, G. 2014. *Mathematics and Plausible Reasoning*. Vol.I: *Induction and Analogy in Mathematics*, Vol. II: *Patterns of Plausible Inference*. Martino Publishing, Mansfield Centre, CT.
- Prasolov, V.V. 2011. *Intuitive topology*. American Mathematical Society.
- Schoenfeld, A. H. 1985. *Mathematical Problem Solving* . Academic Press, Inc., Orlando.
- Sierpińska, A. 1994. *Understanding in Mathematics*. The Falmer Press, London.
- Tall, D. 2013. *How Humans Learn to Think Mathematically. Exploring the Three Worlds of Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Thurston, W. 1994. On proof and progress in mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society* **30** (2), 161–177.