Egzamin: Logika Matematyczna, I rok JiNoI, 30 czerwca 2014

Imię i nazwisko: .... OBROŃCY PRAWDY

Wybierz dokładnie cztery z poniższych pięciu zadań i spróbuj je rozwiązać. Za każde poprawnie rozwiązane zadanie możesz otrzymać co najwyżej sto punktów. Uzyskanie łącznie co najmniej 200 punktów oznacza zdany egzamin. O liczbie przyznanych punktów oraz ocenie decyduję ja.

1. Zbadaj, czy następujące wnioskowanie przebiega wedle reguły niezawodnej:

Premiera wskazuje Prezydent lub Prezes. Jeśli Premiera wskazuje Prezydent, to nie robi tego Prezes. Wynika z tego, że Prezes nie ma nic wspólnego z Prezydentem.

2. Pokaż, że w systemie założeniowym KRZ można wyprowadzić formułę β z następującego zbioru formuł:

$$\{\ (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \gamma,\ \ \neg\gamma \wedge \neg\delta,\ \ (\alpha \rightarrow \beta) \vee \lambda,\ \ \lambda \rightarrow (\gamma \vee \beta)\ \}.$$

3. Czy wniosek wynika tablicowo z przesłanek? Jeśli wynika, to napisz odpowiedź pełnym zdaniem. Jeśli nie wynika, to zbuduj świat, w którym prawdziwe są przesłanki, a fałszywy wniosek.

Wszystkie Myszaste są Ogoniaste. Ponadto, pewien Ogoniasty jest Pierzasty. Wynika z tego, że wśród Pierzastych jest Myszasty.

4. Ustal, czy wniosek $\exists x \forall y\ (P(x,y) \rightarrow P(y,x))$ wynika tablicowo z przesłanki: $\forall x \forall y\ (P(x,y) \rightarrow P(y,x)) \wedge \exists x \forall y\ P(x,y)$.

5. Sformułuj:

1. Semantyczne twierdzenie o dedukcji nie wprost w KRZ.
2. Prawo *modus ponens* w KRZ.

Pisz i rysuj wyraźnie. Jasno formułuj czynione założenia. Odpowiedzi podawaj pełnym poprawnym zdaniem języka polskiego. Każde zadanie rozwiązujesz na awersie jednej z dostarczonych kartek.

JERZY POGONOWSKI
Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl

Egzamin: Logika Matematyczna, I rok JiNoI, 30 czerwca 2014

Imię i nazwisko: .... POGROMCY FAŁSZU

Wybierz dokładnie cztery z poniższych pięciu zadań i spróbuj je rozwiązać. Za każde poprawnie rozwiązane zadanie możesz otrzymać co najwyżej sto punktów. Uzyskanie łącznie co najmniej 200 punktów oznacza zdany egzamin. O liczbie przyznanych punktów oraz ocenie decyduję ja.

1. Zbadaj, czy następujące wnioskowanie przebiega wedle reguły niezawodnej:

Premiera wskazuje Prezydent lub Prezes. Jeśli Premiera nie wskazuje Prezydent, to robi to Prezes. Wynika z tego, że Prezes nie ma nic wspólnego z Prezydentem.

2. Pokaż, że w systemie założeniowym KRZ można wyprowadzić formułę λ z następującego zbioru formuł:

$$\{ (\alpha \vee \beta) \to \gamma, \ \ \neg\delta, \ \ (\gamma \vee \delta) \to \lambda, \ \ \delta \vee \alpha \}.$$

3. Czy wniosek wynika tablicowo z przesłanek? Jeśli wynika, to napisz odpowiedź pełnym zdaniem. Jeśli nie wynika, to zbuduj świat, w którym prawdziwe są przesłanki, a fałszywy wniosek.

Co najmniej jeden Pierzasty jest Ogoniasty. Co więcej, każdy Myszasty jest Pierzasty. Wynika z tego, że pewien Ogoniasty jest Myszasty.

4. Ustal, czy wniosek $\exists x \ (P(x) \wedge Q(x,x))$ wynika tablicowo z przesłanki: $\exists x \ (P(x) \wedge \forall y \ (P(y) \to Q(y,x)))$.

5. Sformułuj:

1. Semantyczne twierdzenie o dedukcji wprost w KRZ.
2. Prawo *modus tollens* w KRZ.

Pisz i rysuj wyraźnie. Jasno formułuj czynione założenia. Odpowiedzi podawaj pełnym poprawnym zdaniem języka polskiego. Każde zadanie rozwiązujesz na awersie jednej z dostarczonych kartek.

JERZY POGONOWSKI
Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl

Wszystkie z podanych zadań były rozwiązywane podczas kursu – rozwiązania te są dostępne na stronie internetowej przedmiotu.

1. Znajdujemy zdania proste i budujemy schemat tego wnioskowania:

p — Premiera wskazuje Prezydent.

q — Premiera wskazuje Prezes.

r — Prezes nie ma nic wspólnego z Prezydentem.

$$\frac{\begin{array}{c} p \vee q \\ p \rightarrow \neg q \end{array}}{r}$$

Czy istnieje co najmniej jedno wartościowanie zmiennych zdaniowych przy którym obie przesłanki tej reguły są prawdziwe, a wniosek fałszywy? Wystarczy sprawdzić, czy formuły $p \vee q$ oraz $p \rightarrow \neg q$ mogą być prawdziwe przy jakimkolwiek wartościowaniu, przy którym r jest fałszywa:

p	q	$\neg q$	$p \vee q$	$p \rightarrow \neg q$
0	0	1	0	1
0	1	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	0

Widać więc, że przy wartościowaniach w_1 oraz w_2 takich, że:

$Val(p, w_1) = 0, Val(q, w_1) = 1, Val(r, w_1) = 0$

$Val(p, w_2) = 1, Val(q, w_2) = 0, Val(r, w_2) = 0$

przesłanki reguły są obie prawdziwe, a jej wniosek fałszywy. Reguła jest zawodna, jej wniosek ***nie*** wynika logicznie z przesłanek. Są też inne, śmiesznie krótkie rozwiązania tego zadania. Widzisz je?

2. Budujemy dowód założeniowy:

1.	$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \gamma$	założenie
2.	$\neg\gamma \wedge \neg\delta$	założenie
3.	$(\alpha \rightarrow \beta) \vee \lambda$	założenie
4.	$\lambda \rightarrow (\gamma \vee \beta)$	założenie
5.	$\neg\gamma$	OK: 2
6.	$\neg(\alpha \rightarrow \beta)$	MT: 1,5
7.	λ	OA: 3,6
8.	$\gamma \vee \beta$	RO: 4,7
9.	β	OA: 8,5.

3. Wprowadźmy oznaczenia:

- $P(x)$ – x jest Pierzasty
- $M(x)$ – x jest Myszasty
- $O(x)$ – x jest Ogoniasty.

Rozważane wnioskowanie ma następujący schemat:

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x\ (M(x) \to O(x)) \\ \exists x\ (O(x) \land P(x))\end{array}}{\exists x\ (P(x) \land M(x))}$$

Budujemy tablicę analityczną dla przesłanek oraz zaprzeczonego wniosku:

$$\begin{array}{c}
\forall x\ (M(x) \to O(x))\ ^{2.*a} \\
| \\
\exists x\ (O(x) \land P(x))\ ^{1.\surd a} \\
| \\
\neg\exists x\ (P(x) \land M(x))\ ^{3.*a} \\
| \\
(1)\ O(a) \land P(a)^{4.\land} \\
| \\
(2)\ M(a) \to O(a)^{6.\to} \\
| \\
(3)\ P(a) \land M(a)^{5.\land} \\
| \\
(4_g)\ O(a) \\
| \\
(4_d)\ P(a) \\
| \\
(5_g)\ P(a) \\
| \\
(5_d)\ M(a) \\
\swarrow \qquad \searrow \\
\begin{array}{cc}
(6_l)\ \neg M(a) & (6_p)\ O(a) \\
| & | \\
\times_{5_d,6_l} & \heartsuit
\end{array}
\end{array}$$

Tablica ma jedną gałąź otwartą, a zatem wniosek nie wynika tablicowo z przesłanek. Interpretacją, w której prawdziwe są przesłanki natomiast fałszywy jest wniosek jest:

$\heartsuit$	P	M	O
a	+	+	+

4. Budujemy tablicę analityczną dla przesłanki oraz zaprzeczonego wniosku, czyli dla: $\forall x \forall y\ (P(x,y) \to P(y,x)) \land \exists x \forall y\ P(x,y)$ oraz $\neg\exists x \forall y\ (P(x,y) \to P(y,x))$:

$$\forall x \forall y\ (P(x,y) \rightarrow P(y,x)) \wedge \exists x \forall y\ P(x,y)\ ^{1.\wedge}$$

$$\neg \exists x \forall y\ (P(x,y) \rightarrow P(y,x))\ ^{3.*a}$$

$$(1_g)\ \forall x \forall y\ (P(x,y) \rightarrow P(y,x))\ ^{4.*a}$$

$$(1_d)\ \exists x \forall y\ P(x,y)\ ^{2.\checkmark a}$$

$$(2)\ \forall y\ P(a,y)$$

$$(3)\ \neg \forall y\ (P(a,y) \rightarrow P(y,a))$$

$$(4)\ \forall y\ (P(a,y) \rightarrow P(y,a))$$

$$\times_{3,4}$$

Wszystkie gałęzie tablicy dla przesłanki oraz zaprzeczonego wniosku są zamknięte, a to oznacza, że wniosek wynika tablicowo z przesłanki.

5.

1. Semantyczne twierdzenie o dedukcji nie wprost w KRZ.

   Dla dowolnych $X \subseteq F_{KRZ}$, $\alpha \in F_{KRZ}$, $\beta \in F_{KRZ}$ zachodzą następujące równoważności:

   (a) $X \cup \{\alpha\} \models_{krz} \{\beta, \neg\beta\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X \models_{krz} \neg\alpha$.

   (b) $X \cup \{\neg\alpha\} \models_{krz} \{\beta, \neg\beta\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X \models_{krz} \alpha$.

2. Prawo *modus ponens* w KRZ: $((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$.

Wszystkie z podanych zadań były rozwiązywane podczas kursu – rozwiązania te są dostępne na stronie internetowej przedmiotu.

1. Znajdujemy zdania proste i budujemy schemat tego wnioskowania:

p — Premiera wskazuje Prezydent.

q — Premiera wskazuje Prezes.

r — Prezes nie ma nic wspólnego z Prezydentem.

$$\frac{\begin{array}{c} p \lor q \\ \neg p \rightarrow q \end{array}}{r}$$

Czy istnieje co najmniej jedno wartościowanie zmiennych zdaniowych przy którym obie przesłanki tej reguły są prawdziwe, a wniosek fałszywy? Wystarczy sprawdzić, czy formuły $p \lor q$ oraz $\neg p \rightarrow q$ mogą być prawdziwe przy jakimkolwiek wartościowaniu, przy którym r jest fałszywa:

p	q	$\neg p$	$p \lor q$	$\neg p \rightarrow q$
0	0	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	1	0	1	1

Widać więc, że przy wartościowaniach w_1, w_2 oraz w_3 takich, że:

$Val(p, w_1) = 0, Val(q, w_1) = 1, Val(r, w_1) = 0$

$Val(p, w_2) = 1, Val(q, w_2) = 0, Val(r, w_2) = 0$

$Val(p, w_3) = 1, Val(q, w_3) = 1, Val(r, w_3) = 0$

przesłanki reguły są obie prawdziwe, a jej wniosek fałszywy. Reguła jest zawodna, jej wniosek ***nie*** wynika logicznie z przesłanek. Są też inne, śmiesznie krótkie rozwiązania tego zadania. Widzisz je?

2. Budujemy dowód założeniowy:

1.	$(\alpha \lor \beta) \rightarrow \gamma$	założenie
2.	$\neg\delta$	założenie
3.	$(\gamma \lor \delta) \rightarrow \lambda$	założenie
4.	$\delta \lor \alpha$	założenie
5.	α	OA: 4,2
6.	$\alpha \lor \beta$	DA: 5
7.	γ	RO: 1,6
8.	$\gamma \lor \delta$	DA: 7
9.	λ	RO: 3,8.

3. Wprowadźmy oznaczenia:

- $P(x)$ – x jest Pierzasty
- $M(x)$ – x jest Myszasty
- $O(x)$ – x jest Ogoniasty.

Rozważane wnioskowanie ma następujący schemat:

$$\begin{array}{c} \exists x\ (P(x) \wedge O(x)) \\ \forall x\ (M(x) \rightarrow P(x)) \\ \hline \exists x\ (O(x) \wedge M(x)) \end{array}$$

Budujemy tablicę analityczną dla przesłanek oraz zaprzeczonego wniosku:

$$\begin{array}{c}
\exists x\ (P(x) \wedge O(x))\ ^{1. \checkmark a} \\
| \\
\forall x\ (M(x) \rightarrow P(x))\ ^{2. *a} \\
| \\
\neg \exists x\ (O(x) \wedge M(x))\ ^{3. *a} \\
| \\
(1)\ P(a) \wedge O(a)\ ^{4. \wedge} \\
| \\
(2)\ M(a) \rightarrow P(a)\ ^{6. \rightarrow} \\
| \\
(3)\ O(a) \wedge M(a)\ ^{5. \wedge} \\
| \\
(4_g)\ P(a) \\
| \\
(4_d)\ O(a) \\
| \\
(5_g)\ O(a) \\
| \\
(5_d)\ M(a) \\
\swarrow \qquad \searrow \\
\begin{array}{cc}
(6_l)\ \neg M(a) & (6_p)\ P(a) \\
| & | \\
\times_{5_d, 6_l} & \heartsuit
\end{array}
\end{array}$$

Tablica ma jedną gałąź otwartą, a zatem wniosek nie wynika tablicowo z przesłanek. Interpretacją, w której prawdziwe są przesłanki natomiast fałszywy jest wniosek jest:

$\heartsuit$	P	M	O
a	+	+	+

4.Budujemy tablicę analityczną dla przesłanki oraz zaprzeczonego wniosku, czyli dla: $\exists x\ (P(x) \wedge \forall y\ (P(y) \rightarrow Q(y, x)))$ oraz $\neg(\exists x\ (P(x) \wedge Q(x, x)))$:

$$
\begin{array}{c}
\exists x\ (P(x) \wedge \forall y\ (P(y) \to Q(y,x)))\ ^{1.\surd a} \\
| \\
\neg(\exists x\ (P(x) \wedge Q(x,x)))\ ^{3.*a} \\
| \\
(1)\ P(a) \wedge \forall y\ (P(y) \to Q(y,a))\ ^{2.\wedge} \\
| \\
(2_g)\ P(a) \\
| \\
(2_d)\ \forall y\ (P(y) \to Q(y,a))\ ^{4.*a} \\
| \\
(3)\ \neg(P(a) \wedge Q(a,a))\ ^{5.\neg\wedge} \\
| \\
(4)\ P(a) \to Q(a,a)\ ^{6.\to} \\
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c}
(5_l)\ \neg P(a) \\
| \\
\times_{1_g,5_l}
\end{array}
&
\begin{array}{c}
(5_p)\ \neg Q(a,a) \\
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c}
(6_l)\ \neg P(a) \\
| \\
\times_{1_g,6_l}
\end{array}
&
\begin{array}{c}
(6_p)\ Q(a,a) \\
| \\
\times_{5_p,6_p}
\end{array}
\end{array}
\end{array}
\end{array}
\end{array}
$$

Wszystkie gałęzie tablicy dla przesłanki oraz zaprzeczonego wniosku są zamknięte, a to oznacza, że wniosek wynika tablicowo z przesłanki.

5.

1. Semantyczne twierdzenie o dedukcji wprost w KRZ.

   Dla dowolnych $X \subseteq F_{KRZ}$, $\alpha \in F_{KRZ}$, $\beta \in F_{KRZ}$ zachodzą następujące implikacje:

   (a) Jeśli $X \cup \{\alpha\} \models_{krz} \beta$, to $X \models_{krz} \alpha \to \beta$.

   (b) Jeśli $X \models_{krz} \alpha \to \beta$, to $X \cup \{\alpha\} \models_{krz} \beta$.

2. Prawo *modus tollens* w KRZ: $((p \to q) \wedge \neg q) \to \neg p$.