Logika algebraiczna 3

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
www.kognitywistyka.amu.edu.pl
pogon@amu.edu.pl

2021

Plan na dziś:

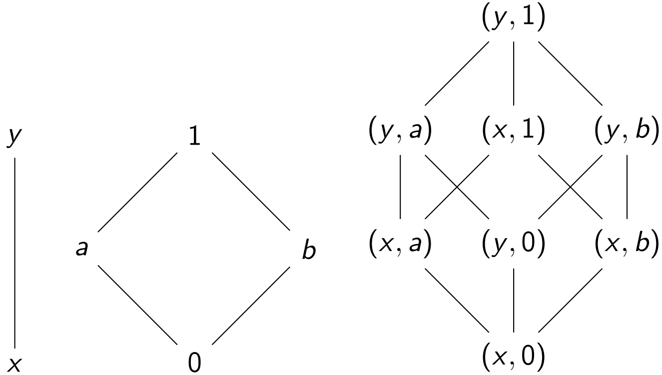
- Produkty proste
- Produkty podproste
- Ultraprodukty
- Algebry termów
- Algebry wolne
- Rozmaitości

Następny wykład:

- Kraty
- Algebry Boole'a

- Niech $\mathbf{A}_i = (A_i, (\omega^{\mathbf{A}_i} : \omega \in \Omega))$ będzie algebrą sygnatury (Ω, τ), dla wszystkich $i \in I$. Produktem prostym systemu algebr $(\mathbf{A}_i : i \in I)$ nazywamy algebrę $\mathbf{A} = \prod\limits_{i \in I} \mathbf{A}_i$ taką, że:
  - $dom(\mathbf{A}) = \prod\limits_{i \in I} A_i$, gdzie $\prod\limits_{i \in I} A_i = \{f : I \to \bigcup\limits_{i \in I} A_i : (\forall i \in I)\ f(i) \in A_i\}$
  - Jeśli $\omega \in \Omega$ oraz $f_1, \ldots, f_{\tau(\omega)} \in dom(\mathbf{A})$, to $(\omega^{\mathbf{A}}(f_1, \ldots, f_{\tau(\omega)}))(i) = \omega^{\mathbf{A}_i}(f_1(i), \ldots, f_{\tau(\omega)}(i))$ dla wszystkich $i \in I$.
- Dla przykładu, jeśli $\mathbf{A}_1 = (A_1, \omega^{\mathbf{A}_1})$ i $\mathbf{A}_2 = (A_2, \omega^{\mathbf{A}_2})$ są algebrami, a $\tau(\omega) = n$, to algebra $\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2 = (\prod\limits_{i=1}^{2} A_i, \omega^{\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2})$, gdzie:
  - $\prod\limits_{i=1}^{2} A_i = A_1 \times A_2 = \{(a_1, a_2) : a_1 \in A_1 \wedge a_2 \in A_2\}$
  - $\omega^{\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2}((a_1, b_1), \ldots, (a_{\tau(\omega)}, b_{\tau(\omega)})) = (\omega^{\mathbf{A}_1}(a_1, \ldots, a_{\tau(\omega)}), \omega^{\mathbf{A}_2}(b_1, \ldots, b_{\tau(\omega)}))$, dla wszystkich $(a_i, b_i) \in A_1 \times A_2$, $1 \leqslant i \leqslant \tau(\omega)$.

Niech $\mathbf{A} = (\{x, y\}, \wedge^{\mathbf{A}}, \vee^{\mathbf{A}})$, $\mathbf{B} = (\{0, a, b, 1\}, \wedge^{\mathbf{B}}, \vee^{\mathbf{B}})$, gdzie $\wedge$ interpretujemy jako kres dolny, a $\vee$ jako kres górny.



Produkt prosty $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ po prawej.

- Przykład 2. Niech dla $n \in \mathbb{N}$ algebra $\mathbf{A}_n = (\{0,1\}, \wedge^{\mathbf{A}_n}, \vee^{\mathbf{A}_n}, -^{\mathbf{A}_n}, 0^{\mathbf{A}_n}, 1^{\mathbf{A}_n})$ będzie dwuelementową algebrą Boole'a (o algebrach Boole'a opowiemy na następnym wykładzie, ale zakładamy, że słuchacze znają algebrę wartości logicznych 0, 1). Uniwersum nieskończonego produktu prostego $\mathbf{A} = \prod\limits_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{A}_n$ tworzą wszystkie nieskończone ciągi zero-jedynkowe, a operacje w algebrze $\mathbf{A}$ określone są następująco:
  - $(a_n : n \in \mathbb{N}) \wedge^{\mathbf{A}} (b_n : n \in \mathbb{N}) = (a_n \wedge^{\mathbf{A}_n} b_n : n \in \mathbb{N})$
  - $(a_n : n \in \mathbb{N}) \vee^{\mathbf{A}} (b_n : n \in \mathbb{N}) = (a_n \vee^{\mathbf{A}_n} b_n : n \in \mathbb{N})$
  - $-^{\mathbf{A}}(a_n : n \in \mathbb{N}) = (-^{\mathbf{A}_n} a_n : n \in \mathbb{N})$
  - $0^{\mathbf{A}} = (0^{\mathbf{A}_n} : n \in \mathbb{N})$
  - $1^{\mathbf{A}} = (1^{\mathbf{A}_n} : n \in \mathbb{N})$

  Uniwersum algebry $\mathbf{A}$ (która także jest algebrą Boole'a) ma moc kontinuum.
- Przykład 3. Produkt prosty dwóch ciał jest pierścieniem przemiennym, ale nie jest ciałem.

- Rodzina $\mathit{Eq}(X)$ wszystkich relacji równoważności na dowolnym zbiorze X jest częściowo uporządkowana przez inkluzję. Zauważmy, że $\theta \subseteq \psi$ wtedy i tylko wtedy, gdy każda klasa równoważności relacji ψ jest sumą pewnej liczby klas równoważności relacji θ.
- Kresem dolnym $\theta \wedge \psi$ relacji $\theta, \psi \in \mathit{Eq}(X)$ jest $\theta \cap \psi$. Kresem dolnym zbioru $\{\theta_i : i \in I\} \subseteq \mathit{Eq}(X)$ jest $\bigcap\limits_{i \in I} \theta_i$.
- Kresem górnym $\theta \vee \psi$ relacji $\theta, \psi \in \mathit{Eq}(X)$ jest $\theta \cup (\theta \circ \psi) \cup (\theta \circ \psi \circ \theta) \cup (\theta \circ \psi \circ \theta \circ \psi) \cup \ldots$
- Innymi słowy, $(x, y) \in \theta \vee \psi$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją $x_1, \ldots, x_n \in X$ takie, że: $(x_i, x_{i+1}) \in \theta$ lub $(x_i, x_{i+1}) \in \psi$, dla wszystkich $1 \leqslant i < n - 1$ oraz $x = x_1$ i $y = x_n$.
- Kresem górnym $\bigvee\limits_{i \in I} \theta_i$ zbioru $\{\theta_i : i \in I\} \subseteq \mathit{Eq}(X)$ jest $\bigcup\{\theta_{i_1} \circ \theta_{i_2} \circ \ldots \circ \theta_{i_k} : k \geqslant 1 \wedge i_1, i_2, \ldots, i_k \in I\}$.

Algebra $(\mathit{Eq}(X), \wedge, \vee)$ jest więc *kratą zupełną*.

- Zbiór $Con(\mathbf{A})$ wszystkich kongruencji dowolnej algebry $\mathbf{A}$ też jest uporządkowany przez inkluzję.
- Jeśli $\{\theta_i : i \in I\} \subseteq Con(\mathbf{A})$, to $\bigcap\limits_{i \in I} \theta_i \in Con(\mathbf{A})$ (kres dolny $\{\theta_i : i \in I\}$).
- Kresem górnym $\bigvee\limits_{i \in I} \theta_i$ zbioru $\{\theta_i : i \in I\} \subseteq Con(\mathbf{A})$ jest $\bigcup\{\theta_{i_1} \circ \theta_{i_2} \circ \ldots \circ \theta_{i_k} : k \geqslant 1 \wedge i_1, i_2, \ldots, i_k \in I\}$.
- $(Con(\mathbf{A}), \wedge, \vee)$ jest podkratą zupełną kraty $(Eq(X), \wedge, \vee)$.
- Dla dowolnego $\nu \subseteq A \times A$ niech $Cg^{\mathbf{A}}(\nu) = \bigcap\{\theta \in Con(\mathbf{A}) : \nu \subseteq \theta\}$. Jest to zatem najmniejsza kongruencja z $Con(\mathbf{A})$, zawierająca relację ν. W szczególności, $Cg^{\mathbf{A}}(\{(a, b)\})$ nazywamy kongruencją główną generowaną przez (a, b) i oznaczamy krócej przez $Cg^{\mathbf{A}}(a, b)$.

Metdodę konstruowania kongruencji $Cg^{\mathbf{A}}(\nu)$ opisuje następujące twierdzenie:

- **Twierdzenie**. Niech **A** będzie algebrą sygnatury (Ω, τ) i niech $\nu \subseteq A \times A$. Zdefiniujmy:
  1. $\nu_0 = \nu \cup \nu^{-1} \cup 0_{\mathbf{A}}$
  2. $\nu_{n+1} = (\nu_n \circ \nu_n) \cup \{(\omega^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_{\tau(\omega)}), \omega^{\mathbf{A}}(b_1, \ldots, b_{\tau(\omega)})) : \omega \in \Omega \wedge \forall_{1 \leqslant i \leqslant \tau(\omega)}\ a_i \nu_n b_i\}$

  Wtedy $Cg^{\mathbf{A}}(\nu) = \bigcup\limits_{n \geqslant 0} \nu_n$. □

Więcej na temat struktury zbioru $Con(\mathbf{A})$ dla różnych typów algebr **A** powiemy w dalszych częściach wykładu.

- Następujące warunki są równoważne dla dowolnych $\theta_1, \theta_2 \in Con(\mathbf{A})$:
  1. $\theta_1 \circ \theta_2 = \theta_2 \circ \theta_1$
  2. $\theta_1 \vee \theta_2 = \theta_1 \circ \theta_2$
  3. $\theta_1 \circ \theta_2 \subseteq \theta_2 \circ \theta_1$
- 1) $\rightarrow$ 2). Dla $\theta \in Con(\mathbf{A})$ mamy $\theta \circ \theta = \theta$. Zatem, jeśli $\theta_1 \circ \theta_2 = \theta_2 \circ \theta_1$, to $\theta_1 \vee \theta_2 = \theta_1 \cup (\theta_1 \circ \theta_2)$, co oznacza, że $\theta_1 \vee \theta_2 = \theta_1 \circ \theta_2$.
- 3) $\rightarrow$ 1). Zakładamy, że $\theta_1 \circ \theta_2 \subseteq \theta_2 \circ \theta_1$. Trzeba pokazać, że $\theta_2 \circ \theta_1 \subseteq \theta_1 \circ \theta_2$. Jeśli $\theta_1 \circ \theta_2 \subseteq \theta_2 \circ \theta_1$, to $(\theta_1 \circ \theta_2)^{-1} \subseteq (\theta_2 \circ \theta_1)^{-1}$. Na mocy własności operacji konwersu i złożenia relacji wynika stąd, że $\theta_2^{-1} \circ \theta_1^{-1} \subseteq \theta_1^{-1} \circ \theta_2^{-1}$. Ponieważ dla każdej relacji równoważności θ mamy $\theta = \theta^{-1}$, więc otrzymujemy warunek 1).
- 2) $\rightarrow$ 3). Z definicji kresu górnego kongruencji wynika, że $\theta_2 \circ \theta_1 \subseteq \theta_1 \vee \theta_2$. Przy założeniu 2) dostajemy stąd, że $\theta_2 \circ \theta_1 \subseteq \theta_1 \circ \theta_2$. Skoro $\theta_2 \circ \theta_1 \subseteq \theta_1 \circ \theta_2$, to $(\theta_2 \circ \theta_1)^{-1} \subseteq (\theta_1 \circ \theta_2)^{-1}$, czyli $\theta_1^{-1} \circ \theta_2^{-1} \subseteq \theta_2^{-1} \circ \theta_1^{-1}$. Ponieważ dla każdej relacji równoważności θ mamy $\theta = \theta^{-1}$, więc otrzymujemy warunek 3).

- Niech $\mathbf{A} = \prod_{i \in I} \mathbf{A}_i$. Dla każdego $i \in I$ odwzorowanie $\pi_i : A \to A_i$, określone wzorem $\pi_i(a) = a(i)$ i nazywane rzutowaniem (produktu na jego i-ty czynnik) jest homomorfizmem, ponieważ dla dowolnej operacji $\omega^{\mathbf{A}}$ i dowolnych $a_1, \ldots, a_{\tau(\omega)}$:
  1. $\pi_i(\omega^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_{\tau(\omega)})) =$
  2. $\omega^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_{\tau(\omega)})(i) =$
  3. $\omega^{\mathbf{A}_i}(a_1(i), \ldots, a_{\tau(\omega)}(i)) =$
  4. $\omega^{\mathbf{A}_i}(\pi_i(a_1), \ldots, \pi_i(a_{\tau(\omega)}))$.
- **Twierdzenie**. Jeśli $\mathbf{B}$ i $\mathbf{A}_i$ $(i \in I)$ są algebrami sygnatury (Ω, τ) oraz $f_i : \mathbf{B} \to \mathbf{A}_i$ jest homomorfizmem $(i \in I)$, to odwzorowanie $f : \mathbf{B} \to \prod_{i \in I} \mathbf{A}_i$, określone przez wzór $f(x) = (f_i(x) : i \in I)$ dla $x \in B$, jest homomorfizmem $\mathbf{B}$ w $\prod_{i \in I} \mathbf{A}_i$, przy czym $\pi_i \circ f = f_i$.

- **Dowód**. Ponieważ dla $x \in A$ mamy $(\pi_i \circ f)(x) = f(x)(i) = f_i(x)$, więc $\pi_i \circ f = f_i$.
- Jeśli ω jest m-argumentowym symbolem funkcyjnym i $a_1, \ldots, a_m \in A$, to następujący ciąg równości pokazuje, że f jest homomorfizmem:
  1. $f(\omega^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_m)) =$
  2. $(f_i(\omega^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_m)) : i \in I) =$
  3. $(\omega^{\mathbf{A}_i}(f_i(a_1), \ldots, f_i(a_m)) : i \in I) =$
  4. $(\omega^{\mathbf{A}_i}(f(a_1)(i), \ldots, f(a_m)(i)) : i \in I) =$
  5. $\omega^{\prod\limits_{i \in I} \mathbf{A}_i}(f(a_1), \ldots, f(a_m))$.
- Zdefiniowany wyżej homomorfizm f oznaczymy przez $\prod(f_i : i \in I)$ i nazwiemy produktem homomorfizmów f_i.

$\square$

- **Twierdzenie**. Niech $\mathbf{A} = \prod_{i \in I} \mathbf{A}_i$ i niech $\theta_i = ker_{\pi_i}$, dla $i \in I$. Wtedy:
  1. Kresem dolnym rodziny kongruencji $(\theta_i : i \in I)$ jest relacja identyczności na zbiorze $A = dom(\mathbf{A})$.
  2. Dla każdego ciągu $(a_i : i \in I) \in A^I$ istnieje $a \in A$ taki, że $(a, a_i) \in \theta_i$.

  Ponadto, jeśli system kongruencji $(\theta_i : i \in I)$ spełnia powyższe dwa warunki, to algebra $\mathbf{A}$ jest izomorficzna z produktem $\prod_{i \in I} \mathbf{A}_i/\theta_i$.

- **Dowód**. Najpierw pokażemy, że kresem dolnym układu $(\theta_i : i \in I)$ jest relacja identyczności na zbiorze $A = dom(\mathbf{A})$. Mamy równoważności:
  1. Para $(a, b) \in A^2$ należy do wszystkich kongruencji θ_i wtedy i tylko wtedy, gdy
  2. $\forall i \in I \ ((a, b) \in ker_{\pi_i})$ wtedy i tylko wtedy, gdy
  3. $\forall i \in I \ (\pi_i(a) = \pi_i(b))$ wtedy i tylko wtedy, gdy
  4. $\forall i \in I \ a(i) = b(i)$ wtedy i tylko wtedy, gdy
  5. $a = b$.

- Niech $(a_i : i \in I) \in A^I$. Niech $a \in dom(\mathbf{A})$ będzie takie, że $a(i) = a_i(i)$ dla wszystkich $i \in I$. Wtedy $\pi_i(a) = \pi_i(a_i)$ dla wszystkich $i \in I$. Ponieważ $\theta_i = ker_{\pi_i}$, więc $(a, a_i) \in \theta_i$ dla wszystkich $i \in I$.
- Niech teraz $(\theta_i : i \in I)$ spełnia warunki 1 i 2 w tezie twierdzenia. Pokażemy, że $\mathbf{A}$ jest izomorficzna z $\prod\limits_{i \in I} \mathbf{A}_i/\theta_i$. Na mocy poprzedniego twierdzenia, produkt $f = \prod(k_{\theta_i} : i \in I)$ homomorfizmów kanonicznych $k_{\theta_i} : \mathbf{A} \to \mathbf{A}/\theta_i$ jest homorfizmem $\mathbf{A}$ w $\prod\limits_{i \in I} \mathbf{A}_i/\theta_i$. Trzeba jeszcze pokazać, że f jest bijekcją.
- Niech $(a_i/\theta_i : i \in I) \in dom(\prod\limits_{i \in I} \mathbf{A}_i/\theta_i)$. Udowodniliśmy wyżej, że istnieje $a \in A$ taki, że $(a, a_i) \in \theta_i$ dla wszystkich $i \in I$.
- Oznacza to, że $a/\theta_i = a_i/\theta_i$ dla wszystkich $i \in I$.
- Mamy zatem $f(a) = (a/\theta_i : i \in I) = (a_i/\theta_i : i \in I)$, czyli f jest surjekcją.

Wreszcie, f jest odwzorowaniem różnowartościowym, ponieważ mamy następujący ciąg równoważności:

- $f(a) = f(b)$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\forall i \in I\ (a/\theta_i = b/\theta_i)$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\forall i \in I\ (a, b) \in \theta_i$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- (a, b) należy do kresu dolnego układu $(\theta_i : i \in I)$ (który, jak wyżej udowodniono, jest relacją identyczności na zbiorze $A = dom(\mathbf{A})$) wtedy i tylko wtedy, gdy
- $a = b$.

□

Podamy jeszcze (bez dowodów) kilka faktów dotyczących *produktów kongruencji* i ich związków z produktami prostymi algebr:

- Niech $\theta \in Con(\mathbf{A})$ oraz $(\theta_i : i \in I) \in Con(\mathbf{A})^I$. Jeśli
  1. θ jest kresem dolnym rodziny $(\theta_i : i \in I)$ oraz
  2. dla każdego ciągu $(a_i : i \in I) \in A^I$ istnieje $a \in A$ taki, że $(a, a_i) \in \theta_i$,

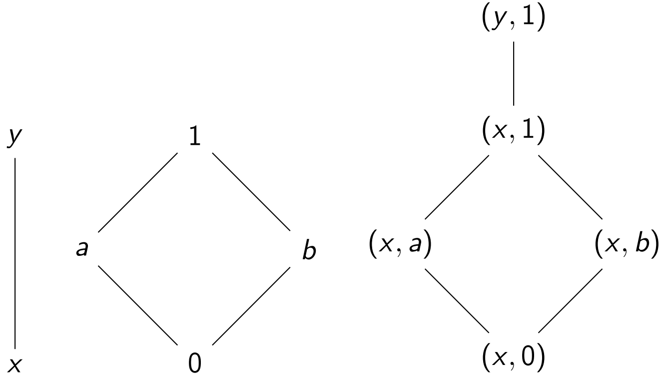
  to mówimy, że θ jest produktem kongruencji θ_i, $i \in I$ i piszemy $\theta = \prod(\theta_i : i \in I)$. Jeśli $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, to piszemy $\theta = \theta_1 \times \theta_2 \times \ldots \times \theta_n$.
- Niech $(\theta_i : i \in I) \in Con(\mathbf{A})^I$. Jeśli $\mathbf{0_A} = \prod(\theta_i : i \in I)$, to $\mathbf{A} \cong \prod\limits_{i \in I} \mathbf{A}/\theta_i$. □
- Jeśli $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ jest izomorfizmem, $\theta \in Con(\mathbf{A})$ oraz $(\theta_i : i \in I) \in Con(\mathbf{A})^I$, to $\theta = \prod(\theta_i : i \in I)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(\theta) = \prod(f(\theta_i) : i \in I)$. □
- Jeśli $\mathbf{A}$ i $\mathbf{A}_i$ $(i \in I)$ są algebrami podobnymi, to: $\mathbf{A} \cong \prod\limits_{i \in I} \mathbf{A}_i$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje system $(\theta_i : i \in I)$ kongruencji algebry $\mathbf{A}$ taki, że $0_\mathbf{A} = \prod(\theta_i : i \in I)$ oraz $\mathbf{A}_i \cong \mathbf{A}/\theta_i$ dla wszystkich $i \in I$. □

- Niech $\theta_1, \ldots, \theta_n \in Con(\mathbf{A})$, $n \geqslant 2$. Następujące warunki są równoważne:
  1. $\forall_{1 \leqslant j \leqslant n}\, 1_{\mathbf{A}} = \theta_j \circ (\theta_1 \cap \ldots \cap \theta_{j-1} \cap \theta_{j+1} \cap \ldots \cap \theta_n)$
  2. $\forall_{a_1, \ldots, a_n \in A} \exists_{a \in A} \forall_{1 \leqslant j \leqslant n}\, (a, a_j) \in \theta_j$. $\square$
- Jeśli $\theta, \theta_1, \ldots, \theta_n \in Con(\mathbf{A})$, $(n \geqslant 2)$, to $\theta = \theta_1 \times \ldots \times \theta_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są warunki:
  1. $\theta = \theta_1 \cap \ldots \cap \theta_n$
  2. $\forall_{1 \leqslant j \leqslant n}\, 1_{\mathbf{A}} = \theta_j \circ (\theta_1 \cap \ldots \cap \theta_{j-1} \cap \theta_{j+1} \cap \ldots \cap \theta_n)$. $\square$
- Niech $\alpha, \beta, \theta \in Con(\mathbf{A})$. Wtedy: $\theta = \alpha \times \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\theta = \alpha \cap \beta$ i $1_{\mathbf{A}} = \alpha \circ \beta$. $\square$
- Niech $\alpha, \beta, \theta \in Con(\mathbf{A})$, $\theta \subseteq \alpha$, $\theta \subseteq \beta$, $\mathbf{B} = \mathbf{A}/\theta$. Wtedy: $\theta = \alpha \times \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy $0_{\mathbf{B}} = \alpha/\theta \times \beta/\theta$. $\square$

- Mówimy, że algebra $\mathbf{A}$ jest prosta, gdy jej jedynymi kongruencjami są: identyczność oraz relacja pełna.
- Mówimy, że algebra $\mathbf{A}$ jest prosto nierozkładalna, jeśli nie jest ona izomorficzna z produktem prostym dwóch algebr niezdegenerowach. Inaczej mówiąc, $\mathbf{A}$ jest prosto nierozkładalna, gdy $\mathbf{A} \cong \mathbf{B} \times \mathbf{C}$ implikuje, że $dom(\mathbf{B})$ jest zbiorem jednoelementowym lub $dom(\mathbf{C})$ jest zbiorem jednoelementowym.
- Każda algebra skończona jest produktem prostym algebr prosto nierozkładalnych, jednak dla algebr nieskończonych nie jest to prawdą.
- Każde ciało jest algebrą prostą.
- Jeżeli algebra $\mathbf{A}$ ma p elementów, gdzie p jest liczbą pierwszą, to $\mathbf{A}$ jest prosto nierozkładalna.

- Mówimy, że algebra $\mathbf{B}$ jest podprostym produktem rodziny algebr $(\mathbf{A}_i : i \in I)$, jeśli $\mathbf{B}$ jest podalgebrą algebry $\prod_{i \in I} \mathbf{A}_i$ i dla każdego $i \in I$, odwzorowanie $\pi_i \restriction B : \mathbf{B} \to \mathbf{A}_i$ jest surjekcją.
- Włożenie $g : \mathbf{B} \to \prod_{i \in I} \mathbf{A}_i$ nazywamy podprostym, jeśli $g(\mathbf{B})$ jest podprostym produktem rodziny $(\mathbf{A}_i : i \in I)$. Mówimy też wtedy, że g jest podprostą reprezentacją algebry $\mathbf{B}$.
- Mówimy, że niezdegenerowana algebra $\mathbf{A}$ jest podprosto nierozkładalna, jeśli dla każdego podprostego włożenia $h : \mathbf{A} \to \prod_{i \in I} \mathbf{A}_i$ istnieje $j \in I$ taki, że złożenie odwzorowań $\pi_j \circ h : \mathbf{A} \to \mathbf{A}_j$ jest izomorfizmem.
- Każda niezdegenerowana prosta algebra jest podprosto nierozkładalna, a każda niezdegenerowana algebra podprosto nierozkładalna jest prosto nierozkładalna.
- **Twierdzenie Birkhoffa**. Każda niezdegenerowana algebra jest izomorficzna z podprostym produktem algebr podprosto nierozkładalnych. □

Niech $\mathbf{A} = (\{x, y\}, \wedge^{\mathbf{A}}, \vee^{\mathbf{A}})$, $\mathbf{B} = (\{0, a, b, 1\}, \wedge^{\mathbf{B}}, \vee^{\mathbf{B}})$, gdzie $\wedge$ interpretujemy jako kres dolny, a $\vee$ jako kres górny.



Przykład produktu podprostego algebr **A** i **B** po prawej.

- Niech $\mathbf{A} = \prod_{i \in I} \mathbf{A}_i$. Elementy uniwersum algebry $\mathbf{A}$ będziemy niżej oznaczali przez $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ itp. Mamy $\mathbf{a} = (a_i : i \in I)$, czyli a_i jest i-tym elementem ciągu $\mathbf{a}$.
- Dla $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in dom(\mathbf{A})$ niech $\| \mathbf{a} = \mathbf{b} \| = \{i \in I : a_i = b_i\}$.
- Niech $\theta_i = \{(\mathbf{a}, \mathbf{b}) : a_i = b_i\}$. Wtedy θ_i jest kongruencją, gdyż $\theta_i = ker_{\pi_i}$.
- Dla $J \subseteq I$ niech $\theta_J = \bigcap_{j \in J} \theta_j$. Wtedy $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \theta_J$ wtedy i tylko wtedy, gdy $J \subseteq \| \mathbf{a} = \mathbf{b} \|$.
- Jeśli $J \subseteq I$, $K \subseteq I$, to $\theta_{J \cup K} = \theta_J \cap \theta_K$.
- Rodzina $\mathcal{F} \subseteq \wp(I)$ jest filtrem na I, gdy:
  1. Jeśli $J \in \mathcal{F}$ i $K \in \mathcal{F}$, to $J \cap K \in \mathcal{F}$.
  2. Jeśli $J \in \mathcal{F}$ i $J \subseteq K \subseteq I$, to $K \in \mathcal{F}$.

Maksymalne (względem $\subseteq$) filtry nazywamy ultrafiltrami. Filtr główny to rodzina wszystkich nadzbiorów zbioru jednoelementowego. Filtr niegłówny to filtr, który nie jest główny. Filtr właściwy to filtr różny od $\wp(I)$.

- Jeśli $\mathcal{U}$ jest ultrafiltrem na I, to dla każdego $J \subseteq I$: $J \in \mathcal{U}$ lub $I - J \in \mathcal{U}$.
- Jeśli $\mathcal{F}$ jest filtrem na I, to $\theta^{\mathcal{F}} = \{(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in dom(\prod_{i \in I} \mathbf{A}_i) : \| \mathbf{a} = \mathbf{b} \| \in \mathcal{F}\}$ jest kongruencją algebry $\mathbf{A} = \prod_{i \in I} \mathbf{A}_i$.
- Algebrę ilorazową $\prod_{i \in I} \mathbf{A}_i / \theta^{\mathcal{F}}$ nazywamy produktem zredukowanym (względem filtru $\mathcal{F}$).
- Jeśli $\mathcal{U}$ jest ultrafiltrem na I, produkt zredukowany $\prod_{i \in I} \mathbf{A}_i / \theta^{\mathcal{F}}$ nazywamy ultraproduktem (rodziny $\{\mathbf{A}_i : i \in I\}$ względem $\mathcal{U}$).
- Jeśli $\mathbf{A}_i = \mathbf{B}$ dla wszystkich $i \in I$, to ultraprodukt rodziny $\{\mathbf{A}_i : i \in I\}$ względem $\mathcal{U}$ nazywamy ultrapotęgą i oznaczamy go przez $\mathbf{B}^I / \theta^{\mathcal{U}}$.
- Każdą algebrę $\mathbf{B}$ można zanurzyć w jej ultrapotęgę $\mathbf{B}^I / \theta^{\mathcal{U}}$ dla pewnego ultrafiltru $\mathcal{U}$ na I.

- Niech $(\Omega \cup \{\approx\}, \tau)$ będzie sygnaturą, taką, że (Ω, τ) jest sygnaturą algebr, zaś $\approx$ jest dwuargumentowym predykatem (predykatem identyczności).
- Niech $\mathcal{L}(\Omega \cup \{\approx\}, \tau)$ będzie językiem pierwszego rzędu o sygnaturze $(\Omega \cup \{\approx\}, \tau)$. W takim języku formuły atomowe są zatem równościami termów.
- **Twierdzenie Łosia**. Niech $\{\mathbf{A}_i : i \in I\}$ będzie rodziną struktur sygnatury $(\Omega \cup \{\approx\}, \tau)$, zaś $\mathcal{U}$ ultrafiltrem na I. Wtedy następujące warunki są równoważne, dla dowolnej formuły $\varphi(x_1, \ldots, x_m)$ języka $\mathcal{L}(\Omega \cup \{\approx\}, \tau)$ oraz dowolnych $\mathbf{b}^1, \ldots, \mathbf{b}^m \in dom(\prod\limits_{i \in I} \mathbf{A}_i)$:
  1. $(\prod\limits_{i \in I} \mathbf{A}_i)/\theta^{\mathcal{U}} \models \varphi(\mathbf{b}^1/\theta^{\mathcal{U}}, \ldots, \mathbf{b}^m/\theta^{\mathcal{U}})$
  2. $\{i \in I : \mathbf{A}_i \models \varphi(\mathbf{b}^1_i, \ldots, \mathbf{b}^m_i)\} \in \mathcal{U}$.

- **Dowód**. Niech $\| \varphi(\mathbf{b}^1, \ldots, \mathbf{b}^m) \| = \{i \in I : \mathbf{A}_i \models \varphi(\mathbf{b}_i^1, \ldots, \mathbf{b}_i^m)\}$.
- Przeprowadzimy dowód przez indukcję po stopniu złożoności formuły φ.

1. *Formuły atomowe*. Jeśli φ jest formułą atomową, to ma postać równości termów: $p(x_1, \ldots, x_m) \approx q(x_1, \ldots, x_m)$. Ponieważ $\theta^{\mathcal{U}}$ jest kongruencją, więc twierdzenie zachodzi dla formuł atomowych.
2. *Spójniki prawdziwościowe*. Zauważmy, że:

- $\| \neg\psi(\mathbf{b}^1, \ldots, \mathbf{b}^m) \| = I - \| \psi(\mathbf{b}^1, \ldots, \mathbf{b}^m) \|$
- $\| \psi_1(\mathbf{b}^1, \ldots, \mathbf{b}^m) \wedge \psi_2(\mathbf{b}^1, \ldots, \mathbf{b}^m) \| =$
  $\| \psi_1(\mathbf{b}^1, \ldots, \mathbf{b}^m) \| \cap \| \psi_2(\mathbf{b}^1, \ldots, \mathbf{b}^m) \|$.

Ponieważ $\mathcal{U}$ jest ultrafiltrem, więc teza twierdzenia zachodzi także dla tego typu formuł, na mocy założenia indukcyjnego.

3. Załóżmy, że $\varphi(x_1, \ldots, x_m)$ jest formułą $\exists y\, \psi(y, x_1, \ldots, x_m)$. Niech $J = \| \varphi(\mathbf{b}^1, \ldots, \mathbf{b}^m) \|$.

- Załóżmy, że $(\prod\limits_{i \in I} \mathbf{A}_i)/\theta^{\mathcal{U}} \models \varphi(\mathbf{b}^1/\theta^{\mathcal{U}}, \ldots, \mathbf{b}^m/\theta^{\mathcal{U}})$. Wtedy istnieje $\mathbf{a} \in dom(\prod\limits_{i \in I} \mathbf{A}_i))$ taki, że $(\prod\limits_{i \in I} \mathbf{A}_i)/\theta^{\mathcal{U}} \models \psi(\mathbf{a}/\theta^{\mathcal{U}}, \mathbf{b}^1/\theta^{\mathcal{U}}, \ldots, \mathbf{b}^m/\theta^{\mathcal{U}})$. Na mocy założenia indukcyjnego $\| \psi(\mathbf{a}, \mathbf{b}^1, \ldots, \mathbf{b}^m) \| \in \mathcal{U}$. Ponadto, $\| \psi(\mathbf{a}, \mathbf{b}^1, \ldots, \mathbf{b}^m) \| \subseteq J$, a więc $J \in \mathcal{U}$.
- Załóżmy, że $J = \{i \in I : \mathbf{A}_i \models \varphi(\mathbf{b}_i^1, \ldots, \mathbf{b}_i^m)\} \in \mathcal{U}$. Dla każdego $i \in J$ wybieramy $a_i \in dom(\mathbf{A}_i)$ taki, że $\mathbf{A}_i \models \psi(a_i, b_i^1, \ldots, b_i^m)$, natomiast dla $i \in I - J$ wybieramy $a_i \in dom(\mathbf{A}_i)$ dowolnie. Wtedy na mocy założenia indukcyjnego
$(\prod\limits_{i \in I} \mathbf{A}_i)/\theta^{\mathcal{U}} \models \psi(\mathbf{a}/\theta^{\mathcal{U}}, \mathbf{b}^1/\theta^{\mathcal{U}}, \ldots, \mathbf{b}^m/\theta^{\mathcal{U}})$, a więc także
$(\prod\limits_{i \in I} \mathbf{A}_i)/\theta^{\mathcal{U}} \models \varphi(\mathbf{b}^1/\theta^{\mathcal{U}}, \ldots, \mathbf{b}^m/\theta^{\mathcal{U}})$.

$\square$

- Niech X będzie niepustym zbiorem, którego elementy nazwiemy zmiennymi, a Ω_n zbiorem symboli funkcyjnych n-argumentowych, dla każdego $n \geqslant 0$. Niech $\Omega = \bigcup_{n \geqslant 0} \Omega_n$. Zbiorem termów typu Ω nazywamy najmniejszy zbiór $T(X)$ taki, że:
  1. $X \cup \Omega_0 \subseteq T(X)$
  2. jeśli $p_1, \ldots, p_n \in T(X)$ oraz $f \in \Omega_n$, to $f(p_1, \ldots, p_n) \in T(X)$
- Jeśli $p(p_1, \ldots, p_n)$ jest termem typu Ω nad jakimś zbiorem zmiennych X, a $\mathbf{A}$ jest algebrą typu Ω, to definiujemy odwzorowanie $p^{\mathbf{A}} : A^n \to A$ warunkami:
  1. jeśli p jest zmienną x_i, to $p^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n) = a_i$
  2. jeśli p jest postaci $f(p_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, p_k(x_1, \ldots, x_n))$, gdzie $f \in \Omega_k$, to
  $p^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n) = f^{\mathbf{A}}(p_1^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n), \ldots, p_k^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n))$.

- Dla danych Ω oraz X, jeśli $T(X) \neq \emptyset$, to algebra termów typu Ω nad X, oznaczana przez $\mathbf{T}(X)$, ma jako uniwersum zbiór $T(X)$, a jej operacje spełniają warunek $f^{\mathbf{T}(X)}(p_1, \ldots, p_n) = f(p_1, \ldots, p_n)$, dla $f \in \Omega_n$ oraz $p_i \in T(X)$, $1 \leqslant i \leqslant n$.
- Niech $\mathcal{K}$ będzie klasą algebr typu Ω, a $\mathbf{U}_X$ algebrą typu Ω, generowaną przez zbiór X. Jeśli dla każdej $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$ i każdego odwzorowania $f : X \to A$ istnieje homomorfizm $g : \mathbf{U}_X \to \mathbf{A}$, który rozszerza f (czyli $g(x) = f(x)$ dla $x \in X$), to mówimy, że $\mathbf{U}_X$ ma uniwersalną własność odwzorowania dla $\mathcal{K}$ nad X. Wtedy X nazywamy zbiorem wolnych generatorów algebry $\mathbf{U}_X$, a algebrę $\mathbf{U}_X$ nazywamy wolno generowaną przez X.
- Algebry termów są algebrami, które mają uniwersalną własność odwzorowania. Algebra o tej własności jest wyznaczona jednoznacznie, z dokładnością do izomorfizmu.

- Identycznością typu Ω nad X jest wyrażenie postaci $p \approx q$, gdzie p i q są elementami $T(X)$. Niech $Id(X)$ będzie zbiorem wszystkich identyczności typu Ω nad X. Mówimy, że algebra $\mathbf{A}$ typu Ω spełnia identyczność $p(x_1, \ldots, x_n) \approx q(x_1, \ldots, x_n)$, symbolicznie $\mathbf{A} \models p(x_1, \ldots, x_n) \approx q(x_1, \ldots, x_n)$ (albo krócej $\mathbf{A} \models p \approx q$), jeśli dla dowolnego wyboru $a_1, \ldots, a_n \in A$ zachodzi $p^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n) = q^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)$. Jeśli $\mathcal{K}$ jest klasą algebr, to $\mathcal{K} \models p \approx q$, gdy $\mathbf{A} \models p \approx q$ dla wszystkich $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$. Jeśli Σ jest zbiorem identyczności, to $\mathcal{K} \models \Sigma$, gdy $\mathcal{K} \models p \approx q$, dla wszystkich $p \approx q \in \Sigma$. Stosujemy oznaczenie: $Id_{\mathcal{K}}(X) = \{p \approx q \in Id(X) : \mathcal{K} \models p \approx q\}$.
- Jeśli Σ jest zbiorem identyczności typu Ω, to niech $Mod(\Sigma)$ będzie klasą wszystkich algebr $\mathbf{A}$, które spełniają Σ. Mówimy, że klasa $\mathcal{K}$ algebr jest klasą równościową, jeśli istnieje zbiór identyczności Σ taki, że $\mathcal{K} = Mod(\Sigma)$. Mówimy też wtedy, że $\mathcal{K}$ jest definiowana (albo aksjomatyzowalna) przez Σ.

- Pojęcie algebry wolnej zdefiniować można również bez odwoływania się do pojęcia algebry termów:
- Jeśli **A** jest jedną z algebr z klasy $\mathcal{K}$ algebr tego samego typu, to mówimy, że jest ona algebrą wolną w klasie $\mathcal{K}$, gdy istnieje taki zbiór X generatorów algebry **A**, że dla dowolnej algebry $\mathbf{B} \in \mathcal{K}$ i każdego odwzorowania $f : X \to B$ istnieje taki homomorfizm $g : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, że $g \upharpoonright X = f$, co oznacza, że g jest rozszerzeniem funkcji f na całe uniwersum algebry **A**. W takim przypadku zbiór X nazywamy zbiorem wolnych generatorów algebry **A**.
- Algebra **A** danego typu jest absolutnie wolna, jeśli jest ona wolna w klasie *wszystkich* algebr tego typu.
- Języki (rozumiane jako zbiory formuł utworzonych ze zmiennych zdaniowych z użyciem funktorów zdaniotwórczych o argumentach zdaniowych) zdaniowych systemów logicznych są algebrami absolutnie wolnymi. Zbiorem wolnych generatorów jest zbiór zmiennych zdaniowych.

- Niech $\mathcal{K}$ będzie klasą algebr tego samego typu. Wprowadzamy oznaczenia:
  1. $\mathbf{H}(\mathcal{K})$: klasa wszystkich homomorficznych obrazów algebr z $\mathcal{K}$
  2. $\mathbf{S}(\mathcal{K})$: klasa wszystkich algebr izomorficznych z podalgebrą algebry z $\mathcal{K}$
  3. $\mathbf{P}(\mathcal{K})$: klasa wszystkich algebr izomorficznych z produktem prostym algebr z $\mathcal{K}$
  4. $\mathbf{I}(\mathcal{K})$: klasa wszystkich algebr izomorficznych z jakąś algebrą z $\mathcal{K}$.
- Mówimy, że klasa $\mathcal{K}$ jest rozmaitością algebr, jeśli jest ona zamknięta na każdy z operatorów **H**, **S** i **P**. Zachodzi następujące ważne twierdzenie:
- **Twierdzenie Birkhoffa**. Klasa algebr jest rozmaitością wtedy i tylko wtedy, gdy jest klasą równościową. □