Metalogika (10)

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl
`pogon@amu.edu.pl`

Uniwersytet Opolski

Plan wykładu

Przedstawiamy operację konsekwencji wyznaczoną przez ***tablice analityczne*** (dla logiki klasycznej).

- Metoda TA (tablic analitycznych) jest współcześnie jedną z ważniejszych metod dowodowych w automatycznym dowodzeniu twierdzeń. Poświęca się jej też coraz więcej miejsca we współczesnych podręcznikach logiki matematycznej.
- Na stronach tego wykładu zamieszczono wiele dodatków dotyczących TA, m.in. podręcznik na którym oparto niniejszą prezentację.
- Nie podajemy informacji na temat TA dla logik nieklasycznych. Zainteresowany czytelnik zechce sięgnąć do literatury przedmiotu (zobacz też dodatki umieszczone na stronie tych wykładów).

Plan wykładu

Systematyczne badania nad tego typu konsekwencjami prowadzone są od prawie pół wieku. Sama metoda znana jest pod różnymi nazwami, mówi się np. o:

- tablicach analitycznych
- tablicach semantycznych
- tablicach Smullyana
- *dual tableaux*
- drzewach semantycznych.

Pierwsze tego typu konstrukcje rozważane były już przez Lewisa Carrolla pod koniec XIX wieku.

Część I: TA w KRZ

Część I:

TA w KRZ

Wprowadzenie

Dokładne omówienie metody tablic analitycznych, wraz z dowodami twierdzeń o trafności i pełności tej metody, podajemy w pliku **tabkrz.pdf**.

W niniejszej prezentacji ograniczamy się do pobieżnego omówienia **praktycznych** porad dotyczących stosowania tej metody w rozwiązywaniu standardowych problemów formułowanych w języku klasycznego rachunku zdań:

- ustalania, czy dana formuła jest tautologią bądź kontrtautologią tego rachunku,
- ustalania, czy dany zbiór formuł jest semantycznie niesprzeczny,
- badania, czy zachodzi wynikanie logiczne.

Uwagi terminologiczne

Terminów: ***tablica analityczna*** oraz drzewo semantyczne używamy zamiennie, w odniesieniu do tych samych konstrukcji.

Zwracamy jednocześnie uwagę, że termin ***drzewo semantyczne*** bywa rozumiany nieco inaczej w informatyce.

Wszystkie pojęcia dotyczące ***drzew*** (np.: korzeń, liść, gałąź, itd.) niezbędne do posługiwania się tablicami analitycznymi podano niżej.

Zakładamy, że słuchacze są oswojeni z tymi pojęciami z zajęć z *Wstępu do Matematyki*.

O drzewach

Grafem nazywamy dowolną parę $\langle X, R\rangle$, gdzie X jest zbiorem, a R jest podzbiorem $X \times X$. Elementy zbioru X nazywamy ***wierzchołkami***, a elementy zbioru R ***krawędziami*** grafu $\langle X, R\rangle$.

Mówimy, że relacja R na zbiorze X jest (ostrym) ***częściowym porządkiem*** w X, jeśli jest ona asymetryczna i przechodnia w X (lub, co na to samo wychodzi: przeciwzwrotna i przechodnia w X).
Każdy spójny porządek częściowy nazywamy ***porządkiem liniowym***.
Liniowy porządek R w X nazywamy ***dobrym porządkiem*** w X, jeśli każdy niepusty podzbiór X ma element R-najmniejszy.

O drzewach

Drzewem (o korzeniu x_0) nazwiemy każdy układ $\langle X, R, x_0\rangle$ taki, że:

- $\langle X, R\rangle$ jest grafem;
- x_0 jest elementem R-najmniejszym w X;
- R jest przechodnia w X;
- R jest asymetryczna w X;
- dla każdego elementu zbioru $X - \{x_0\}$, zbiór jego wszystkich R-poprzedników jest dobrze uporządkowany przez relację R.

Zauważmy, że jeśli $\langle X, R, x_0\rangle$ jest drzewem, to:

- zbiór wszystkich R-poprzedników każdego elementu zbioru $X - \{x_0\}$ jest liniowo uporządkowany;
- relacja R jest przeciwzwrotna w X.

O drzewach

Niech $D = \langle X, R, x_0 \rangle$ będzie drzewem o korzeniu x_0.
Liśćmi drzewa D nazywamy wszystkie te jego wierzchołki, które nie mają R-następników.
Jeśli D jest drzewem, to przez r_D oznaczmy wierzchołek D, a przez L_D zbiór wszystkich liści drzewa D.
Jeśli $(x, y) \in R$ jest krawędzią w D, to x nazywamy ***przodkiem*** y, a y nazywamy ***potomkiem*** x. Jeśli $(x, y) \in R - R^2$ jest krawędzią w D, to x nazywamy ***bezpośrednim przodkiem*** y, a y nazywamy ***bezpośrednim potomkiem*** x.

Każdy podzbiór zbioru wierzchołków drzewa D, który jest uporządkowany liniowo przez R nazywamy ***łańcuchem*** w D. Każdy łańcuch maksymalny (względem inkluzji) w D nazywamy ***gałęzią*** w D. Zamiast terminu *łańcuch* używa się również terminu ***ścieżka***. Przez ***długość*** łańcucha P rozumiemy liczbę elementów zbioru P. ***Pniem*** drzewa D nazywamy część wspólną wszystkich gałęzi D.

O drzewach

Rzędem wierzchołka x nazywamy moc zbioru wszystkich potomków x. ***Rzędem*** drzewa D jest kres górny rzędów wszystkich wierzchołków drzewa D. Drzewo D jest ***skończone***, jeśli zbiór jego wierzchołków jest skończony. Drzewo D jest ***nieskończone***, jeśli zbiór jego wierzchołków jest nieskończony. Drzewo D jest ***rzędu skończonego***, jeśli jego rząd jest liczbą skończoną.

Przez indukcję definiujemy ***poziomy*** drzewa:

- poziom ***zerowy*** to zbiór jednoelementowy, złożony z korzenia drzewa;
- poziom ***k+1*** to zbiór wszystkich bezpośrednich następników wierzchołków poziomu ***k***.

Wysokością drzewa jest największa liczba n taka, że istnieje poziom n w drzewie. Jeśli drzewo ma wierzchołki poziomu n dla każdej liczby naturalnej n, to mówimy, że wysokość drzewa jest ***nieskończona*** (równa ω).

O drzewach

Każde drzewo, w którym każdy wierzchołek nie będący liściem ma najwyżej n bezpośrednich potomków, nazywamy ***drzewem n-arnym***. W szczególności:

- Każde drzewo, w którym każdy wierzchołek nie będący liściem ma najwyżej dwóch bezpośrednich potomków nazwiemy ***drzewem nierozwojowym w sensie watykańskim***, w skrócie ***nw-drzewem***.
- Każde drzewo, w którym każdy wierzchołek nie będący liściem ma dokładnie dwóch bezpośrednich potomków nazywamy ***drzewem dwójkowym*** (używa się też terminu ***drzewo binarne***).

Ważnym twierdzeniem, z którego wielokrotnie będziemy korzystać, jest następujący:

O drzewach

Lemat Königa. Jeśli drzewo D rzędu skończonego jest nieskończone, to ma gałąź nieskończoną.

Dowód. Przypuśćmy, że D jest nieskończone. Zdefiniujemy gałąź nieskończoną $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ w D przez indukcję.
Za element x_0 bierzemy korzeń drzewa D. Ponieważ D jest nieskończone, więc x_0 ma nieskończenie wiele R-następników.
Przypuśćmy, że $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ zostały zdefiniowane tak, że x_i należy do i-tego poziomu drzewa D oraz x_i ma nieskończenie wiele R-następników.
Z założenia, x_{n-1} ma tylko skończenie wiele ***bezpośrednich*** R-następników.
Ponieważ x_{n-1} ma nieskończenie wiele R-następników, więc co najmniej jeden z jego bezpośrednich R-następników także ma nieskończenie wiele R-następników.
Wybieramy więc element x_n z n-tego poziomu drzewa D o tej właśnie własności.
Wtedy x_n ma nieskończenie wiele R-następników. Ponieważ jest tak dla każdego n, pokazaliśmy istnienie nieskończonej gałęzi $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ w drzewie D.

O drzewach

Lemat Königa można też wysłowić następująco:

- Jeśli D jest drzewem rzędu skończonego i dla każdej liczby naturalnej n w D istnieją łańcuchy o co najmniej n elementach, to D ma łańcuch nieskończony.

Mówimy, że $\langle Y, Q, y_0 \rangle$ jest ***poddrzewem*** drzewa $\langle X, R, x_0 \rangle$, gdy:

- 1) $Y \subseteq X$, $Q = R \cap Y^2$
- 2) $\langle Y, Q, y_0 \rangle$ jest drzewem o wierzchołku y_0.

Jeśli D_1 jest poddrzewem D_2, to piszemy $D_1 \ll D_2$.

Jeśli P jest gałęzią (skończoną) w drzewie D, to niech $P_\mho$ oznacza liść drzewa D należący do P.

O drzewach

Niech $D_1 = \langle X, R, x_0 \rangle$ i $D_2 = \langle Y, Q, y_0 \rangle$ będą drzewami, $X \cap Y = \emptyset$, niech P będzie gałęzią w D_1 i niech drzewo $D_3 = \langle Z, S, z_0 \rangle$ będzie zdefiniowane w sposób następujący:

- $Z = X \cup Y$
- $z_0 = x_0$
- $S \cap X^2 = R$
- $S \cap Y^2 = Q$
- $(P_{\mho}, y_0) \in S$.

Mówimy wtedy, że drzewo D_3 jest ***przedłużeniem*** drzewa D_1 na gałęzi P o drzewo D_2 i piszemy $D_1 \sqcup_{P_{\mho}} D_2 \sqsubset D_3$.

Przedłużanie polega zatem, intuicyjnie mówiąc, na „doczepianiu" drzewa do liści innego drzewa. Zauważmy, że jest to relacja czteroargumentowa.

O drzewach

Dla dowolnych drzew D_1 oraz D_3 oraz gałęzi P drzewa D_1, jeśli istnieje D_2 takie, że $D_1 \sqcup_{P_{\mho}} D_2 \sqsubset D_3$, to piszemy $D_1 \sqsubset_{P_{\mho}} D_3$. Dla dowolnych drzew D_1 oraz D_3, piszemy $D_1 \sqsubset D_3$, jeśli istnieje gałąź P w D_1 taka, że $D_1 \sqsubset_{P_{\mho}} D_3$. Piszemy $D = D_1 \sqcup_{P_{\mho}} D_2$, jeśli istnieje D_3 takie, że $D_1 \sqcup_{P_{\mho}} D_2 \sqsubset D_3$. Piszemy $D = D_1 \sqcup D_2$, jeśli istnieje gałąź P w D_1 taka, że $D_1 \sqcup_{P_{\mho}} D_2 \sqsubset D$.

Relacje $\ll$ oraz $\sqsubset$ są częściowymi porządkami (w ustalonej rodzinie drzew). Nie będą nam potrzebne żadne specjalne operacje na drzewach (m.in. wyznaczone przez te porządki), oprócz pewnego specjalnego sumowania drzew. Niech mianowicie $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, \ldots\}$ będzie rodziną (być może nieskończoną) drzew, dobrze uporządkowaną przez relację $\sqsubset$. Przez ***sumę*** rodziny $\mathcal{D}$ rozumiemy najmniejsze drzewo, które jest przedłużeniem wszystkich drzew z $\mathcal{D}$. Tak zdefiniowaną sumę rodziny $\mathcal{D}$ oznaczamy przez $\bigsqcup \mathcal{D}$.

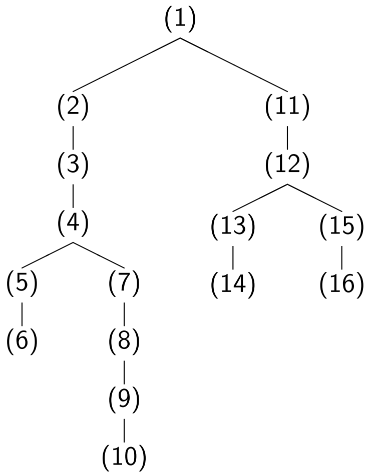
O drzewach

Wszystkie wierzchołki dowolnego drzewa można liniowo uporządkować (odpowiednio je kodując). Szczególnie ważne są dwa tego typu porządki:

- „Porządek poprzeczny". Niech dana będzie ściśle rosnąca funkcja f ze zbioru wierzchołków drzewa D w zbiór liczb naturalnych $\mathcal{N}$. Wierzchołek x f-poprzedza wierzchołek y wtedy i tylko wtedy, gdy: poziom x jest mniejszy od poziomu y lub, gdy x i y są na tym samym poziomie drzewa, $f(x) < f(y)$.

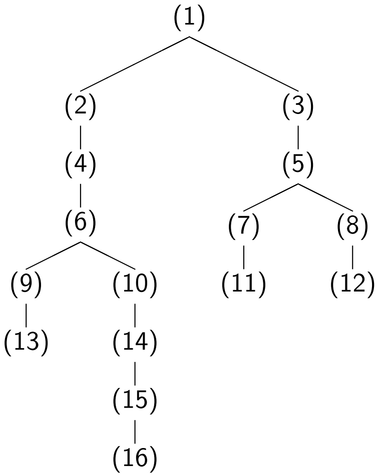
„Porządek wzdłużny". Niech dana będzie ściśle rosnąca funkcja f ze zbioru wierzchołków drzewa $D = \langle X, R, x_0 \rangle$ w zbiór liczb naturalnych $\mathcal{N}$. Tym razem f-porządek wierzchołków drzewa D określimy przez indukcję. Za bezpośredni f-następnik korzenia x_0 drzewa D (czyli za x_1) bierzemy ten z elementów pierwszego poziomu drzewa, dla którego wartość funkcji f jest najmniejsza. Jeśli x_1 nie jest liściem, to rozpatrujemy z kolei zbiór wszystkich jego bezpośrednich R-następników, dla znalezienia kolejnego elementu f-porządku, tj. elementu x_2: będzie to ten z bezpośrednich R-następników wierzchołka x_1, dla którego wartość funkcji f jest najmniejsza. Jeśli x_1 jest liściem, to za następny w f-porządku (czyli za x_2) bierzemy ten z bezpośrednich R-następników x_0 różnych od x_1, dla którego wartość funkcji f jest najmniejsza. Przypuśćmy, że wierzchołki $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ zostały już ustawione w ciąg liniowy. Spośród bezpośrednich R-następników wierzchołka x_{n-1} wybieramy ten, dla którego wartość funkcji f jest najmniejsza i niech będzie to kolejny wierzchołek w budowanym f-porządku, tj. wierzchołek x_n. Jeśli wierzchołek ten nie jest liściem, to rozpatrujemy z kolei zbiór wszystkich jego bezpośrednich R-następników, dla znalezienia kolejnego elementu f-porządku, tj. elementu x_{n+1}. Jeśli x_n jest liściem, to za następny w f-porządku (czyli za x_{n+1}) bierzemy ten z bezpośrednich R-następników x_{n-1} różnych od x_n, dla którego wartość funkcji f jest najmniejsza.

Porządek wzdłużny wierzchołków:



Wierzchołki drzewa numerowane wedle porządku wzdłużnego.

Porządek poprzeczny wierzchołków:



To samo drzewo, wierzchołki numerowane wedle porządku poprzecznego.

O drzewach

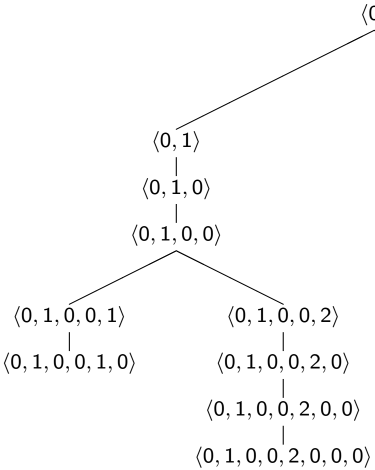
Wierzchołki nw-drzewa mogą być także kodowane ciągami liczb (tu: 0, 1 oraz 2) np. wedle następującej zasady:

- korzeń drzewa otrzymuje kod $\langle 0\rangle$
- jeśli wierzchołek o kodzie $\langle n_1, \ldots, n_m\rangle$ ma dokładnie jednego bezpośredniego potomka, to ów potomek otrzymuje kod $\langle n_1, \ldots, n_m, 0\rangle$
- jeśli wierzchołek o kodzie $\langle n_1, \ldots, n_m\rangle$ ma dokładnie dwóch bezpośrednich potomków, to otrzymują oni kody: $\langle n_1, \ldots, n_m, 1\rangle$ oraz $\langle n_1, \ldots, n_m, 2\rangle$.

Można też użyć w kodowaniach jedynie dwóch liczb, np. 0 i 1.

Wierzchołki drzewa z powyższego przykładu zakodowane zostaną tak:

Kodowanie wierzchołków:



O drzewach

Rozważać będziemy tzw. ***drzewa znakowane***. Przez ***drzewo znakowane*** (elementami ze zbioru L) rozumiemy parę uporządkowaną (D, f), gdzie D jest drzewem, a f jest funkcją ze zbioru wierzchołków drzewa D w zbiór L. Zwykle L będzie pewnym zbiorem formuł. Znakowanie drzew formułami pozwala w precyzyjny sposób mówić o ***wystąpieniach*** danej formuły w drzewie.

Graficzne reprezentacje drzew są rysunkami, na których wierzchołki (jakoś znakowane — punktami, liczbami, formułami, itd.) połączone są liniami, odpowiadającymi krawędziom. Przy tym, jeśli $\langle X, R, x_0 \rangle$ jest drzewem, to na rysunku zaznaczamy tylko krawędzie należące do $R - R^2$ (przy tym, poprzedniki R umieszczane są nad następnikami).

Intuicje dotyczące metody TA

Jak pamiętamy z wykładów dot. semantyki KRZ, dla dowolnej formuły α języka KRZ i dowolnego wartościowania *w* zmiennych zdaniowych, wartość formuły α przy tym wartościowaniu jest jednoznacznie określona.

Jeśli pamiętasz tabelki prawdziwościowe spójników logicznych, to obliczenie wartości dowolnej formuły przy danym wartościowaniu wykonać możesz całkiem mechanicznie, bezmyślnie.

Jest to przy tym procedura typu ***bottom up*** — ustalasz kolejno wartości coraz bardziej złożonych formuł.

W metodzie tablic analitycznych mamy do czynienia z procedurą odwrotną: ***top to bottom***, w tym sensie, że znając wartość pewnej formuły ustalamy jakie są wartości jej podformuł.

Intuicje dotyczące metody TA

Dla przykładu, jeśli implikacja $\alpha \rightarrow \beta$ ma wartość 0 przy danym wartościowaniu zmiennych zdaniowych, to przy tymże wartościowaniu formuła α ma wartość 1, a formuła β ma wartość 0.

A jeśli implikacja $\alpha \rightarrow \beta$ ma wartość 1 przy danym wartościowaniu zmiennych zdaniowych, to przy tymże wartościowaniu ***nie może*** być tak, aby α miała wartość 1, a β miała wartość 0.

To z kolei oznacza, że zachodzi ***co najmniej*** jedno z dwojga: bądź α ma wartość 0, bądź β ma wartość 1.

Nie jest jednak konieczne uwzględnianie ***trzech*** odpowiadających tej sytuacji przypadków — wystarczą wspomniane ***dwie***.

Intuicje dotyczące metody TA

Podobnie, jeśli alternatywa $\alpha \vee \beta$ ma wartość 1 przy danym wartościowaniu zmiennych zdaniowych, to przy tymże wartościowaniu bądź α ma wartość 1, bądź β ma wartość 1.

Również w tym przypadku wystarczy rozważyć jedynie te **dwie** możliwości.

Jeśli natomiast alternatywa $\alpha \vee \beta$ ma wartość 0 przy danym wartościowaniu zmiennych, to przy tymże wartościowaniu zarówno α ma wartość 0 jak i β ma wartość 0.

Podobnie rzecz się ma z pozostałymi formułami złożonymi: koniunkcją i równoważnością.

Intuicje dotyczące metody TA

Dla dowolnej formuły α budujemy drzewo, w którego wierzchołku umieszczamy formułę α i którego pozostałe wierzchołki są podformułami lub negacjami podformuł formuły α; ile jest takich wierzchołków i jak są one połączone krawędziami określają precyzyjne reguły, które omówimy za chwilę. Ograniczmy się w tym miejscu do jednego przykładu; rozważmy mianowicie zaprzeczenie prawa ***Demokratycznego Upoważnienia Poprzez Aplauz***, czyli rozważmy formułę:

$$\neg(((p \to q) \wedge (\neg p \to q)) \to q).$$

Jeśli przypuścimy, że ma ona wartość 1 (przy jakimś wartościowaniu zmiennych), to musimy kolejno uznać, że (przy tymże wartościowaniu):

Intuicje dotyczące metody TA

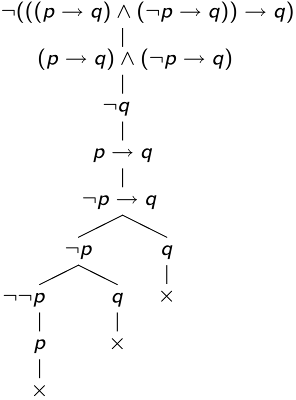
- (1) formuła $((p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)) \rightarrow q$ ma wartość 0;
- (2.1) formuła $(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)$ ma wartość 1, a jednocześnie (2.2) formuła q ma wartość 0;
- (3.1) formuła $p \rightarrow q$ ma wartość 1 oraz (3.2) formuła $\neg p \rightarrow q$ ma wartość 1;
- (4) skoro $p \rightarrow q$ ma wartość 1, to bądź: (4.1) p ma wartość 0, bądź (4.2) q ma wartość 1;
- (5) warunki (2.2) oraz (4.2) są wzajem sprzeczne;
- (6) skoro $\neg p \rightarrow q$ ma wartość 1, to bądź: (6.1) $\neg p$ ma wartość 0, bądź (6.2) q ma wartość 1;
- (7) warunki (2.2) oraz (6.2) są wzajem sprzeczne;
- (8) skoro $\neg p$ ma wartość 0 (z (6.1)), to (8.1) p ma wartość 1;

Intuicje dotyczące metody TA

- (9) warunki (4.1) oraz (8.1) są wzajem sprzeczne;
- (10) przypuszczenie (1) musimy odrzucić;
- (11) nie ma wartościowania, przy którym formuła: $\neg(((p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)) \rightarrow q)$ miałaby wartość 1;
- (12) formuła $\neg(((p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)) \rightarrow q)$ ma zatem wartość 0 przy każdym wartościowaniu;
  (13) zatem formuła $((p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)) \rightarrow q$ ma wartość 1 przy każdym wartościowaniu.

Intuicje dotyczące metody TA

Powyższe rozumowanie reprezentowane może być poprzez drzewo następującej postaci:



Intuicje dotyczące metody TA

Gałęzie tego drzewa odpowiadają ciągom kroków przeprowadzanego wyżej rozumowania. W miejscach, gdzie dany wierzchołek ma dwóch potomków, odpowiadający tej sytuacji krok rozumowania polegał na rozpatrzeniu alternatywy przypadków. Każda gałąź tego drzewa kończy się liściem $\times$, umownie oznaczającym, iż na gałęzi jest para formuł wzajem sprzecznych. Proszę zauważyć, że krok (8) w powyższym rozumowaniu jest zbędny: skoro ustaliliśmy w (4.1), że p jest ma wartość 0 oraz w (6.1), że $\neg p$ ma wartość 0, to już w tym momencie otrzymaliśmy sprzeczność: nie ma wartościowania, przy którym p oraz $\neg p$ mają wartość 1.

Rozpatrzmy jeszcze jeden tylko przykład: sprawdźmy, czy formuła

$$(p \rightarrow q) \wedge (p \vee q)$$

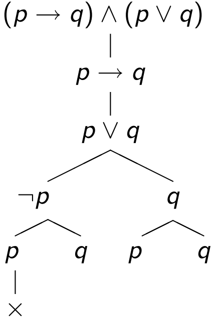
jest ma wartość 1 przy jakimś wartościowaniu. Rozumujemy wtedy tak:

Intuicje dotyczące metody TA

- (1) jeśli $(p \rightarrow q) \wedge (p \vee q)$ ma wartość 1, to (1.1) $p \rightarrow q$ ma wartość 1 oraz (1.2) $p \vee q$ ma wartość 1;
- (2) skoro $p \rightarrow q$ ma wartość 1, to bądź: (2.1) p ma wartość 0, bądź (2.2) q ma wartość 1;
- (3) w przypadku (2.1) mamy, skoro $p \vee q$ ma wartość 1, to bądź: (3.1.) p ma wartość 1, bądź (3.2) q ma wartość 1;
- (4) w przypadku (2.2) mamy, skoro $p \vee q$ ma wartość 1, to bądź: (4.1) p ma wartość 1, bądź (4.2) q ma wartość 1;
- (5) przypadki (2.1) oraz (3.1) są wzajem sprzeczne;
- (6) wszystkie (trzy) pozostałe powyższe przypadki są możliwe;
- (7) formuła $(p \rightarrow q) \wedge (p \vee q)$ ma wartość 1 przy pewnych wartościowaniach zmiennych zdaniowych.

Intuicje dotyczące metody TA

Rozumowanie to reprezentowane jest przez drzewo:



Intuicje dotyczące metody TA

Dodajmy jeszcze parę ogólnych uwag o metodzie tablic analitycznych. Dwie najważniejsze cechy tej metody to:

- apagogiczność;
- analityczność.

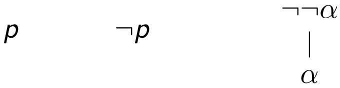
Apagogiczność polega na tym, że omawiana metoda jest ***metodą nie wprost***: sprowadza się do ***wykluczania*** zajścia pewnych sytuacji. W pierwszym z rozważanych wyżej przykładów ***wykluczyliśmy***, że prawo ***Demokratycznego Upoważnienia Poprzez Aplauz*** ma przy jakimkolwiek wartościowaniu zmiennych zdaniowych wartość 0. W drugim z powyższych przykładów ***wykluczyliśmy***, że formuła $(p \rightarrow q) \wedge (p \vee q)$ ma wartość 0 przy wszystkich wartościowaniach.

Intuicje dotyczące metody TA

Analityczność metody polega na tym, że przy ustalaniu własności semantycznych formuł (tu: wykluczaniu, że mają wartość 1 lub wykluczaniu, że mają wartość 1) odwołujemy się jedynie do własności semantycznych ***podformuł*** (oraz negacji podformuł) badanej formuły. W przypadku KRZ dochodzi jeszcze ***algorytmiczność***, w przypadku KRP (Klasycznego Rachunku Predykatów) jedynie ***półalgorytmiczność***. **Uwaga.** Odwołania do ***semantycznych*** własności formuł (ich spełnialności przez wartościowania) w powyższych sformułowaniach są jedynie chwytem reklamowym. Omawiana metoda jest metodą ***syntaktyczną***. Określimy pewną relację konsekwencji wyznaczoną przez tablice analityczne oraz pojęcie tezy systemu tablicowego, a dopiero potem pokażemy, że pojęcia te są dobrane rozumnie i adekwatnie, tj. iż zachodzą twierdzenia o trafności oraz pełności metody tablicowej.

Tablice atomowe

Niech α oraz β będą dowolnymi formułami, a p dowolną zmienną zdaniową języka KRZ. ***Tablicami atomowymi*** są wszystkie drzewa (znakowane) jednej z dziewięciu następujących postaci:



p

$\neg p$

$\neg\neg\alpha$

α

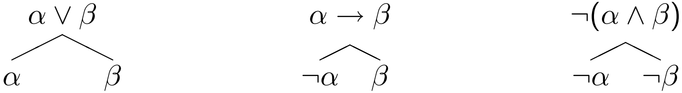
Tablice atomowe

$$\begin{array}{c} \alpha \wedge \beta \\ | \\ \alpha \\ | \\ \beta \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \neg(\alpha \rightarrow \beta) \\ | \\ \alpha \\ | \\ \neg\beta \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \neg(\alpha \vee \beta) \\ | \\ \neg\alpha \\ | \\ \neg\beta \end{array}$$

Tablice atomowe



$\alpha \vee \beta$

$\alpha \quad \beta$

$\alpha \rightarrow \beta$

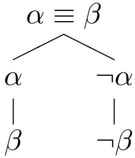
$\neg\alpha \quad \beta$

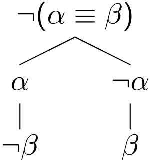
$\neg(\alpha \wedge \beta)$

$\neg\alpha \quad \neg\beta$

Tablice atomowe

Z pewnych powodów (na potrzeby twierdzeń o trafności i pełności) wygodnie jest uważać $\equiv$ za termin ***zdefiniowany*** (np. przez $\rightarrow$ i $\wedge$) i nie rozważać drzew atomowych dla $\equiv$. W praktyce, możemy (i będziemy) stosować reguły dotyczące formuł w postaci równoważności oraz zanegowanej równoważności:





Tablice atomowe

Drzewo atomowe o wierzchołku (znakowanym przez) α będziemy oznaczać przez D_α.

Uwaga. Można budować rachunek tablic analitycznych dla dowolnego zupełnego układu spójników prawdziwościowych. Posługiwanie się symbolami zdefiniowanymi wymaga wtedy dodania ***reguł zastępowania***.
Uwaga. Można przyjąć umowę, że dla atomowych tabel rozgałęziających dany jest ***kanoniczny*** porządek (poprzeczny lub wzdłużny) , tj. że w rozgałęzieniach zawsze piszemy w lewej gałęzi np. pierwszy argument (lub negację pierwszego argumentu) formuły z korzenia tabeli atomowej. Umowa taka pozwoliłaby mówić w sposób jednoznaczny np. o „najbardziej lewej" gałęzi drzew złożonych.

Tablice analityczne

Tablicą analityczną jest każde (znakowane) nw-drzewo powstające przez zastosowanie poniższych konstrukcji:

- (1) Każda tablica atomowa jest tablicą analityczną.
- (2) Jeśli D jest tablicą analityczną, P jest gałęzią w D zawierającą wierzchołek (znakowany przez) α, to $D \sqcup_{P_{\mho}} D_{\alpha}$ jest tablicą analityczną.
- (3) Jeśli $D_0, D_1, D_2, \ldots, D_n, \ldots$ jest ciągiem tablic analitycznych takim, że D_{n+1} powstaje z D_n (dla $n \geqslant 0$) przez zastosowanie kroku (2), to $\bigsqcup D_n$ jest tablicą analityczną.

Tablice analityczne

Uwaga. Często, dla uproszczenia wysławiania się, będziemy opuszczać zwrot „znakowana przez". Nie powinno to prowadzić do nieporozumień. Zauważmy jednak, że znakowanie wierzchołków drzewa formułami ***jest*** istotne: jeśli np. na gałęzi P w tablicy D występują formuły $\alpha \wedge \beta$ oraz $\alpha \wedge \gamma$ i $P' = P \sqcup_{P_\mho} D_{\alpha\wedge\beta}$, to na gałęzi i $P' \sqcup_{P'_\mho} D_{\alpha\wedge\gamma}$ formuła α wystąpi ***dwukrotnie***.

Uwaga. W myśl powyższej definicji, wykonanie kroku (2) każe ***powtarzać*** wystąpienie formuły na branej pod uwagę (przedłużanej) gałęzi. W praktyce, będziemy dopisywać do gałęzi nie całe drzewo atomowe D_α, ale jedynie graf powstający z D_α poprzez usunięcie korzenia r_{D_α}. Sytuacja będzie nieco inna dla tablic analitycznych w Klasycznym Rachunku Predykatów, ale tym zajmiemy się w drugiej części wykładu.

Tablice sprzeczne

Niech D będzie tablicą analityczną, a P gałęzią w D. Mówimy, że:

- P jest ***sprzeczna***, gdy istnieje formuła α taka, że zarówno α, jak i $\neg\alpha$ są elementami P.
- Tablica D jest ***sprzeczna***, jeśli każda gałąź w D jest sprzeczna.

Uwaga. Zamiast „gałąź sprzeczna" mówimy też „gałąź ***zamknięta***", a gdy P nie jest sprzeczna, to mówimy, że P jest gałęzią ***otwartą***.

Dowody tablicowe

- ***Dowodem tablicowym*** formuły α nazywamy każdą tablicę sprzeczną o korzeniu $\neg\alpha$.
- Mówimy, że α jest ***tablicowo dowodliwa***, jeśli istnieje tablicowy dowód α. Jeśli α jest tablicowo dowodliwa, to piszemy $\vdash_{tab} \alpha$.
- ***Tablicowym odrzuceniem*** formuły α nazywamy każdą tablicę sprzeczną o korzeniu α.
- Mówimy, że α jest ***tablicowo odrzucalna***, jeśli istnieje tablicowe odrzucenie α. Jeśli α jest tablicowo odrzucalna, to piszemy $\dashv_{tab} \alpha$.

Trochę heurystyki

To co najważniejsze, jeśli chodzi o metodę tablic analitycznych da się streścić tak oto. Masz jakąś formułę języka KRZ. Budujesz jej tablicę analityczną. Każda z konstruowanych gałęzi odpowiada próbie konstrukcji wartościowania, dla którego rozważana formuła ma wartość 1. Jeśli gałąź jest zamknięta (zawiera parę formuł wzajem sprzecznych), to gałąź taka ***nie może*** odpowiadać żadnemu wartościowaniu, dla którego badana formuła ma wartość 1. Zamykanie gałęzi to zatem wykluczanie zachodzenia pewnych sytuacji. Natomiast istnienie gałęzi otwartych w tabeli analitycznej danej formuły ukazuje, że istnieją wartościowania, przy których formuła ta ma wartość 1.

Trochę heurystyki

Jeśli podczas tworzenia łańcucha formuł w konstruowanej tablicy analitycznej uzyskamy w tym łańcuchu parę formuł wzajem sprzecznych, to dalsza praca z tym łańcuchem jest niepotrzebna: możemy ją zakończyć, doklejając do takiego łańcucha liść z informacją o uzyskaniu sprzeczności i otrzymując w ten sposób gałąź zamkniętą drzewa, traktowaną jako twór kompletny. Pamiętasz: *Sprzeczność to śmierć logiczna.* Nadto, z kultury masowej pamiętasz: *A kto umarł, ten nie żyje.* Podstawowym celem budowania tabel analitycznych jest uzyskiwanie łańcuchów zamkniętych, tj. zbiorów formuł wśród których jest para formuł wzajem sprzecznych. Jeśli jakiś zbiór formuł zawiera parę formuł wzajem sprzecznych, to ***każdy*** jego nadzbiór także tę parę zawiera. Można zakończyć pracę.

Trochę heurystyki

Zasada 1.
Sprawdzaj po każdym kroku, czy możesz zamknąć którąś z gałęzi. Jeśli możesz ją już zamknąć, to oznacz ją × i nie przedłużaj.

Ponieważ kolejne kroki dotyczą wszystkich otwartych gałęzi drzewa, warto (dla uniknięcia, jeśli to możliwe, podwójnej pracy) przestrzegać też zasady:

Zasada 2.
Najpierw stosuj reguły nie powodujące rozgałęzienia drzewa, a dopiero potem reguły powodujące rozgałęzienie.

Notacja

Omówimy teraz jedną z możliwych notacji, stosowanych w praktycznych zastosowaniach metody tablic analitycznych. Notacja uwzględniać będzie:

- numerację wykonywanych kroków
- informację dotyczącą reguł wykorzystywanych w poszczególnych krokach
- wyniki wykonania poszczególnych kroków.

Uwaga. Wymienione wyżej informacje ***nie*** są elementami składowymi tablic analitycznych. Stanowią (metajęzykowe) komentarze, ułatwiające odczytywanie dowodów tablicowych.

Stosujemy następujące konwencje:

- Formuła umieszczana w korzeniu tablicy otrzymuje numer (0), z ***lewej*** strony. W dalszym ciągu, gdy będziemy rozpoczynać budowę tablicy z założeń, poszczególne założenia $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ otrzymają numery: $(0.1), (0.2), \ldots, (0.n)$, odpowiednio.
- Numer każdego kroku (w tworzeniu tablicy) piszemy ***z prawej*** strony formuły, do której stosujemy ów krok. Jest to liczba z kropką, umieszczana w górnej frakcji. Za tym numerem dodajemy informację, jaka reguła jest wykorzystywana w danym kroku. Jest to oczywiście informacja nadmiarowa, ponieważ dla dowolnej formuły można zastosować ***tylko jedną*** regułę rozkładu, ale — jak sądzimy — przydatna dydaktycznie, co najmniej na początkowym etapie uczenia się rozważanej metody.
- Wynik wykonania kroku o numerze $n.$ (a więc pewna formuła lub formuły) jest numerowany z ***lewej*** strony, liczbą w nawiasach okrągłych: (n) (z indeksami, o których niżej).

Przyjmujemy następujące konwencje dotyczące numeracji wyników wykonania poszczególnych kroków:

- Jeśli w kroku n. zastosowano regułę nierozgałęziającą tworzenia tablicy atomowej dla **podwójnej negacji**, to wynik wykonania kroku n. otrzymuje numer (n).
- Jeśli w kroku n. zastosowano (inną niż powyższa) regułę **nierozgałęziającą** (a więc regułę tworzenia tablicy atomowej dla: koniunkcji, zaprzeczonej implikacji lub zaprzeczonej alternatywy), to wynikiem jest para formuł, które zapisujemy jedna pod drugą na danej gałęzi i które numerujemy: (n_g) i (n_d).
- Jeśli w kroku n. zastosowano regułę **rozgałęziającą** (a więc regułę tworzenia tablicy atomowej dla: zaprzeczonej koniunkcji, implikacji lub alternatywy), to wynikiem jest para formuł, tworząca rozgałęzienie; formuły te uzyskują numery: (n_l) i (n_p).

Zgodnie z zastrzeżeniem dotyczącym równoważności $\equiv$, podanym po definicji tablic atomowych, nie powinniśmy budować tablic analitycznych dla formuł postaci $\alpha \equiv \beta$, używając w takich przypadkach tablicy np. dla formuły $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$. Niejedno już w życiu popełniliśmy świństewko, i w tym przypadku również na świństewko sobie pozwolimy. ***Będziemy*** budować tablice dla formuł postaci $\alpha \equiv \beta$ oraz $\neg(\alpha \equiv \beta)$. Przy tym:

- Wynikiem wykonania kroku *n*. dla formuły postaci $\alpha \equiv \beta$ jest para par formuł, tworząca rozgałęzienie. Formuły pierwszej pary, w gałęzi lewej otrzymują numery: (n_{lg}) i (n_{ld}) i podpisywane są jedna pod drugą na gałęzi lewej. Formuły drugiej pary, w gałęzi prawej otrzymują numery: (n_{pg}) i (n_{pd}) i podpisywane są jedna pod drugą na gałęzi prawej.
- Wynikiem wykonania kroku *n*. dla formuły postaci $\neg(\alpha \equiv \beta)$ jest para par formuł, tworząca rozgałęzienie. Formuły pierwszej pary, w gałęzi lewej otrzymują numery: (n_{lg}) i (n_{ld}) i podpisywane są jedna pod drugą na gałęzi lewej. Formuły drugiej pary, w gałęzi prawej otrzymują numery: (n_{pg}) i (n_{pd}) i podpisywane są jedna pod drugą na gałęzi prawej.

Notacja

Gałąź zamkniętą tablicy opatrujemy liściem $\times_{m,n}$, gdzie m oraz n są numerami wzajem sprzecznych formuł, występujących na tej gałęzi. Gałęzie otwarte tablicy opatrujemy liśćmi $\circ$, numerowanymi kolejno, jeśli jest ich więcej niż jedna. Czasem stosujemy też inne znaczki dla gałęzi otwartych, np.: $\clubsuit$, $\diamondsuit$, $\heartsuit$ i $\spadesuit$.

Uwaga. Wymienione wyżej symbole dla oznaczania gałęzi zamkniętych i otwartych tablicy ***nie są*** elementami tablicy, są (metajęzykowymi) komentarzami, mającymi ułatwiać czytanie dowodów.

Uwaga. Wynik wykonania kroku *n*. powinien zostać umieszczony na ***każdej*** gałęzi, która zawiera formułę (dokładniej: wystąpienie formuły), do której ów krok jest stosowany. W praktyce, nie będziemy stosować się do tej powinności w odniesieniu do gałęzi zamkniętych: wynik wykonania kroku *n*. będzie umieszczany na ***każdej otwartej*** gałęzi, która zawiera formułę (dokładniej: wystąpienie formuły), do której ów krok jest stosowany.

Notacja

Uwaga. Tablice analityczne są ***całościami***, tworami, by tak rzec, ***statycznymi***. Gdy mówimy o ***budowaniu*** tablicy analitycznej, to traktujemy ją ***dynamicznie***, jako twór, który jest krok po kroku ***konstruowany***. Rzecz ma się tu dokładnie tak samo, jak w przypadku dowodów dotychczas omawianych (aksjomatycznych lub założeniowych).

Powtórka. Procedura budowy tabeli analitycznej ***nie jest*** deterministyczna: możemy w różnej kolejności wybierać z danego łańcucha formuły i stosować odpowiednie reguły. Zarówno ze względów estetycznych, jak i biorąc pod uwagę ekonomię konstrukcji tablic, zaleca się stosowanie: najpierw reguł nierozgałęziających, a w dalszej kolejności reguł rozgałęziających. Innym zaleceniem w budowie tablic analitycznych jest: sprawdzaj w każdym kroku, czy na którejś z budowanych gałęzi nie wystąpiła już para formuł wzajem sprzecznych. Jeśli tak jest, to oznacz tę gałąź liściem × jako zamkniętą (sprzeczną) i nie uwzględniaj jej w dalszej konstrukcji.

Kodowanie wierzchołków tablicy analitycznej

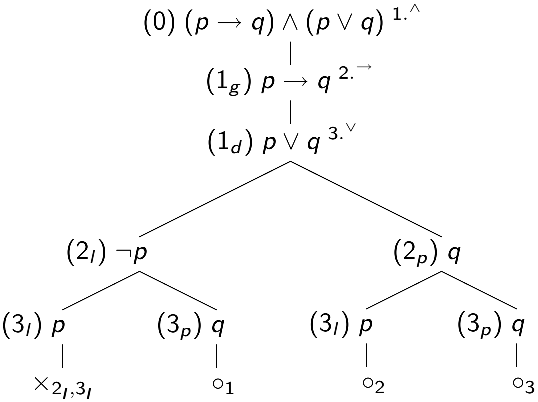
Niech wystąpienie α w tablicy analitycznej D ma kod $\langle n_1, \ldots, n_m \rangle$. Wtedy:

- jeśli α ma postać $\neg\neg\beta$, to β otrzymuje kod $\langle n_1, \ldots, n_m, 0 \rangle$
- jeśli D_α jest drzewem nierozgałęziającym, to jego wierzchołki (różne od r_{D_α}) otrzymują kody: $\langle n_1, \ldots, n_m, 1 \rangle$ (pierwszy wierzchołek gałęzi różny od r_{D_α}) oraz $\langle n_1, \ldots, n_m, 2 \rangle$ (drugi wierzchołek gałęzi różny od r_{D_α})
- jeśli D_α jest drzewem rozgałęziającym, to jego wierzchołki (różne od r_{D_α}) otrzymują kody: $\langle n_1, \ldots, n_m, 1 \rangle$ (w gałęzi lewej) oraz $\langle n_1, \ldots, n_m, 2 \rangle$ (w gałęzi prawej).

Uwaga. Terminy: „pierwszy", „drugi", „lewy" oraz „prawy" odnoszą się do rysunków w definicji tablic atomowych. Nie będziemy niżej korzystać z tego kodowania, pokazujemy jedynie, że jest możliwe.

Przykład 1

Tablica analityczna formuły $(p \rightarrow q) \wedge (p \vee q)$:



Przykład 1

Sposób budowania tego drzewa jest widoczny z umieszczonych w nim komentarzy:

- W korzeniu umieszczamy formułę $(p \rightarrow q) \wedge (p \vee q)$ i opatrujemy ją z lewej strony numerem (0).
- Głównym spójnikiem formuły (0) jest koniunkcja. Wykonujemy zatem krok 1. wedle zaleceń tablicy atomowej dla koniunkcji.
- Otrzymujemy formuły będące członami tej koniunkcji: $p \rightarrow q$ oraz $p \vee q$. Przypisujemy im numery: (1_g) oraz (1_d) i podpisujemy obie formuły pod korzeniem drzewa. Utworzyliśmy w ten sposób łańcuch składający się z formuł o numerach: (0), (1_g) i (1_d).
- Głównym spójnikiem formuły o numerze (1_g) jest implikacja. Wykonujemy zatem krok 2. wedle zaleceń tablicy atomowej dla implikacji, tworząc rozgałęzienie w drzewie.

Przykład 1

- W lewej gałęzi umieszczamy zaprzeczony poprzednik implikacji (1_g), czyli formułę $\neg p$ i opatrujemy tę formułę numerem (2_l).
- W prawej gałęzi umieszczamy następnik implikacji (1_g), czyli formułę q i opatrujemy tę formułę numerem (2_p).
- Zbudowaliśmy w ten sposób dwa łańcuchy, złożone, odpowiednio, z formuł o numerach:
  - (0), (1_g), (1_d) i (2_l)
  - (0), (1_g), (1_d) i (2_p).
- Jedyną formułą, do której można jeszcze stosować jakieś reguły wyznaczone przez tablice atomowe jest formuła o numerze (1_d), czyli $p \vee q$. Jej spójnikiem głównym jest alternatywa. Wykonujemy zatem krok 3. wedle zaleceń tablicy atomowej dla alternatywy, tworząc ***dwa*** dalsze rozgałęzienia w drzewie: zarówno pod formułą o numerze (2_l), jak i pod formułą o numerze (2_p).

Przykład 1

- W lewej gałęzi wyniku wykonania kroku 3. piszemy formułę p (pierwszy człon alternatywy $p \vee q$) i opatrujemy ją numerem (3_l). W prawej gałęzi wyniku wykonania kroku 3. piszemy formułę q (drugi człon alternatywy $p \vee q$) i opatrujemy ją numerem (3_p).
- Do żadnej z formuł nie można już zastosować żadnej reguły rozkładu podanej w definicji tablic atomowych. Ponieważ na gałęzi złożonej z formuł o numerach: (0), (1_g), (1_d), (2_l) oraz (3_l) występuje para formuł wzajem sprzecznych (a mianowicie formuły o numerach: (2_l) i (3_l)), więc gałąź tę oznaczamy jako zamkniętą (sprzeczną), podpisując pod nią liść $\times_{2_l,3_l}$. Pozostałe (trzy) gałęzie są otwarte. Jeśli jest to potrzebne (np. dla podania wartościowań, przy których formuła z korzenia drzewa przyjmuje wartość 1, jak będziemy to później stosować), to gałęzie te jakoś numerujemy, np. tak, jak zrobiono to na rysunku.

Przykład 2

Przywołajmy po raz kolejny świetnie nam już znane prawo ***Demokratycznego Upoważnienia Poprzez Aplauz***, odgrywające jakże fundamentalną rolę w wielu wyborach:

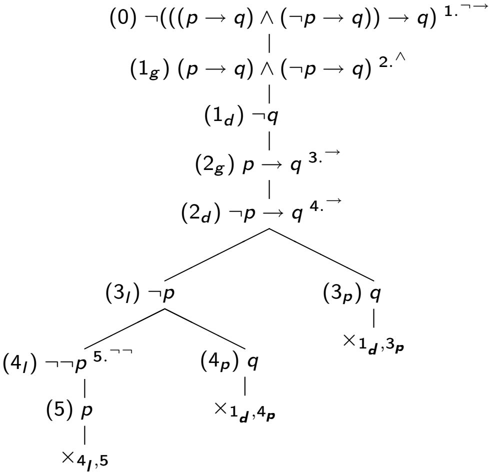
$$((p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)) \rightarrow q.$$

Zbudujemy tablicę analityczną dla zaprzeczenia tego prawa, tj. dla formuły:

$$(\bigstar) \quad \neg(((p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)) \rightarrow q).$$

Budowę tablicy rozpoczynamy od korzenia, w którym umieszczamy formułę (★), a następnie stosujemy reguły rozkładu formuł (wyliczone w zestawie tablic atomowych):

Przykład 2



$(0)\ \neg(((p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)) \rightarrow q)\ ^{1.\neg\rightarrow}$

$(1_g)\ (p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)\ ^{2.\wedge}$

$(1_d)\ \neg q$

$(2_g)\ p \rightarrow q\ ^{3.\rightarrow}$

$(2_d)\ \neg p \rightarrow q\ ^{4.\rightarrow}$

$(3_l)\ \neg p$

$(3_p)\ q$

$\times_{1_d,3_p}$

$(4_l)\ \neg\neg p\ ^{5.\neg\neg}$

$(4_p)\ q$

$\times_{1_d,4_p}$

$(5)\ p$

$\times_{4_l,5}$

Przykład 2

- W korzeniu tablicy umieszczamy formułę $\neg(((p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)) \rightarrow q)$ i opatrujemy ją numerem (0). Jej spójnikiem głównym jest negacja (implikacji), a więc krok numer 1. wykorzystuje regułę podaną dla tablicy atomowej zanegowanej implikacji. Umieszczamy, jedna pod drugą, formuły: (1_g) $(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)$ (poprzednik implikacji (0)) oraz (1_g) $\neg q$ (następnik implikacji (0)).
- Formuła o numerze (1_g) jest koniunkcją, a więc w kroku 2. stosujemy regułę podaną dla tablicy atomowej koniunkcji: umieszczamy, jedna pod drugą, formuły: (2_g) $p \rightarrow q$ (pierwszy człon koniunkcji (1_g)) oraz (2_d) $\neg p \rightarrow q$ (drugi człon koniunkcji (1_g)).

Przykład 2

- Mamy teraz wybór: następny krok może dotyczyć bądź formuły o numerze (2_g), bądź formuły o numerze (2_d). Każda z tych możliwości owocuje rozgałęzieniem. Wybierzmy pierwszą z nich. W kroku 3. stosujemy zatem regułę podaną w tablicy atomowej dla implikacji do formuły: (2_g) $p \rightarrow q$. Wyniki wykonania tego kroku zapisujemy w rozgałęzieniach: w lewej gałęzi piszemy (3_l) $\neg p$, a w prawej piszemy (3_p) q.
- Zauważamy (!) w tym momencie, że gałąź prawa zawiera parę formuł wzajem sprzecznych: są to formuły o numerach (1_d) oraz (3_p). Zgodnie z podanym wyżej zaleceniem, gałąź tę ***zamykamy***, dopisując do niej liść informujący o wystąpieniu pary formuł wzajem sprzecznych: $\times_{1_d,3_p}$. W dalszej konstrukcji tabeli, gałęzi tej nie bierzemy już pod uwagę.

Przykład 2

- Pozostaje zatem gałąź kończąca się formułą o numerze (3_l) oraz jedna tylko formuła *niezredukowana*, czyli taka, do której dotąd nie zastosowano żadnej reguły rozkładu podanej w spisie tablic atomowych. Jest to formuła o numerze (2_d), będąca implikacją. W kroku 4. stosujemy do niej regułę dla implikacji, podaną w spisie tablic atomowych: tworzymy rozgałęzienie, umieszczając w lewej jego gałęzi formułę (4_l) $\neg\neg p$ (czyli zaprzeczony poprzednik implikacji (2_d)), a w jego prawej gałęzi formułę (4_p) q (czyli następnik implikacji (2_d)).
- Zauważamy (!) w tym momencie, że gałąź prawa zawiera parę formuł wzajem sprzecznych: są to formuły o numerach (1_d) oraz (3_p). Zgodnie z podanym wyżej zaleceniem, gałąź tę ***zamykamy***, dopisując do niej liść informujący o wystąpieniu pary formuł wzajem sprzecznych: $\times_{1_d,4_p}$. W dalszej konstrukcji tabeli, gałęzi tej nie bierzemy już pod uwagę.

Przykład 2

- Jedyna pozostała gałąź otwarta to ciąg formuł zaczynający się od formuły (0), a kończący się formułą (4_l). Do formuły o numerze (4_l), a więc do formuły $\neg\neg p$ stosujemy, w kroku 5., regułę dla podwójnej negacji, wymienioną w zestawie tablic atomowych. W rezultacie wykonania kroku 5. otrzymujemy formułę o numerze (5), czyli p, którą podpisujemy pod formułą o numerze (4_l).
- Zauważamy (!!) teraz dwie rzeczy:
    - Na gałęzi zaczynającej się od formuły (0), a kończącej się formułą (5) występuje para formuł wzajem sprzecznych: są to formuły o numerach (3_l) oraz (4_l), a także formuły o numerach: (3_l) oraz (5). Zgodnie z podanym wyżej zaleceniem, gałąź tę ***zamykamy***, dopisując do niej liść informujący o wystąpieniu pary formuł wzajem sprzecznych: $\times_{3_l,5}$ (albo: $\times_{3_l,4_l}$).
    - ***Wszystkie*** gałęzie tablicy są zamknięte (sprzeczne). Zbudowaliśmy zatem ***sprzeczną*** tablicę analityczną o korzeniu $\neg(((p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)) \rightarrow q)$.

Przykład 2

Koniec pracy. Pozostaje tylko ogłoszenie wyniku: skoro tablica o korzeniu $\neg(((p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)) \rightarrow q)$ jest sprzeczna, to pokazaliśmy tym samym, że formuła:

$$((p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)) \rightarrow q,$$

nasze ulubione prawo ***Demokratycznego Upoważnienia Poprzez Aplauz***, ma dowód tablicowy (jest nim właśnie zbudowana przed chwilą tablica). W innym jeszcze, równoznacznym, sformułowaniu: formuła ta jest tablicowo dowodliwa (jest tezą systemu tablic analitycznych):

$$\vdash_{tab} ((p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)) \rightarrow q.$$

Przykład 2

Uwaga. Zauważmy, że dla zamknięcia „najbardziej lewej" gałęzi powyższej tablicy nie było konieczne wykonanie kroku 5.; już wcześniej (przed wykonaniem tego kroku) na gałęzi tej znajdowała się para formuł wzajem sprzecznych: były to formuły o numerach (3_l) oraz (4_l).
Uwaga. Zaleca się porównanie konstrukcji powyższej tabeli analitycznej (w tym przypadku: dowodu tablicowego) z komentarzem dotyczącym prawa ***Demokratycznego Upoważnienia Poprzez Aplauz*** zamieszczonym wyżej.
Uwaga. Staramy się, aby rysowane drzewa były, w miarę możności, estetyczne, a więc np.: gałąź pod daną formułą rozpoczynała się pod spójnikiem głównym tej formuły, formuły pod łańcuchami „biegnącymi" w lewo lub prawo znajdowały się mniej więcej w takim miejscu, aby dochodząca do nich krawędź wypadała w ich „środku", itp. Nie zawsze się to udaje i porażka estetyczna nie jest powodem, aby chlipać i rozdzierać szatę. W przypadku tabeli wyżej pokazanej, np. korzeń drzewa należałoby usytuować na rysunku nieco inaczej niż to uczyniono.

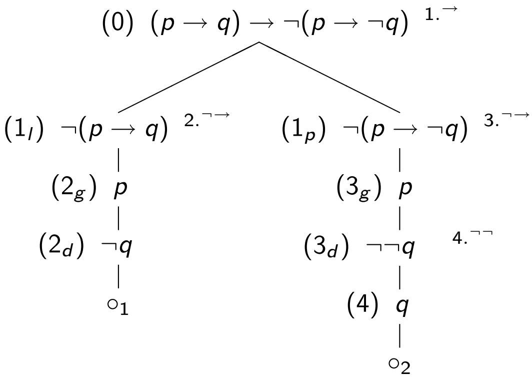
W dalszym ciągu będziemy czasem korzystać z możliwości liniowego uporządkowania wierzchołków tablicy analitycznej.

Przykład 3

Zbudujemy tablice analityczne:

- (1) dla formuły $(p \rightarrow q) \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg q)$ oraz
- (2) dla zaprzeczenia tej formuły, tj. dla formuły $\neg((p \rightarrow q) \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg q))$.

Przykład 3



(0) $(p \rightarrow q) \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg q)$ $1.^{\rightarrow}$

(1_l) $\neg(p \rightarrow q)$ $2.^{\neg\rightarrow}$

(2_g) p

(2_d) $\neg q$

$\circ_1$

(1_p) $\neg(p \rightarrow \neg q)$ $3.^{\neg\rightarrow}$

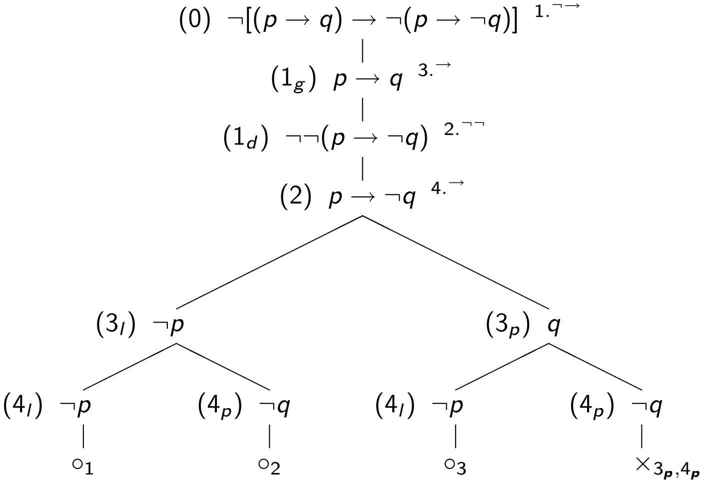
(3_g) p

(3_d) $\neg\neg q$ $4.^{\neg\neg}$

(4) q

$\circ_2$

Przykład 3



$(0)\quad \neg[(p \longrightarrow q) \longrightarrow \neg(p \longrightarrow \neg q)]\quad 1.^{\neg\longrightarrow}$

$(1_g)\quad p \longrightarrow q\quad 3.^{\longrightarrow}$

$(1_d)\quad \neg\neg(p \longrightarrow \neg q)\quad 2.^{\neg\neg}$

$(2)\quad p \longrightarrow \neg q\quad 4.^{\longrightarrow}$

$(3_l)\quad \neg p$

$(3_p)\quad q$

$(4_l)\quad \neg p$

$(4_p)\quad \neg q$

$(4_l)\quad \neg p$

$(4_p)\quad \neg q$

$\circ_1$

$\circ_2$

$\circ_3$

$\times_{3_{\boldsymbol{p}},4_{\boldsymbol{p}}}$

Trafność metody TA

Twierdzenie. ***Trafność Metody Tablic Analitycznych.***

Jeśli α ma dowód tablicowy, to α jest tautologią KRZ.

Tak więc, wszystko, co możemy udowodnić metodą tablicową okazuje się prawem (tautologią) KRZ.
Jest (w połowie) dobrze.

Dowód tego twierdzenia: w pliku **tabkrz.pdf**.

Pełność metody TA

Twierdzenie. ***Pełność Metody Tablic Analitycznych.***

Jeśli α jest tautologią KRZ, to α ma dowód tablicowy.

Tak więc, każde prawo (tautologia) KRZ ma dowód tablicowy.
Jest całkiem dobrze.

Dowód tego twierdzenia: w pliku **tabkrz.pdf**.

Tabele analityczne ze zbioru założeń

Niech X będzie (być może nieskończonym) zbiorem formuł języka KRZ. Definiujemy ***tablice analityczne ze zbioru założeń*** X przez indukcję:

- Każda tablica atomowa jest tablicą analityczną ze zbioru założeń X.
- Jeśli D jest tablicą analityczną ze zbioru założeń X oraz $\alpha \in X$, to $\bigsqcup(D \sqcup_P \alpha)$ jest tablicą analityczną ze zbioru założeń X, gdzie suma $\bigsqcup$ brana jest po wszystkich gałęziach otwartych w D.
- Jeśli D jest tablicą analityczną ze zbioru założeń X, P gałęzią w D, a $\alpha \in X$, to $D \sqcup_P D_\alpha$ jest tablicą analityczną ze zbioru założeń X.

Konsekwencja tablicowa

Dowodem tablicowym formuły α ***ze zbioru założeń*** X nazywamy każdą sprzeczną tablicę analityczną ze zbioru założeń X o korzeniu $\neg\alpha$.

Jeśli istnieje dowód tablicowy formuły α ze zbioru założeń X, to mówimy że α jest ***konsekwencją tablicową*** X (lub: α jest ***tablicowo dowodliwa*** (***wyprowadzalna***) z X) i piszemy wtedy: $X \vdash_{tab} \alpha$.

- Operacja ***konsekwencji tablicowej*** C_{tab} zdefiniowana jest następująco:
$$C_{tab}(X) = \{\alpha \in F_{KRZ} : X \vdash_{tab} \alpha\}.$$

Trafność, pełność, zwartość

Twierdzenie. ***Trafność dowodów tablicowych z założeń.***
Jeśli α ma dowód tablicowy z założeń X, to $X \models_{KRZ} \alpha$, czyli α wynika logicznie z X.

Twierdzenie. ***Pełność dowodów tablicowych z założeń.***
Jeśli α wynika logicznie z X (czyli $X \models_{KRZ} \alpha$), to α ma dowód tablicowy z założeń X.

Twierdzenie. ***Zwartość.***
Niech X będzie nieskończonym zbiorem formuł języka KRZ. X jest spełnialny (semantycznie niesprzeczny) wtedy i tylko wtedy, gdy każdy skończony podzbiór Y zbioru X jest spełnialny.

Dowody tych twierdzeń: w pliku tabkrz.pdf.

I co dalej?

Wiedząc, że metoda TA jest trafna i pełna, możemy ją wykorzystać dla ustalania czy:

- dana formuła jest spełnialna,
- dana formuła jest odrzucalna,
- dana formuła jest tautologią KRZ,
- dana formuła jest kontrtautologią KRZ,
- dany zbiór formuł jest semantycznie sprzeczny,
- dana formuła wynika logicznie z podanego zbioru formuł.

Tautologie i kontrtautologie KRZ

Przypominamy:

- Formuła α jest **tautologią** KRZ (prawem KRZ) wtedy i tylko wtedy, gdy $Val(\alpha, w) = 1$ dla każdego wzz w.
- Formuła α jest **kontrtautologią** KRZ wtedy i tylko wtedy, gdy $Val(\alpha, w) = 0$ dla każdego wzz w.

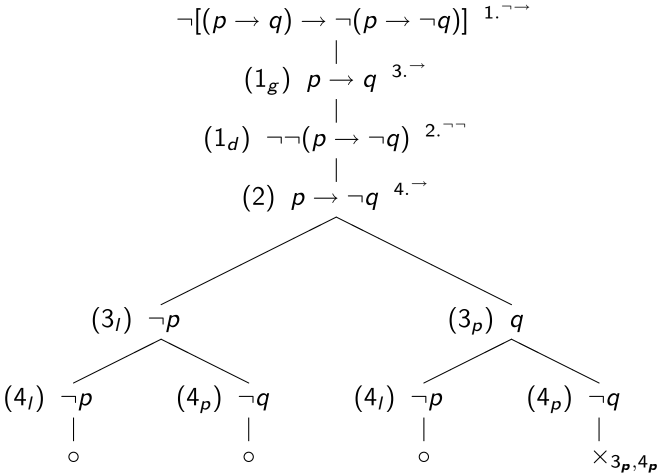
Aby móc stwierdzić, że formuła ma przy **każdym** wartościowaniu wartość:

- **1** — należy **wykluczyć** możliwość, że ma ona wartość **0** przy **jakimś** wartościowaniu,
- **0** — należy **wykluczyć** możliwość, że ma ona wartość **1** przy **jakimś** wartościowaniu.

Przykład 4

Przykład 4. Czy formuła $(p \rightarrow q) \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg q)$ jest tautologią czy kontrtautologią rachunku zdań?

Rozpoczynamy od sprawdzenia czy formuła ta jest tautologią KRZ. Budujemy tablicę analityczną dla negacji tej formuły (co odpowiada przypuszczeniu, że formuła w korzeniu przyjmuje wartość 1 dla jakiegoś wartościowania):



$\neg[(p \rightarrow q) \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg q)]$ $^{1.\neg\rightarrow}$

(1_g) $p \rightarrow q$ $^{3.\rightarrow}$

(1_d) $\neg\neg(p \rightarrow \neg q)$ $^{2.\neg\neg}$

(2) $p \rightarrow \neg q$ $^{4.\rightarrow}$

(3_l) $\neg p$

(3_p) q

(4_l) $\neg p$ ○

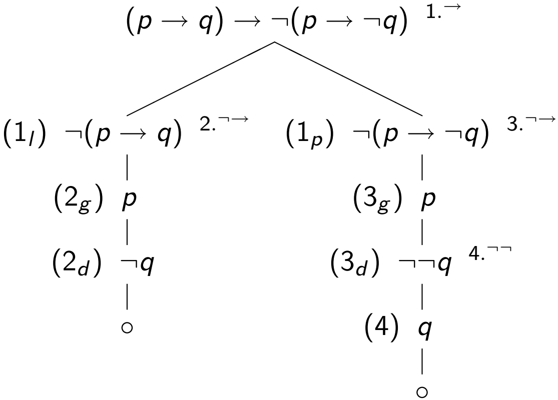
(4_p) $\neg q$ ○

(4_l) $\neg p$ ○

(4_p) $\neg q$ $\times_{3_{\boldsymbol{p}},4_{\boldsymbol{p}}}$

Z istnienia gałęzi otwartej w powyższym drzewie wynika, że formuła $(p \rightarrow q) \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg q)$ nie jest tautologią.

Sprawdzimy, czy jest ona kontrtautologią:



$(p \to q) \to \neg(p \to \neg q)$ $^{1.\to}$

(1_l) $\neg(p \to q)$ $^{2.\neg\to}$

(2_g) p

(2_d) $\neg q$

$\circ$

(1_p) $\neg(p \to \neg q)$ $^{3.\neg\to}$

(3_g) p

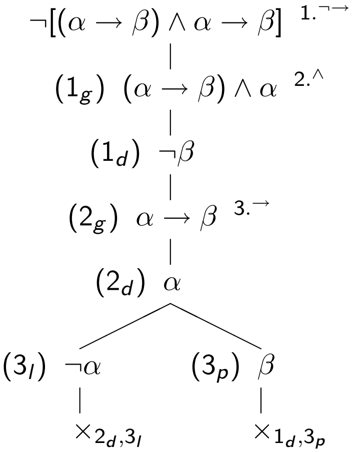
(3_d) $\neg\neg q$ $^{4.\neg\neg}$

(4) q

$\circ$

Widać, że formuła $(p \to q) \to \neg(p \to \neg q)$ nie jest również kontrtautologią KRZ.

Przykład 5. Modus ponendo ponens: $(\alpha \to \beta) \wedge \alpha \to \beta$



$\neg[(\alpha \to \beta) \wedge \alpha \to \beta]$ $1.^{\neg\to}$

(1_g) $(\alpha \to \beta) \wedge \alpha$ $2.^{\wedge}$

(1_d) $\neg\beta$

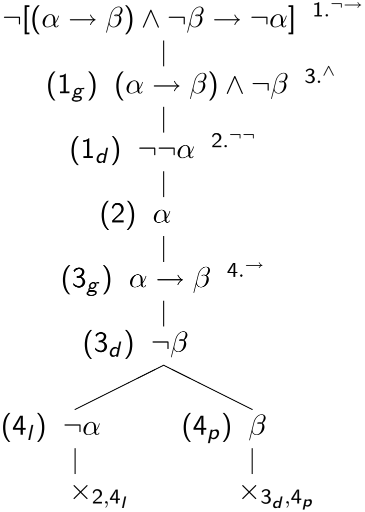
(2_g) $\alpha \to \beta$ $3.^{\to}$

(2_d) α

(3_l) $\neg\alpha$ (3_p) β

$\times_{2_d,3_l}$ $\times_{1_d,3_p}$

Przykład 6. Modus tollendo tollens: $((\alpha \rightarrow \beta) \wedge \neg\beta) \rightarrow \neg\alpha$



$\neg[(\alpha \rightarrow \beta) \wedge \neg\beta \rightarrow \neg\alpha]$ $1.^{\neg\rightarrow}$

(1_g) $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge \neg\beta$ $3.^{\wedge}$

(1_d) $\neg\neg\alpha$ $2.^{\neg\neg}$

(2) α

(3_g) $\alpha \rightarrow \beta$ $4.^{\rightarrow}$

(3_d) $\neg\beta$

(4_l) $\neg\alpha$ (4_p) β

$\times_{2,4_l}$ $\times_{3_d,4_p}$

Semantyczna niesprzeczność

Przypominamy:

Zbiór formuł X jest **semantycznie niesprzeczny**, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje wartościowanie, przy którym wszystkie formuły z tego zbioru mają wartość 1. W przeciwnym przypadku mówimy, że zbiór ten jest **semantycznie sprzeczny**.

Zatem, zbiór formuł jest semantycznie **sprzeczny** wtedy i tylko wtedy, gdy **nie istnieje** wartościowanie przy którym wszystkie formuły z tego zbioru mają wartość 1.

Do badania czy dany zbiór formuł języka rachunku zdań jest semantycznie niesprzeczny można zastosować tabele analityczne w następujący sposób:

1. Przypuszczamy, że istnieje takie wartościowanie, przy którym wszystkie formuły z rozważanego zbioru przyjmują wartość 1.
2. Budujemy tablicę analityczną, w której umieszczamy formuły z badanego zbioru (numerując je przez $0.1, 0.2, \ldots$).
3. Z kształtu otrzymanego drzewa odczytujemy odpowiedź:
   - i) **zbiór jest semantycznie niesprzeczny**, gdy drzewo ma co najmniej jedną gałąź otwartą,
   - ii) **zbiór jest semantycznie sprzeczny** jeżeli wszystkie gałęzie drzewa są zamknięte.

Przypadek ii) przeczy założeniu poczynionemu na początku (w punkcie 1) przypuszczeniu, co oznacza, że nie istnieje takie wartościowanie przy którym wszystkie formuły z rozważanego zbioru mają wartość 1. A co za tym idzie, badany zbiór zdań jest semantycznie sprzeczny. W przeciwnym przypadku jest on semantycznie niesprzeczny, a wartościowanie przy którym wszystkie formuły z rozważanego zbioru przyjmują wartość 1 można odczytać z gałęzi otwartej drzewa.

Przykład 7

Przykład 7.
Sprawdzimy, czy zbiór formuł:

$$\{p, \neg q, \neg r, p \rightarrow (s \vee t), t \rightarrow (r \wedge q)\}$$

jest semantycznie niesprzeczny.

Skorzystamy z liniowego uporządkowania wierzchołków budowanej tablicy analitycznej, ponieważ cała tablica nie mieści się na tej kartce. Jest to porządek **wzdłużny**. Można z niego zrekonstruować odnośne drzewo. **Ćwiczenie:** zrób to.

1. (0.1) p
2. (0.2) $\neg q$
3. (0.3) $\neg r$
4. (0.4) $p \rightarrow (s \vee t)$ $^{1.\rightarrow}$
5. (0.5) $t \rightarrow (r \wedge q)$ $^{3.\rightarrow}$
6. (1_l) $\neg p$
$\times_{0.1,1_l}$
7. (1_p) $s \vee t$ $^{2.\vee}$
8. (2_l) s
9. (3_l) $\neg t$
○

10. (3_p) $r \wedge q$ $^{4.\wedge}$
11. (4_g) r
12. (4_d) q
$\times_{0.2,4_d}$
13. (2_p) t
14. (3_l) $\neg t$
$\times_{2_p,3_l}$
15. (3_p) $r \wedge q$ $^{5.\wedge}$
16. (5_g) r
17. (5_d) q
$\times_{0.3,5_g}$

Tabela ma gałąź otwartą (formuły o numerach: (0.1), (0.2), (0.3), (0.4), (0.5), (1_p), (2_l), (3_l)), a więc rozważany zbiór jest semantycznie niesprzeczny.

Przykład 8

Przykład 8.
Sprawdzimy, czy zbiór formuł:

$$\{p \rightarrow q, r \rightarrow q, p \vee r \rightarrow q\}$$

jest semantycznie niesprzeczny.

Skorzystamy z liniowego uporządkowania wierzchołków budowanej tablicy analitycznej, ponieważ cała tablica nie mieści się na tej kartce. Można z niego zrekonstruować odnośne drzewo. **Ćwiczenie:** zrób to.
Tabela ma (akurat wszystkie) gałęzie otwarte, a więc rozważany zbiór jest semantycznie niesprzeczny:

1. (0.1) $p \to q$ $^{1.\to}$
2. (0.2) $r \to q$ $^{5.\to}$
3. (0.3) $p \vee r \to q$ $^{2.\to}$
4. (1_l) $\neg p$
5. (2_l) $\neg(p \vee r)$ $^{3.\neg\vee}$
6. (3_g) $\neg p$
7. (3_d) $\neg r$
8. (5_l) $\neg r$
○
9. (5_p) q
○
10. (2_p) q
11. (5_l) $\neg r$
○
12. (5_p) q
○

13. (1_p) q
14. (2_l) $\neg(p \vee r)$ $^{4.\neg\vee}$
15. (4_g) $\neg p$
16. (4_d) $\neg r$
17. (5_l) $\neg r$
○
18. (5_p) q
○
19. (2_p) q
20. (5_l) $\neg r$
○
21. (5_p) q
○

Przykład 9

Przykład 9.
Sprawdzimy, czy zbiór formuł:

$$\{p \rightarrow r, p \vee r, q \vee r, r \rightarrow \neg p, \neg p \rightarrow \neg r\}$$

jest semantycznie niesprzeczny.

Skorzystamy z liniowego uporządkowania wierzchołków budowanej tablicy analitycznej, ponieważ cała tablica nie mieści się na tej kartce. Można z niego zrekonstruować odnośne drzewo. **Ćwiczenie:** zrób to.
Tabela analityczna ma wszystkie gałęzie zamknięte, a więc rozważany zbiór jest semantycznie sprzeczny:

1. (0.1) $p \rightarrow r$ $^{1.\rightarrow}$
2. (0.2) $p \vee r$ $^{2.\vee}$
3. (0.3) $q \vee r$
4. (0.4) $r \rightarrow \neg p$ $^{3.\rightarrow}$
5. (0.5) $\neg p \rightarrow \neg r$ $^{4.\rightarrow}$
6. (1_l) $\neg p$
7. (2_l) p
$\times_{1_l,2_l}$
8. (2_p) r
9. (3_l) $\neg r$
$\times_{2_p,3_l}$
10. (3_p) $\neg p$
11. (4_l) $\neg\neg p$
12. (5) p
$\times_{3_p,5}$
13. (4_p) $\neg r$
$\times_{2_p,4_p}$
14. (1_p) r
15. (2_l) p
16. (3_l) $\neg r$
$\times_{1_p,3_l}$
17. (3_p) $\neg p$
$\times_{2_l,3_p}$
18. (2_p) r
19. (3_l) $\neg r$
$\times_{2_p,3_l}$
20. (3_p) $\neg p$
21. (4_l) $\neg\neg p$
22. (6) p
$\times_{3_p,6}$
23. (4_p) $\neg r$
$\times_{1_p,4_p}$

Wynikanie logiczne

Przypominamy:

- Formuła α **wynika logicznie ze zbioru formuł zdaniowych** X wtedy i tylko wtedy, gdy formuła α ma wartość 1 przy każdym wartościowaniu, przy którym wszystkie formuły ze zbioru X mają wartość 1.

Szczególnym przypadkiem jest wynikanie logiczne formuły z formuły:

- Formuła β **wynika logicznie z formuły** α wtedy i tylko wtedy, gdy β ma wartość 1 przy każdym wartościowaniu, przy którym formuła α ma wartość 1.

Do sprawdzenia, czy dana formuła α wynika ze zbioru formuł zdaniowych X można wykorzystać tabele analityczne w następujący sposób:

- zakładamy, że wszystkie formuły ze zbioru X mają wartość 1 przy dowolnym wzz w,
- przypuszczamy, że formuła α ma wartość 0 przy wzz w (tzn. formuła $\neg\alpha$ ma wartość 1 przy tym wzz w),
- budujemy tablicę analityczną, w której umieszczamy wszystkie formuły ze zbioru X oraz formułę $\neg\alpha$.

Gałęzie otwarte w otrzymanym drzewie odpowiadają wartościowaniom, przy których wszystkie formuły ze zbioru X mają wartość 1, a formuła α ma wartość 0. Zatem, jeśli drzewo:

- ma choć jedną gałąź otwartą, to formuła α **nie wynika logicznie** ze zbioru formuł zdaniowych X,
- ma wszystkie gałęzie zamknięte, to formuła α **wynika logicznie** ze zbioru formuł X.

Jeżeli otrzymane drzewo ma wszystkie gałęzie zamknięte, to oznacza to, że **nie istnieje** wartościowanie, przy którym wszystkie formuły ze zbioru X mają wartość 1, a formuła α ma wartość 0. Wtedy, zgodnie z definicją, formuła α wynika logicznie ze zbioru formuł X.

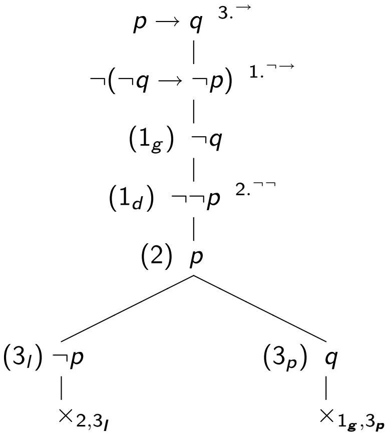
Innymi słowy:

- Formuła α wynika logicznie ze zbioru formuł X wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór formuł $X \cup \{\neg\alpha\}$ jest semantycznie sprzeczny.
- Formuła α nie wynika logicznie ze zbioru formuł X wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór formuł $X \cup \{\neg\alpha\}$ jest semantycznie niesprzeczny.

Przykład 10

Przykład 10.
Sprawdzimy, czy formuła $\neg q \rightarrow \neg p$ wynika logicznie z formuły $p \rightarrow q$.

Przypuśćmy, że istnieje takie wartościowanie, przy którym formuła $p \rightarrow q$ ma wartość 1, a formuła $\neg q \rightarrow \neg p$ ma wartość 0 (odpowiada to przypuszczeniu, że przy takim wartościowaniu implikacja $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$ ma wartość 0). Sprawdzamy, czy takie wartościowanie istnieje budując tablicę analityczną, w której umieszczamy formuły: $p \rightarrow q$ oraz $\neg(\neg q \rightarrow \neg p)$:



Otrzymane drzewo ma wszystkie gałęzie zamknięte. Nie istnieje zatem wartościowanie, przy którym formuła $p \to q$ ma wartość 1, a formuła $\neg q \to \neg p$ ma wartość 0. Zatem formuła $\neg q \to \neg p$ **wynika logicznie** z formuły $p \to q$.

Przykład 11.

Sprawdzimy, które ze zdań:

a) *Bóg istnieje.*
b) *Bóg nie istnieje*.
c) *Życie ma sens*.
d) *Życie nie ma sensu*.
wynika logicznie ze zdania
e) *Nieprawda, że: życie nie ma sensu, o ile Bóg nie istnieje.*

Mamy zdania proste: p — *Bóg istnieje* oraz q — *Życie ma sens*. Schematy rozważanych zdań wyglądają następująco:

a) p
b) $\neg p$
c) q
d) $\neg q$
e) $\neg(\neg p \rightarrow \neg q)$

Istnienie Boga a Sens Życia

1

$(0.1)\ \neg(\neg p \rightarrow \neg q)\ ^{1.\neg\rightarrow}$

$(0.2)\ \neg p$

$(1_g)\ \neg p$

$(1_d)\ \neg\neg q\ ^{2.\neg\neg}$

$(2)\ q$

$\circ$

2

$(0.1)\ \neg(\neg p \rightarrow \neg q)\ ^{2.\neg\rightarrow}$

$(0.2)\ \neg\neg p\ ^{1.\neg\neg}$

$(1)\ p$

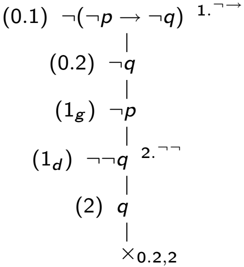
$(2_g)\ \neg p$

$(2_d)\ \neg\neg q$

$\times_{1,2_g}$

Istnienie Boga a Sens Życia

3



$(0.1)\ \neg(\neg p \rightarrow \neg q)\ ^{1.\neg\rightarrow}$

$(0.2)\ \neg q$

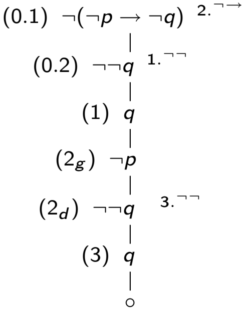
$(1_g)\ \neg p$

$(1_d)\ \neg\neg q\ ^{2.\neg\neg}$

$(2)\ q$

$\times_{0.2,2}$

4



$(0.1)\ \neg(\neg p \rightarrow \neg q)\ ^{2.\neg\rightarrow}$

$(0.2)\ \neg\neg q\ ^{1.\neg\neg}$

$(1)\ q$

$(2_g)\ \neg p$

$(2_d)\ \neg\neg q\ ^{3.\neg\neg}$

$(3)\ q$

$\circ$

Ponieważ drzewa 2 oraz 3 są zamknięte, ze zdania ***Nieprawda, że: życie nie ma sensu, o ile Bóg nie istnieje*** **wynikają logicznie** zdania: ***Bóg nie istnieje*** oraz ***Życie ma sens***. Przemyśl to.

Zadanie domowe 1

1. Sprawdź, czy jest semantycznie sprzecznym zbiorem zdań:

Rodaku! Jeśli jesteś prawdziwym Polakiem, to głosujesz na PPP (Partię Prawdziwych Polaków). Wtedy i tylko wtedy PPP wygrywa wybory, gdy Ty na nią głosujesz. Co najmniej jedno z dwojga: albo jesteś prawdziwym Polakiem, albo jesteś za włączeniem Polski do Unii Europejskiej. PPP nie wygrywa wyborów, jeśli jesteś za włączeniem Polski do Unii Europejskiej.

Odpowiedź. Znajdujemy zdania proste oraz struktury składniowe zdań złożonych:

p	—	*Jesteś prawdziwym Polakiem*
q	—	*Głosujesz na PPP*
r	—	*PPP wygrywa wybory*
s	—	*Jesteś za włączeniem Polski do Unii Europejskiej*

$$\{p \to q, r \equiv q, p \vee s, s \to \neg r\}$$

Skorzystamy z liniowego uporządkowania wierzchołków budowanej tablicy analitycznej, ponieważ cała tablica nie mieści się na tej kartce. Można z niego zrekonstruować odnośne drzewo. **Ćwiczenie:** zrób to. Tablica ma gałęzie otwarte, a więc rozważany tekst jest semantycznie niesprzeczny:

1. (0.1) $p \rightarrow q$ $^{2.\rightarrow}$
2. (0.2) $r \equiv q$ $^{1.\equiv}$
3. (0.3) $p \vee s$ $^{4.\vee}$
4. (0.4) $s \rightarrow \neg r$ $^{3.\rightarrow}$

5. (1_{lg}) r
6. (1_{ld}) q
7. (2_l) $\neg p$
8. (3_l) $\neg s$
9. (4_l) p
$\times_{2_{\boldsymbol{l}},4_{\boldsymbol{d}}}$
10. (4_p) s
$\times_{3_{\boldsymbol{l}},4_{\boldsymbol{p}}}$
11. (3_p) $\neg r$
$\times_{1_{\boldsymbol{lg}},3_{\boldsymbol{p}}}$
12. (2_p) q
13. (3_l) $\neg s$
14. (4_l) p
$\circ$
15. (4_p) s
$\times_{3_{\boldsymbol{l}},4_{\boldsymbol{p}}}$
16. (3_p) $\neg r$
$\times_{1_{\boldsymbol{lg}},3_{\boldsymbol{p}}}$

17. (1_{pg}) $\neg r$
18. (1_{pd}) $\neg q$
19. (2_l) $\neg p$
20. (3_l) $\neg s$
21. (4_l) p
$\times_{2_{\boldsymbol{l}},4_{\boldsymbol{l}}}$
22. (4_p) s
$\times_{3_{\boldsymbol{l}},4_{\boldsymbol{p}}}$
23. (3_p) $\neg r$
24. (4_l) p
$\times_{2_{\boldsymbol{l}},4_{\boldsymbol{l}}}$
25. (4_p) s
$\circ$
26. (2_p) q
$\times_{1_{\boldsymbol{pd}},2_{\boldsymbol{p}}}$

Zadanie domowe 2

2. Sprawdź czy podane wnioskowanie jest dedukcyjne:

Jeżeli poziom inflacji jest stały, o ile wzrasta produkt narodowy, to bezrobocie się zmniejsza. Ale okazuje się, że bezrobocie nie zmniejsza się, chociaż przeciętny obywatel nie trzyma oszczędności w NBB (Naszym Bezpiecznym Banku). Jednakże zachodzi co najmniej jedno z dwojga: albo produkt narodowy wzrasta, o ile poziom inflacji jest stały, albo doradcy ekonomiczni rezygnują. Bez wątpienia, jeśli doradcy ekonomiczni rezygnują, to spada bezrobocie lub wzrasta produkt narodowy. No i co z tego wynika? Ano to, że doradcy ekonomiczni rezygnują.

Odpowiedź. Znajdujemy zdania proste oraz struktury składniowe zdań złożonych:

p — *Poziom inflacji jest stały.*
q — *Wzrasta produkt narodowy.*
r — *Bezrobocie się zmniejsza.*
s — *Przeciętny obywatel trzyma oszczędności w NBB.*
t — *Doradcy ekonomiczni rezygnują.*

$$\begin{array}{c} (q \rightarrow p) \rightarrow r \\ \neg r \wedge \neg s \\ (p \rightarrow q) \vee t \\ t \rightarrow (r \vee q) \\ \hline t \end{array}$$

Skorzystamy z liniowego uporządkowania wierzchołków budowanej tablicy analitycznej, ponieważ cała tablica nie mieści się na tej kartce. Można z niego zrekonstruować odnośne drzewo. **Ćwiczenie:** zrób to. Wnioskowanie nie jest dedukcyjne, ponieważ tablica analityczna dla przesłanek i zaprzeczonego wniosku ma gałęzie otwarte:

1. $(0.1)\ (q \rightarrow p) \rightarrow r \quad ^{2.\rightarrow}$

2. $(0.2)\ \neg r \wedge \neg s \quad ^{1.\wedge}$

3. $(0.3)\ (p \rightarrow q) \vee t \quad ^{4.\vee}$

4. $(0.4)\ t \rightarrow (r \vee q) \quad ^{6.\rightarrow}$

5. $(0.5)\ \neg t$

6. $(1_g)\ \neg r$

7. $(1_d)\ \neg s$

8. $(2_l)\ \neg(q \rightarrow p) \quad ^{3.\neg\rightarrow}$

9. $(3_g)\ q$

10. $(3_d)\ \neg p$

11. $(4_l)\ p \rightarrow q \quad ^{5.\rightarrow}$

12. $(5_l)\ \neg p$

13. $(6_l)\ \neg t$

○

14. $(6_p)\ r \vee q \quad ^{7.\vee}$

15. $(7_l)\ r$

$\times_{1_g,7_l}$

16. $(7_p)\ q$

○

17. $(5_p)\ q$

18. $(6_l)\ \neg t$

○

19. $(6_p)\ r \vee q \quad ^{8.\vee}$

20. $(8_l)\ r$

$\times_{1_g,8_l}$

21. $(8_p)\ q$

○

22. $(4_p)\ t$

$\times_{0.5,4_p}$

23. $(2_p)\ r$

$\times_{1_g,2_p}$

Część II: TA w KRP

Część II:

TA w KRP

Tablice analityczne w KRP

Omówimy teraz operację konsekwencji w KRP wyznaczoną przez **tablice analityczne**.

Zakładamy, że słuchacze pamiętają, czym jest konsekwencja tablicowa w KRZ.

Przypominamy, że dowody wszystkich twierdzeń z niniejszej prezentacji przedstawiono w pliku **tabkrp.pdf**. Podano tam również kilkadziesiąt szczegółowo omówionych przykładów oraz zadania, wszystkie z rozwiązaniami.

O drzewach — przypomnienie

Wszystkie potrzebne elementarne pojęcia dotyczące drzew podane zostały na początku prezentacji. Tu przypomnimy jedynie, z jakich pojęć będziemy korzystać:

- drzewo, korzeń, gałąź, liść,
- (bezpośredni) przodek i (bezpośredni) potomek wierzchołka,
- poziom drzewa, wysokość drzewa,
- rząd wierzchołka, rząd drzewa,
- drzewa: skończone, nieskończone, rzędu skończonego
- Lemat Königa,
- poddrzewo, przedłużenie drzewa (na gałęzi) drzewem,
- poprzeczny i wzdłużny porządek wierzchołków drzewa.

Drzewa znakowane

Przez ***drzewo znakowane*** elementami zbioru A rozumiemy układ (D, f) taki, że:

- $D = (X, x_0, R)$ jest drzewem,
- $f : D \to A$ jest funkcją (przyporządkowującą każdemu wierzchołkowi drzewa D element zbioru A).

W podanych niżej konstrukcjach drzewa będą znakowane formułami języka KRP.

Niech (D, f) będzie drzewem znakowanym, a P gałęzią w D. Mówimy, że element $f(x)$ ***występuje*** na gałęzi P, jeśli $x \in P$.
Zauważmy, że jeśli (D, f) jest drzewem znakowanym elementami zbioru A, a P jest gałęzią w D, to element $f(x)$ (gdzie $x \in P$) może na gałęzi P wystąpić wielokrotnie.

Numeracja wystąpień

Niech (D, f) będzie drzewem znakowanym, P gałęzią w D, gdzie $D = (X, x_0, R)$, a $f : X \rightarrow A$. Elementy gałęzi P są, z definicji, liniowo uporządkowane przez relację R. Poszczególne wystąpienia elementu $a \in A$ na gałęzi P można ponumerować, wykorzystując porządek R gałęzi P:

- ***pierwszym*** wystąpieniem a na P jest para (x_i, a) taka, że $a = f(x_i)$ oraz x_i jest R-najmniejszym elementem P takim, że $a = f(x_i)$;
- jeśli (x_i, a) jest n-tym wystąpieniem a na P, przez $n + 1$ ***wystąpienie*** a na P rozumiemy parę (x_j, a) taką, że $a = f(x_j)$ oraz x_j jest R-najmniejszym elementem P takim, że $a = f(x_i)$ i $x_i R x_j$. Jeśli takie x_j nie istnieje, to (x_i, a) jest ***ostatnim*** wystąpieniem a na P.

Rozważane dalej drzewa będą ***rzędu skończonego***. Nadto, będziemy rozważać sytuacje, gdy gałąź jest nieskończona dokładnie wtedy, gdy ***ten sam*** element występuje na niej nieskończenie wiele razy.

Drzewa syntaktyczne termów

Przez ***drzewo syntaktyczne termu*** rozumiemy każde znakowane drzewo skończonego rzędu (o zadanym poprzecznym porządku wierzchołków) T takie, że:

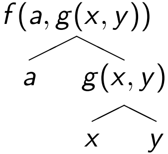
- Liście T są znakowane zmiennymi lub stałymi indywiduowymi.
- Każdy wierzchołek T, nie będący liściem, jest znakowany termem złożonym postaci $f(t_1, \ldots, t_n)$.
- Każdy wierzchołek, który jest znakowany termem postaci $f(t_1, \ldots, t_n)$ ma dokładnie n bezpośrednich potomków, znakowanych przez $t_1, \ldots, t_n$ oraz uporządkowanych (poprzecznie) w tej właśnie kolejności.

Jeśli korzeń drzewa syntaktycznego termu T jest znakowany termem $f(t_1, \ldots, t_n)$, to mówimy, że T jest ***drzewem syntaktycznym termu*** $f(t_1, \ldots, t_n)$.

Drzewa syntaktyczne termów

- Każdy term t ma dokładnie jedno drzewo syntaktyczne.
- Jeśli T jest drzewem syntaktycznym termu bazowego, to liście T nie są znakowane zmiennymi.

Przykład drzewa syntaktycznego termu:



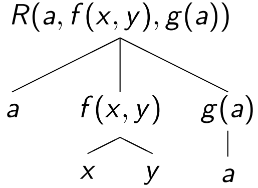
Uwaga. Drzewa syntaktyczne termów nie są, w ogólności drzewami nierozwojowymi w sensie watykańskim. Poszczególne ich wierzchołki (nie będące liśćmi) mogą mieć dowolną skończoną liczbę bezpośrednich potomków, zależną od liczby argumentów symbolu funkcyjnego występującego w danym wierzchołku.

Drzewa syntaktyczne formuł atomowych

- Przez ***szkielet drzewa syntaktycznego formuły atomowej*** rozumiemy każde znakowane drzewo rzędu skończonego o wysokości 1, którego korzeń jest znakowany formułą atomową, a liście (w porządku poprzecznym) są znakowane argumentami tej formuły. Jeśli korzeń takiego drzewa jest znakowany formułą atomową $R(t_1, \ldots, t_n)$, to jego liście są znakowane termami $t_1, \ldots, t_n$ (w porządku poprzecznym, w tej właśnie kolejności).
- Przez ***drzewo syntaktyczne formuły atomowej*** rozumiemy każde drzewo otrzymane ze szkieletu drzewa syntaktycznego formuły atomowej przez zastąpienie liści tego szkieletu drzewami syntaktycznymi termów znakujących te liście.
- Jeśli korzeń drzewa syntaktycznego formuły atomowej jest znakowany formułą $R(t_1, \ldots, t_n)$, to mówimy, że jest to ***drzewo syntaktyczne*** tej właśnie formuły.

Drzewa syntaktyczne formuł atomowych

Wprost z tej definicji wynika, że każda formuła atomowa ma dokładnie jedno drzewo syntaktyczne. Oto przykład prostego drzewa syntaktycznego formuły atomowej:



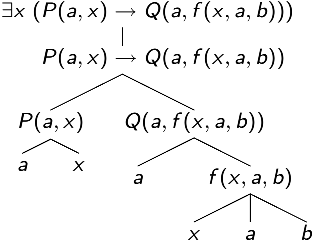
Szkielety drzew syntaktycznych formuł

Szkieletem drzewa syntaktycznego formuły nazywamy każde znakowane nierozwojowe w sensie watykańskim drzewo T z poprzecznym porządkiem wierzchołków takie, że:

- Liście T są znakowane formułami atomowymi.
- Jeśli w jest wierzchołkiem T nie będącym liściem i w ma dokładnie jednego bezpośredniego potomka znakowanego formułą α, to w jest znakowany jedną z formuł: $\neg\alpha$, $\forall x\ \alpha$ lub $\exists\ \alpha$, dla pewnej zmiennej x.
- Jeśli w jest wierzchołkiem T nie będącym liściem i w ma dokładnie dwóch bezpośrednich potomków znakowanych formułami α oraz β (w tej kolejności, w porządku poprzecznym), to w jest znakowany jedną z formuł: $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \vee \beta$, $\alpha \rightarrow \beta$ lub $\alpha \equiv \beta$.

Drzewa syntaktyczne formuł

Przez ***drzewo syntaktyczne formuły*** rozumiemy każde znakowane drzewo z poprzecznie uporządkowanymi wierzchołkami otrzymane ze szkieletu drzewa syntaktycznego formuły poprzez zastąpienie liści tego szkieletu drzewami syntaktycznymi formuł atomowych znakujących te liście.
Jeśli korzeń drzewa syntaktycznego formuły T jest znakowany formułą α, to mówimy, że T jest ***drzewem syntaktycznym formuły*** α.
Oto prosty przykład drzewa syntaktycznego formuły:



Głębokość formuły

Zauważmy, że:

- Każda formuła ma dokładnie jedno drzewo syntaktyczne.
- Jeśli korzeń szkieletu drzewa syntaktycznego jest znakowany formułą α, to wierzchołki tego szkieletu drzewa syntaktycznego są znakowane podformułami formuły α oraz termami występującymi w α.

Głębokością formuły α nazywamy wysokość jej drzewa syntaktycznego.

Niektóre dowody indukcyjne dotyczące tablic analitycznych przeprowadzane są przez indukcję właśnie po głębokości formuł.

Intuicje dotyczące metody TA

Intuicje dotyczące TA dla formuł bez kwantyfikatorów zostały podane w pierwszej części wykładu. Zakładamy, że definicje podstawowych pojęć semantycznych dla KRP są znane słuchaczom. Warunki spełniania formuł języka KRP (przez wartościowania w strukturach relacyjnych) wykorzystują stałe indywiduowe nazywające elementy uniwersum interpretacji. Odpowiadają im następujące, ***intuicyjnie*** (!) sformułowane, ustalenia:

- Gdy za prawdziwe (w ustalonej interpretacji) uznajemy zdanie postaci $\exists x \alpha(x)$, to uznamy też za prawdziwe zdanie postaci $\alpha(a)$, dla ***pewnej*** stałej indywiduowej a, oznaczającej jakiś obiekt w uniwersum tej intepretacji.
- Gdy za prawdziwe (w ustalonej interpretacji) uznamy zdanie postaci $\forall x \alpha(x)$, to uznamy też za prawdziwe wszystkie zdania postaci $\alpha(t)$, dla ***każdego*** termu bazowego oznaczającego jakiś obiekt z uniwersum tejże interpretacji.

Przypomnienie: relacja spełniania

Uwaga. Przypominamy (zobacz wykład 16), że definicja spełniania ***formuły*** w strukturze przez wartościowanie miała, dla przypadku formuł z kwantyfikatorami, postać następującą:

- $\mathfrak{M} \models_w \forall x_i\ (\alpha)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_{w_i^m} \alpha$ dla każdego $m \in M$;
- $\mathfrak{M} \models_w \exists x_i\ (\alpha)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_{w_i^m} \alpha$ dla pewnego $m \in M$.

Wartościowanie w_i^m jest ciągiem, w którym na i-tym miejscu występuje element m z uniwersum interpretacji $\mathfrak{M}$.

Dla dowolnej interpretacji $\mathfrak{M}$ w języku rachunku predykatów L niech $L^{\mathfrak{M}}$ oznacza język L, do którego dodajemy stałe indywiduowe c_m dla każdego m należącego do uniwersum interpretacji $\mathfrak{M}$. Stosujemy przy tym umowę, że interpretacją stałej c_m w strukturze $\mathfrak{M}$ jest element m.

Interpretacja termów bazowych

Określimy interpretację termów bazowych w dowolnej interpretacji $\mathfrak{M}$:

- (przypominamy, że) każda stała indywiduowa c jest interpretowana jako pewien element $c^{\mathfrak{M}}$ uniwersum struktury $\mathfrak{M}$;
- (przypominamy, że) każdy symbol funkcyjny n-argumentowy f jest interpretowany jako pewna n-argumentowa funkcja $f^{\mathfrak{M}}$ określona na uniwersum struktury $\mathfrak{M}$ i o wartościach w tym uniwersum;
- jeśli $t_1, \ldots, t_n$ są termami bazowymi, a f jest n-argumentowym symbolem funkcyjnym, to interpretacją termu bazowego $f(t_1, \ldots, t_n)$ jest $f^{\mathfrak{M}}(t_1^{\mathfrak{M}}, \ldots, t_n^{\mathfrak{M}})$.

Jeśli każdy element interpretacji $\mathfrak{M}$ jest wartością jakiegoś termu bazowego z L, to można indukcyjnie określić relację $\models$ ***spełniania zdań języka*** L ***w interpretacji*** $\mathfrak{M}$ w następujący sposób (tu $R^{\mathfrak{M}}$ jest relacją będącą interpretacją n-argumentowego predykatu R w $\mathfrak{M}$, a $t^{\mathfrak{M}}$ jest interpretacją termu t w $\mathfrak{M}$):

Spełnianie zdań

- $\mathfrak{M} \models R(t_1, \ldots, t_n)$ wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi $R^{\mathfrak{M}}(t_1^{\mathfrak{M}}, \ldots, t_n^{\mathfrak{M}})$;
- $\mathfrak{M} \models (\alpha) \wedge (\beta)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models \alpha$ oraz $\mathfrak{M} \models \beta$;
- $\mathfrak{M} \models (\alpha) \vee (\beta)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models \alpha$ lub $\mathfrak{M} \models \beta$;
- $\mathfrak{M} \models (\alpha) \rightarrow (\beta)$ wtedy i tylko wtedy, gdy nie zachodzi $\mathfrak{M} \models \alpha$ lub zachodzi $\mathfrak{M} \models \beta$;
- $\mathfrak{M} \models \neg(\alpha)$ wtedy i tylko wtedy, gdy nie zachodzi $\mathfrak{M} \models \alpha$;
- $\mathfrak{M} \models \forall x_i \, (\alpha)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models \alpha(x_i/t)$ dla każdego termu bazowego t;
- $\mathfrak{M} \models \exists x_i \, (\alpha)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models \alpha(x_i/t)$ dla pewnego termu bazowego t.

Formuła $\alpha(x_i/t)$ powstaje z formuły α przez zastąpienie wolnych wystąpień zmiennej x_i termem t.

Spełnianie zdań

Jeśli nie każdy element interpretacji $\mathfrak{M}$ jest wartością jakiegoś termu bazowego z L, to powyższą definicję formułujemy w języku $L^{\mathfrak{M}}$.

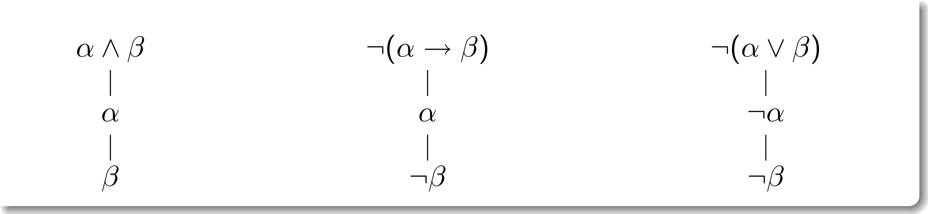
Uwaga. Podobnie jak w przypadku KRZ, używanie pojęć semantycznych dla wyrażenia intuicji dotyczących tablic analitycznych w KRP jest jedynie ***chwytem reklamowym***. Metoda tablic analitycznych dla KRP jest metodą czysto ***syntaktyczną***. Jej związek z pojęciami semantycznymi ustalają twierdzenia o trafności i pełności.

Tablice atomowe

Niech α oraz β będą dowolnymi formułami, a γ dowolną formułą atomową języka KRP. ***Tablicami atomowymi*** są wszystkie drzewa (znakowane) jednej z trzynastu poniższych postaci:

$$\gamma \qquad\qquad \neg\gamma \qquad\qquad \begin{array}{c} \neg\neg\alpha \\ | \\ \alpha \end{array}$$

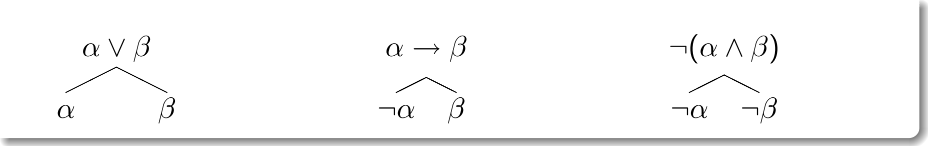
Tablice atomowe



$\alpha \wedge \beta$ — α — β

$\neg(\alpha \rightarrow \beta)$ — α — $\neg\beta$

$\neg(\alpha \vee \beta)$ — $\neg\alpha$ — $\neg\beta$



$\alpha \vee \beta$: α | β

$\alpha \rightarrow \beta$: $\neg\alpha$ | β

$\neg(\alpha \wedge \beta)$: $\neg\alpha$ | $\neg\beta$

Tablice atomowe

(∀)

$$\begin{array}{c}\forall x\ \alpha(x)\\ | \\ \alpha(x/a)\end{array}$$

dla każdego termu
bazowego a

(∃)

$$\begin{array}{c}\exists x\ \alpha(x)\\ | \\ \alpha(x/a)\end{array}$$

dla każdej
nowej stałej a

(¬∀)

$$\begin{array}{c}\neg\forall x\ \alpha(x)\\ | \\ \neg\alpha(x/a)\end{array}$$

dla każdej
nowej stałej a

(¬∃)

$$\begin{array}{c}\neg\exists x\ \alpha(x)\\ | \\ \neg\alpha(x/a)\end{array}$$

dla każdego termu
bazowego a

Tablice atomowe

Przypominamy, że term bazowy to term bez zmiennych.

Gdy mówimy w warunkach ($\exists$) oraz ($\neg\forall$) o ***nowych*** stałych, to mamy na myśli stałe nie występujące w formule z korzenia rozważanej tablicy atomowej.

Przypomnijmy (zob. wykłady 16–17), że rozważamy język KRP, w których jest przeliczalnie wiele stałych indywiduowych.

Dla dowolnej formuły języka KRP można zatem znaleźć stałą, która w tej formule nie występuje.

Tablice analityczne

Definicja ***tablic analitycznych*** jest indukcyjna:

- (a) Każda tablica atomowa jest tablicą analityczną.
- (b) Jeśli D jest tablicą analityczną, P jest gałęzią w D zawierającą wierzchołek (znakowany przez) α, to również $D \sqcup_{P_\mho} D_\alpha$ jest tablicą analityczną.
- (c) Jeśli $D_0, D_1, D_2, \ldots, D_n, \ldots$ jest ciągiem tablic analitycznych takim, że D_{n+1} powstaje z D_n (dla $n \geqslant 0$) przez zastosowanie kroku (2), to $\bigsqcup D_n$ jest tablicą analityczną.

Operacje $\sqcup_{P_\mho}$ oraz $\bigsqcup$ były objaśnione w definicji TA dla KRZ.

Tablice analityczne

Uwaga. Obowiązują oczywiście uwagi dotyczące nowych stałych, podane po definicji tablic atomowych.
Jeśli D jest tablicą analityczną, to przez L^D rozumiemy język rachunku predykatów, w którym mamy stałe indywiduowe dla wszystkich nowych stałych, wprowadzonych w trakcie konstrukcji tablicy D.

Uwaga. W przypadku KRP jest istotne, że krok (b) w definicji tablicy analitycznej każe przyłączać do ustalonej gałęzi ***całą*** (a więc łącznie z korzeniem) tablicę atomową. Ma to mianowicie istotne znaczenie w przypadku wystąpień formuł generalnie skwantyfikowanych oraz negacji formuł egzystencjalnie skwantyfikowanych. Rzecz wyjaśnimy dokładniej w przykładach poniżej.

Tablice analityczne

Uwaga. W definicji tablic analitycznych dla KRP są też istotne ***wystąpienia*** formuł w tablicach. Definicja tablic analitycznych powinna właściwie uwzględniać ***funkcję znakującą***.

Tablice analityczne (w tym oczywiście tablice atomowe) powinny być, dla pełnej precyzji, definiowane jako pary (D, f), gdzie D jest tablicą otrzymaną na mocy któregoś z warunków (a)–(c) powyższej definicji, a f jest funkcją ze zbioru wierzchołków drzewa D w zbiór F_{KRP} wszystkich formuł języka KRP.

Rezygnujemy z tej pedanterii. Będziemy korzystać ze znakowania wierzchołków tablicy analitycznej formułami języka KRP, uznając, że w każdym przypadku dane jest *implicite* znakowanie wierzchołków formułami.

Tablice analityczne

Budowanie tablic analitycznych będzie polegało na przedłużaniu gałęzi o drzewa atomowe. Dla zamykania gałęzi istotne będzie, jakie stałe indywiduowe bądź termy bazowe występują na tych gałęziach. Reguły ($\forall$) oraz ($\neg\exists$) (z definicji tablic atomowych) pozwalają na posłużenie się dowolnym termem bazowym.

W praktyce, wygodne jest uważanie tablic atomowych dla formuł skwantyfikowanych oraz negacji formuł skwantyfikowanych za wyliczone przez następujące ***reguły*** (odniesienie do ***gałęzi*** w poniższych regułach oznacza gałąź, na której znajduje się formuła z korzenia rozważanej tablicy atomowej):

Tablice analityczne

- ***Reguła dla formuł generalnie skwantyfikowanych:***

$$R(\forall) \qquad \begin{array}{c} \forall x\ \alpha(x) \\ | \\ \alpha(x/t) \end{array}$$

dla każdego termu bazowego t występującego na rozważanej gałęzi.

- ***Reguła dla formuł egzystencjalnie skwantyfikowanych:***

$$R(\exists) \qquad \begin{array}{c} \exists x\ \alpha(x) \\ | \\ \alpha(x/a) \end{array}$$

dla nowej stałej indywiduowej a nie występującej dotąd na rozważanej gałęzi.

Tablice analityczne

- *Reguła dla negacji formuł generalnie skwantyfikowanych:*

$R(\neg\forall)$

$$\begin{array}{c} \neg\forall x\ \alpha(x) \\ | \\ \neg\alpha(x/a) \end{array}$$

dla nowej stałej indywiduowej a nie występującej dotąd na rozważanej gałęzi.

- *Reguła dla negacji formuł egzystencjalnie skwantyfikowanych:*

$R(\neg\exists)$

$$\begin{array}{c} \neg\exists x\ \alpha(x) \\ | \\ \neg\alpha(x/t) \end{array}$$

dla każdego termu bazowego t występującego na rozważanej gałęzi.

Tablice analityczne

Reguły $R(\forall)$ oraz $R(\neg\exists)$ są wzmocnione dodatkowym warunkiem: jeśli na gałęzi, której dotyczy ich zastosowanie nie ma jeszcze żadnej stałej indywiduowej, to posługujemy się jakąś z góry ustaloną stałą.

Uwaga. Każda stała indywiduowa jest termem bazowym. Reguły $R(\forall)$ oraz $R(\neg\exists)$ stosują się zatem również w odniesieniu do dowolnych stałych indywiduowych.

Powyższe reguły polegają więc na stosowaniu następujących zasad:

Tablice analityczne

- $R(\forall)$. Jeśli w danej gałęzi tablicy analitycznej wystąpiła formuła postaci $\forall x\, \alpha(x)$, to na tejże gałęzi umieszczamy wszystkie formuły postaci $\alpha(t)$, dla każdego termu bazowego t występującego na rozważanej gałęzi.
- $R(\exists)$. Jeśli w danej gałęzi tablicy analitycznej wystąpiła formuła postaci $\exists x\, \alpha(x)$, to na tejże gałęzi umieszczamy formułę postaci $\alpha(a)$, gdzie a jest nową stałą indywiduową, nie występującą dotąd na rozważanej gałęzi.
- $R(\neg\forall)$. Jeśli w danej gałęzi tablicy analitycznej wystąpiła formuła postaci $\neg\forall x\, \alpha(x)$, to na tejże gałęzi umieszczamy formułę postaci $\neg\alpha(a)$, gdzie a jest nową stałą indywiduową, nie występującą dotąd na rozważanej gałęzi.
- $R(\neg\exists)$. Jeśli w danej gałęzi tablicy analitycznej wystąpiła formuła postaci $\neg\exists x\, \alpha(x)$, to na tejże gałęzi umieszczamy wszystkie formuły postaci $\neg\alpha(t)$, dla każdego termu bazowego t występującego na rozważanej gałęzi.

Tablice analityczne

W przypadku drugiej i trzeciej z wymienionych wyżej reguł mówimy o ***wprowadzaniu nowej stałej indywiduowej*** (i opuszczaniu kwantyfikatora egzystencjalnego lub zanegowanego kwantyfikatora generalnego).

W przypadku pierwszej i czwartej z wymienionych reguł mówimy o ***rozwijaniu formuły generalnie skwantyfikowanej*** ze względu na dany term bazowy [na daną stałą indywiduową] (oraz opuszczaniu kwantyfikatora generalnego lub zanegowanego kwantyfikatora egzystencjalnego).

Tablice analityczne

Budując tablice analityczne w KRP najpierw rozważamy formuły egzystencjalnie skwantyfikowane i wprowadzamy nowe stałe indywiduowe, następnie dla wszystkich formuł generalnie skwantyfikowanych umieszczamy na danej gałęzi odpowiednie formuły otrzymane poprzez opuszczenie kwantyfikatora generalnego (lub negacji kwantyfikatora egzystencjalnego) i zastąpienie wiązanej przezeń zmiennej każdą stałą indywiduową występującą na tej gałęzi.

Jeśli nie mamy do dyspozycji żadnej formuły egzystencjalnie skwantyfikowanej, a mamy jakieś formuły generalnie skwantyfikowane (lub negacje egzystencjalnie skwantyfikowanych), to wprowadzamy nowe stałe indywiduowe przez rozwinięcie dowolnej formuły generalnie skwantyfikowanej (lub negacji egzystencjalnie skwantyfikowanej).

Jeśli w formule dla której zaczynamy budować tablicę analityczną występują już jakieś termy bazowe (w szczególności, stałe indywiduowe), to oczywiście obowiązują dla nich reguły $R(\forall)$ oraz $R(\neg\exists)$.

Tablice analityczne ze zbioru założeń

Metodę TA można stosować nie tylko w odniesieniu do pojedynczych formuł, lecz również biorąc pod uwagę dowolne (w tym także nieskończone) zbiory formuł.

Niech S będzie zbiorem zdań języka KRP. ***Tablice analityczne ze zbioru S*** są zdefiniowane przez warunki (a), (b) i (c) definicji tablic analitycznych oraz dodatkowy warunek:

- (b*) Jeśli D jest tablicą analityczną ze zbioru założeń S, P gałęzią w D oraz $\alpha \in S$, to $D \sqcup_P \alpha$ jest tablicą analityczną ze zbioru założeń S.

Zbiór założeń może być też pusty — wtedy powyższa definicja redukuje się do poprzedniej.

Tablice sprzeczne

- Niech D będzie tablicą analityczną ze zbioru założeń S i niech P będzie gałęzią w D. Mówimy, że P jest ***sprzeczna***, gdy w P występuje para formuł wzajem sprzecznych, tj. formuły α oraz $\neg\alpha$, dla pewnej α.
- Tablica analityczna D jest ***sprzeczna***, gdy każda gałąź w D jest sprzeczna.

Zamiast terminu: *gałąź sprzeczna* używa się też terminu: ***gałąź zamknięta***. Gdy gałąź nie jest zamknięta, to mówimy też, że jest ***gałęzią otwartą***.
Zamiast terminu: *tablica sprzeczna* używa się też terminu: ***tablica zamknięta***. Gdy tablica analityczna D zawiera co najmniej jedną gałąź otwartą, to mówimy też, że D jest ***otwarta***.

Dowody tablicowe

Dowodem tablicowym formuły α ze zbioru założeń S nazywamy każdą sprzeczną tablicę analityczną ze zbioru S o korzeniu $\neg\alpha$. Jeśli istnieje dowód tablicowy formuły α ze zbioru założeń S, to piszemy $S \vdash_{tab} \alpha$. Jeśli $S \vdash_{tab} \alpha$, to mówimy także, że α jest ***tablicowo wyprowadzalna (dowodliwa) z S***.

Jeśli α jest wyprowadzalna z pustego zbioru założeń, to piszemy $\vdash_{tab} \alpha$ i mówimy, że α jest ***tablicowo wyprowadzalna*** (***dowodliwa***) w KRP.

Zauważmy, że jeśli istnieje dowód tablicowy D formuły α ze zbioru założeń S, to istnieje także ***skończony*** dowód tablicowy α z S: wystarczy ***zamknąć*** każdą gałąź w D z chwilą wystąpienia na niej pary formuł wzajem sprzecznych.

Konsekwencja tablicowa

Operację C_{tab} konsekwencji tablicowej w KRP definiujemy następująco, dla dowolnego zbioru formuł X:

$$C_{tab}(X) = \{\alpha : X \vdash_{tab} \alpha\}.$$

Tak określona operacja C_{tab} spełnia warunki (C1)–(C4) z definicji ogólnej operacji konsekwencji.

Zbiory tablicowo sprzeczne

Zbiór formuł S języka KRP jest ***tablicowo sprzeczny***, gdy $S \vdash_{tab} \alpha \wedge \neg\alpha$ dla pewnego zdania α języka KRP. W przeciwnym przypadku S jest ***tablicowo niesprzeczny***.

Niech $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ będzie wyliczeniem wszystkich termów bazowych rozważanego języka KRP. Oczywiście wszystkie stałe indywiduowe $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ są elementami tego wyliczenia. Będziemy zakładać, że te wyliczenia określają ustalone porządki liniowe w zbiorze wszystkich termów bazowych oraz w zbiorze wszystkich stałych indywiduowych.

W poniższych definicjach zakłada się też, że dana jest jakaś funkcja znakująca wierzchołki tablic analitycznych formułami.

Zredukowane wystąpienia formuł

Niech $D = \bigsqcup D_n$ będzie tablicą analityczną ze zbioru założeń S, a P gałęzią w D. Niech (v, α) będzie i-tym wystąpieniem α w P. Mówimy, że wystąpienie (v, α) jest ***zredukowane*** w P, gdy zachodzi jeden z następujących przypadków:

- α nie jest ani postaci $\forall x\, \beta(x)$ ani postaci $\neg\exists x\, \beta(x)$ i dla pewnego j tablica D_{j+1} otrzymana jest z tablicy D_j przez zastosowanie reguły (b) z definicji tablic analitycznych do α oraz stosownego odcinka początkowego P, tj. $D_{j+1} = D_j \sqcup_{Q_\mho} D_\alpha$, gdzie $Q = P \cap |D_j|$ oraz $Q_\mho = v$;
- lub:
  - α jest postaci $\forall x\, \beta(x)$ i $\beta(t_i)$ występuje w P oraz w P istnieje $i + 1$-sze wystąpienie α
  - α jest postaci $\neg\exists x\, \beta(x)$ i $\neg\beta(t_i)$ występuje w P oraz w P istnieje $i + 1$-sze wystąpienie α.

Tablice zakończone

- Tablica analityczna D jest ***zakończona***, jeśli każde wystąpienie każdej formuły na każdej gałęzi otwartej jest zredukowane.
- Tablica analityczna D ze zbioru założeń S jest ***zakończona***, jeśli każde wystąpienie każdej formuły na każdej gałęzi otwartej jest zredukowane i dla każdej αinS formuła α występuje na każdej gałęzi otwartej w D.
- Tablice analityczne, które nie są zakończone nazywamy ***niezakończonymi***.

Zanim zdefiniujemy tablice systematyczne przypomnijmy, że wierzchołki każdego drzewa można uporządkować liniowo (wzdłużnie lub poprzecznie). W następnej definicji wykorzystamy (kanoniczny) poprzeczny porządek wierzchołków. Przypomnijmy, że jest on jednoznacznie określony przez kolejność wierzchołków (lewa gałąź, prawa gałąź) w tablicach atomowych.

Tablice systematyczne

Niech α będzie zdaniem języka KRP. ***Systematyczną tablicę analityczną*** $D(\alpha) = \bigsqcup D^n(\alpha)$ dla α budujemy w sposób następujący:

Krok początkowy.

Tablica $D^0(\alpha)$ jest tablicą atomową dla α. W przypadkach $(\forall)$ oraz $(\neg\exists)$ korzystamy z termu bazowego t_1, a w przypadkach $(\exists)$ i $(\neg\forall)$ korzystamy ze stałej a_i dla pierwszego dostępnego i (tj. w tym przypadku takiego, że a_i nie występuje w α). Wtedy oczywiście (jedyne) wystąpienie α w $D^0(\alpha)$ jest zredukowane.

Tablice systematyczne

Krok następnikowy.
Przypuśćmy, że tablica $D^n(\alpha)$ została skonstruowana. Jeśli każde wystąpienie α w $D^n(\alpha)$ jest zredukowane, to kończymy konstrukcję i $D(\alpha) = \bigsqcup D^n(\alpha)$ jest tablicą systematyczną dla α.

W przeciwnym przypadku, niech v będzie pierwszym (w porządku poprzecznym) wierzchołkiem takim, że dla pewnej formuły β wystąpienie (v, β) nie jest zredukowane na pewnej otwartej gałęzi P tablicy $D^n(\alpha)$. Tablicę $D^{n+1}(\alpha)$ budujemy wykorzystując jeden z następujących (wzajem się wykluczających) przypadków:

Tablice systematyczne

- Jeśli β nie jest ani postaci $\forall x\, \gamma(x)$ ani postaci $\neg\exists x\, \gamma(x)$, to $D^{n+1}(\alpha) = \bigsqcup(D^n(\alpha) \sqcup_P D_\beta)$, gdzie suma $\bigsqcup$ brana jest po wszystkich gałęziach otwartych P w $D^n(\alpha)$, zawierających wystąpienie (v, β). [Przypominamy, że D_β jest tablicą atomową o korzeniu (znakowanym przez) β.] Jeśli β jest postaci $\exists x\, \gamma(x)$ lub postaci $\neg\forall x\, \gamma(x)$, to korzystamy ze stałej a_j o najmniejszym dostępnym numerze.
- W przeciwnym przypadku:
  - Jeśli β jest postaci $\forall x\, \gamma(x)$ i (v, β) jest i-tym wystąpieniem β w P, to $D^{n+1}(\alpha) = \bigsqcup(D^n(\alpha) \sqcup_P D_\beta^{t_i})$, gdzie suma $\bigsqcup$ brana jest po wszystkich gałęziach otwartych P w $D^n(\alpha)$, zawierających wystąpienie (v, β), a drzewo $D_\beta^{t_i}$ składa się jedynie z korzenia β oraz liścia $\gamma(t_i)$.
  - Jeśli β jest postaci $\neg\exists x\, \gamma(x)$ i (v, β) jest i-tym wystąpieniem β w P, to $D^{n+1}(\alpha) = \bigsqcup(D^n(\alpha) \sqcup_P D_\beta^{t_i})$, gdzie suma $\bigsqcup$ brana jest po wszystkich gałęziach otwartych P w $D^n(\alpha)$, zawierających wystąpienie (v, β), a drzewo $D_\beta^{t_i}$ składa się jedynie z korzenia β oraz liścia $\neg\gamma(t_i)$.

Tablice systematyczne

Krok graniczny.
W granicy bierzemy sumę: $D(\alpha) = \bigsqcup D^n(\alpha)$.

Tablicę systematyczną zdania α ze zbioru założeń S, oznaczaną przez $D(S, \alpha) = \bigsqcup D^n(S, \alpha)$ budujemy w sposób następujący:

- W krokach parzystych ($n = 2k$) postępujemy, jak w definicji tablic systematycznych
- W krokach nieparzystych ($n = 2k + 1$) $D^{n+1}(S, \alpha) = \bigsqcup(D^n(S, \alpha) \sqcup_P \alpha_k)$, gdzie suma $\bigsqcup$ brana jest po wszystkich gałęziach otwartych w $D^n(S, \alpha)$, a α_k jest k-tym elementem zbioru S (zakładamy, że S jest liniowo uporządkowany).
- Kontynuujemy tę konstrukcję tak długo, aż wszystkie elementy zbioru S zostaną uwzględnione.
- $D(S, \alpha) = \bigsqcup D^n(S, \alpha)$.

Tablice systematyczne

Chociaż tablice systematyczne są, w ogólności, drzewami nieskończonymi, to — jak udowodnimy niżej — są one zawsze tablicami zakończonymi.

Pora na ilustrację wprowadzonych konstrukcji przykładami.
Dla celów praktycznych konieczne jest ustalenie jakiejś notacji.
Proponowana poniżej jest nieco nadmiarowa, ale sądzimy, że jest przyjazna dla czytelnika.

Doświadczenia dydaktyczne ostatnich lat pokazują, że odbiorcami naszej posługi dydaktycznej są teraz dzieci z pokolenia ***ikonicznego***, do których łatwiej docierają obrazki i rysunki niż np. notacja algebraiczna.

TA dla KRP: notacja

Stosować będziemy następującą umowę notacyjną w graficznych reprezentacjach tablic analitycznych:

- $^{\surd}a$ oznacza opuszczenie kwantyfikatora egzystencjalnego (bądź negacji kwantyfikatora generalnego) i wprowadzenie w formule za tym kwantyfikatorem (odpowiednio, w negacji formuły) nowej stałej indywiduowej a w miejsce zmiennej wiązanej przez ten kwantyfikator;
- $^{\star}a$ oznacza zastąpienie formuły generalnie skwantyfikowanej (lub negacji formuły egzystencjalnie skwantyfikowanej) przez formułę bez kwantyfikatora generalnego (odpowiednio, negację formuły), ze stałą indywiduową a wstawioną w miejsce zmiennej wiązanej przez ten kwantyfikator; notację $^{\star}t$ stosujemy też, ogólniej, dla dowolnego termu bazowego t;

TA dla KRP: notacja

- numery (z kropką) umieszczane w górnej frakcji po prawej stronie formuł informują o kolejności wykonywanych działań; po kropce występuje symbol spójnika (bądź negacji spójnika) do którego stosujemy odnośną regułę (z reguł budowania tablic analitycznych w KRZ) lub symbole $^{\surd}$ albo * wraz z termem bazowym (w szczególności, ze stałą indywiduową), których dotyczą;
- numery (w nawiasach) po lewej stronie formuł informują o wynikach wykonywanych działań; formuły z pnia drzewa, które nie powstały w wyniku stosowania żadnych reguł otrzymują numery 0.1, 0.2, 0.3, . . .;
- gałąź zamkniętą oznaczamy liściem $\times_{n,m}$, gdzie (n) oraz (m) są numerami formuł wzajem sprzecznych, występujących na tej gałęzi;
- gałęzie otwarte oznaczamy liściem $\circ$; jeśli mamy więcej gałęzi otwartych, to liście te kolejno numerujemy; czasem używamy też np. symboli $\clubsuit$, $\diamondsuit$, $\heartsuit$ oraz $\spadesuit$ (ewentualnie z indeksami numerycznymi) na oznaczenie gałęzi otwartych.

TA dla KRP: notacja

Przypomnijmy, że przez ***pień*** drzewa rozumiemy część wspólną wszystkich jego gałęzi.
Tak więc, symbol $^{\surd}$ dotyczy zastosowań reguł $R(\exists)$ oraz $R(\neg\forall)$, natomiast symbol * zastosowań reguł $R(\forall)$ oraz $R(\neg\exists)$.

Zilustrujmy podane wyżej reguły oraz umowę przykładami. We wszystkich tych przykładach kolejne kroki budowania tablic analitycznych wyliczane są przez komentarze (z prawej strony, w górnej frakcji) opatrzone numerami z kropką; wyniki wykonania tych kroków są numerowane z lewej strony, numery otrzymanych formuł podawane są w nawiasach.

Śledzenie budowy tablicy analitycznej sprowadza się do obserwowania kolejności wykonywanych kroków (z prawej strony formuł) i otrzymywanych wyników (z lewej strony formuł).

TA dla KRP: notacja

Stosowanie reguł dających rozgałęzienia (np. $R(\rightarrow)$, $R(\neg\wedge)$ daje w wyniku dwie formuły; będziemy wtedy używać numerów (w nawiasach) z indeksami dolnymi: l (dla lewej formuły) oraz p (dla prawej formuły).
W przypadku reguł bez rozgałęzień dających dwie formuły (np. $R(\wedge)$, $R(\neg\rightarrow)$ otrzymane formuły numerować będziemy numerami z indeksami dolnymi g (dla pierwszej, górnej formuły) oraz d (dla drugiej, dolnej formuły).
Reguły nie powodujące rozgałęzień i dające w wyniku jedną formułę (czyli $R(\neg\neg)$, $R(\forall)$, $R(\neg\exists)$) nie wymagają sztuczek z indeksami.
Wreszcie, reguły $R(\equiv)$ oraz $R(\neg\equiv)$ dają w rezultacie cztery formuły, numerowane liczbami z indeksami dolnymi: lg, ld, pg oraz pd (odpowiednio: lewa górna, lewa dolna, prawa górna, prawa dolna).

Najpierw będziemy rozważać przykłady w języku KRP bez symboli funkcyjnych.

Przykład 1: tworzenie tablicy analitycznej

Pokażemy, krok po kroku, jak tworzymy tablicę analityczną. Wybierzmy proste zdanie:

$$(\exists x\ P(x) \rightarrow \exists y\ Q(y)) \rightarrow \exists x\ (P(x) \rightarrow Q(x)).$$

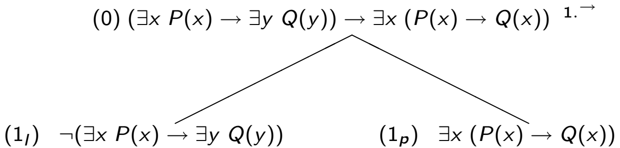
Umieszczamy formułę w korzeniu tablicy:

$$(0)\ (\exists x\ P(x) \rightarrow \exists y\ Q(y)) \rightarrow \exists x\ (P(x) \rightarrow Q(x))$$

Przykład 1: tworzenie tablicy analitycznej

Jest to implikacja, a więc stosujemy regułę dotyczącą tego spójnika, dającą w rezultacie rozgałęzienie. Zastosowanie reguły dotyczącej implikacji zaznaczamy z prawej strony formuły, której to zastosowanie dotyczy, przy numerze kroku, który tym samym wykonujemy. Formuły otrzymane w rezultacie wykonania tego kroku opatrujemy numerami w nawiasach z lewej strony, jeśli potrzeba, to z indeksami. W rozważanym przypadku z prawej strony formuły, od której zaczęliśmy umieszczamy komentarz $^{1.\rightarrow}$, który możemy odczytać: w kroku pierwszym stosujemy regułę dotyczącą implikacji do formuły z lewej strony komentarza. Otrzymujemy, zgodnie ze stosowaną regułą, zaprzeczony poprzednik implikacji (formuła w gałęzi lewej, o numerze (1_l)) oraz, w gałęzi prawej, następnik tej implikacji (formuła o numerze (1_p)):

Przykład 1: tworzenie tablicy analitycznej



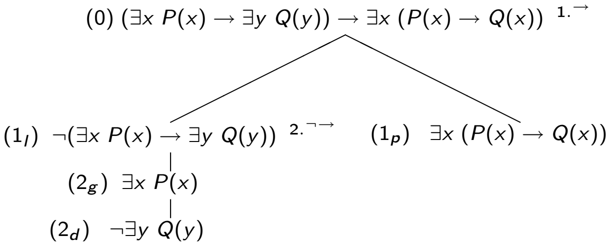
(0) $(\exists x\ P(x) \rightarrow \exists y\ Q(y)) \rightarrow \exists x\ (P(x) \rightarrow Q(x))$ $^{1.\rightarrow}$

(1_l) $\neg(\exists x\ P(x) \rightarrow \exists y\ Q(y))$

(1_p) $\exists x\ (P(x) \rightarrow Q(x))$

Zajmiemy się najpierw gałęzią lewą. Formuła o numerze (1_l) jest zaprzeczoną implikacją, a więc zastosowanie odpowiedniej reguły (co zaznaczamy pisząc w komentarzu z prawej strony $^{2.\neg\rightarrow}$) daje w wyniku dwie formuły: poprzednik tej implikacji (formuła o numerze (2_g)) oraz jej zaprzeczony następnik (formuła o numerze (2_d)), umieszczone jedna pod drugą na rozważanej gałęzi:

Przykład 1: tworzenie tablicy analitycznej



$(0)\ (\exists x\ P(x) \rightarrow \exists y\ Q(y)) \rightarrow \exists x\ (P(x) \rightarrow Q(x))$ $^{1.\rightarrow}$

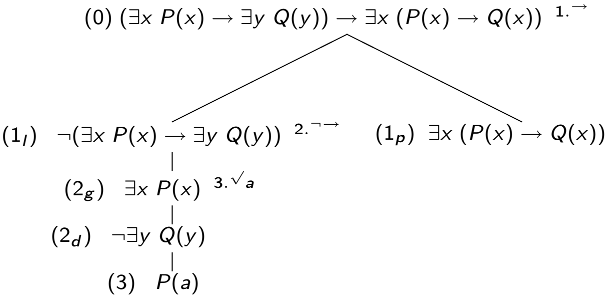
$(1_l)\ \neg(\exists x\ P(x) \rightarrow \exists y\ Q(y))$ $^{2.\neg\rightarrow}$ $(1_p)\ \exists x\ (P(x) \rightarrow Q(x))$

$(2_g)\ \exists x\ P(x)$

$(2_d)\ \neg\exists y\ Q(y)$

Formuła o numerze (2_g) jest formułą egzystencjalnie skwantyfikowaną, możemy więc zastosować do niej regułę dotyczącą wprowadzania nowych stałych indywiduowych; zaznaczamy wykonanie kroku trzeciego pisząc z lewej strony formuły o numerze (2_g) komentarz $^{3.\surd a}$ (wprowadzenie nowej stałej indywiduowej a) i otrzymując w rezultacie formułę o numerze (3):

Przykład 1: tworzenie tablicy analitycznej



(0) $(\exists x\, P(x) \rightarrow \exists y\, Q(y)) \rightarrow \exists x\, (P(x) \rightarrow Q(x))$ $^{1.\rightarrow}$

(1_l) $\neg(\exists x\, P(x) \rightarrow \exists y\, Q(y))$ $^{2.\neg\rightarrow}$

(1_p) $\exists x\, (P(x) \rightarrow Q(x))$

(2_g) $\exists x\, P(x)$ $^{3.\surd a}$

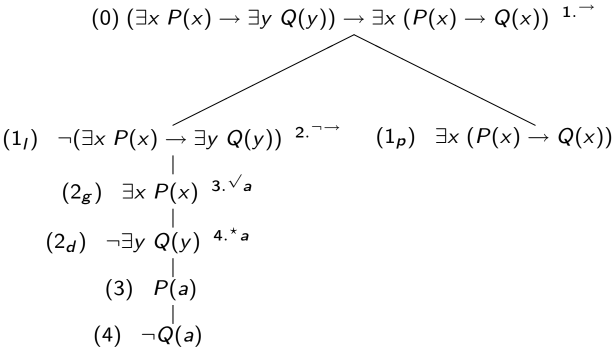
(2_d) $\neg\exists y\, Q(y)$

(3) $P(a)$

Względem nowowprowadzonej stałej indywiduowej *a* należy rozwinąć (tzn. zastosować regułę opuszczania kwantyfikatora generalnego lub zanegowanego kwantyfikatora egzystencjalnego) wszystkie formuły generalnie skwantyfikowane lub zaprzeczenia wszystkich formuł egzystencjalnie skwantyfikowanych znajdujących się na rozpatrywanej gałęzi. Tu mamy formułę o numerze (2_d), która jest zaprzeczeniem formuły generalnie skwantyfikowanej.

Przykład 1: tworzenie tablicy analitycznej

Krok czwarty polega więc na zastosowaniu odnośnej reguły, tj. $R(\neg\forall)$ i zapisaniu komentarza $^{4.\star a}$ z prawej strony formuły, do której reguła jest stosowana. Otrzymujemy w ten sposób formułę o numerze (4):



$(0)\ (\exists x\, P(x) \rightarrow \exists y\, Q(y)) \rightarrow \exists x\, (P(x) \rightarrow Q(x))\ ^{1.\rightarrow}$

$(1_l)\ \neg(\exists x\, P(x) \rightarrow \exists y\, Q(y))\ ^{2.\neg\rightarrow}$

$(1_p)\ \exists x\, (P(x) \rightarrow Q(x))$

$(2_g)\ \exists x\, P(x)\ ^{3.\surd a}$

$(2_d)\ \neg\exists y\, Q(y)\ ^{4.\star a}$

$(3)\ P(a)$

$(4)\ \neg Q(a)$

Przykład 1: tworzenie tablicy analitycznej

To kończy budowanie lewej gałęzi drzewa; do znajdujących się na niej formuł nie można już zastosować żadnej z reguł, które mamy do dyspozycji.

Uwaga. Stosujemy w tym momencie dwa uproszczenia, które będziemy także konsekwentnie stosować wszędzie dalej.

1. Po pierwsze, powinniśmy dopisać do tej gałęzi nie tylko formułę $\neg Q(a)$, ale także raz jeszcze formułę $\neg\exists y\, Q(y)$, a dokładniej, powinniśmy przedłużyć gałąź o drzewo:

$$\begin{array}{c} \neg\exists y\; Q(y) \\ | \\ \neg Q(a) \end{array}$$

zgodnie z definicją (budowania) tablicy analitycznej. Dla prostoty, zamiast wykonania tej procedury, dopisujemy do rozważanej gałęzi jedynie formułę $\neg Q(a)$.

Przykład 1: tworzenie tablicy analitycznej

2. Po drugie, z czysto teoretycznego punktu widzenia, jeśli na gałęzi jest formuła generalnie skwantyfikowana, lub — jak to właśnie ma miejsce w rozważanym przypadku — zanegowana formuła egzystencjalnie skwantyfikowana $\neg\exists y\, Q(y)$, to do tej gałęzi dopisać należałoby wszystkie formuły postaci $\neg Q(t)$, gdzie t jest dowolnym termem bazowym, a dokładniej, do tej gałęzi dołączyć należałoby wszystkie drzewa atomowe postaci:

$$\begin{array}{c}\neg\exists y\, Q(y)\\ | \\ \neg Q(t)\end{array}$$

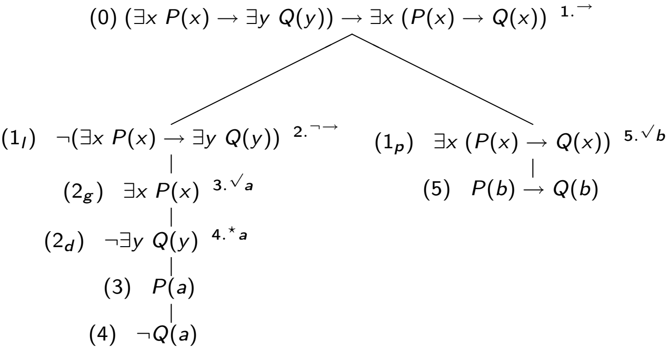
gdzie t jest dowolnym termem bazowym. Zarówno w rozważanym tu przypadku, jak i wszędzie dalej, będziemy konsekwentnie stosować również to drugie opisane tu uproszczenie: ograniczamy się do dopisania jedynie formuły $\neg Q(a)$, gdyż a jest jedyną stałą na rozważanej gałęzi, względem której stosować można regułę $R(\neg\exists)$ do formuły $\neg\exists y\, Q(y)$.

Przykład 1: tworzenie tablicy analitycznej

Jak postępować, gdy na rozważanej gałęzi jest zdanie generalnie skwantyfikowane (lub zanegowane zdanie egzystencjalnie skwantyfikowane) oraz ***więcej niż jedna*** stała indywiduowa (lub, ogólniej, term bazowy), zobaczymy w jednym z następnych przykładów.

Zwinnie przeskakujemy teraz na gałąź prawą. Formuła o numerze (1_p) jest egzystencjalnie skwantyfikowana, stosujemy więc do niej regułę $R(\exists)$ dotyczącą opuszczania kwantyfikatora egzystencjalnego i wprowadzania nowej stałej indywiduowej. Ten, piąty krok zaznaczamy pisząc komentarz $^{5.\surd b}$ z prawej strony formuły o numerze (1_p) i otrzymujemy w rezultacie formułę o numerze (5):

Przykład 1: tworzenie tablicy analitycznej



(0) $(\exists x\, P(x) \rightarrow \exists y\, Q(y)) \rightarrow \exists x\, (P(x) \rightarrow Q(x))$ $^{1.\rightarrow}$

(1_l) $\neg(\exists x\, P(x) \rightarrow \exists y\, Q(y))$ $^{2.\neg\rightarrow}$

(2_g) $\exists x\, P(x)$ $^{3.\surd a}$

(2_d) $\neg\exists y\, Q(y)$ $^{4.\star a}$

(3) $P(a)$

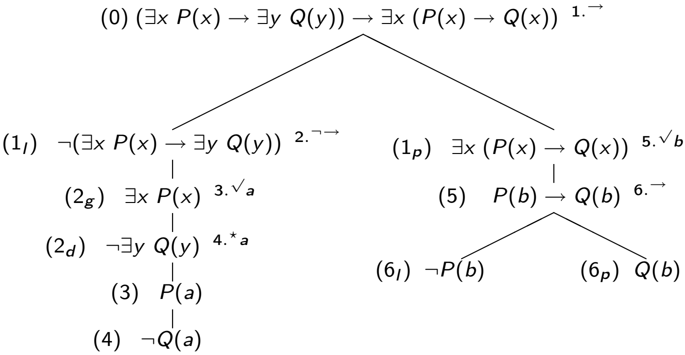
(4) $\neg Q(a)$

(1_p) $\exists x\, (P(x) \rightarrow Q(x))$ $^{5.\surd b}$

(5) $P(b) \rightarrow Q(b)$

Jedyne, co można jeszcze zrobić na tej gałęzi, to zastosowanie reguły dotyczącej implikacji do formuły o numerze (5). Ten, szósty krok (zaznaczony komentarzem $^{6.\rightarrow}$ z prawej strony formuły o numerze (5)) daje w rezultacie rozgałęzienie na formuły o numerach (6_l) oraz (6_p):

Przykład 1: tworzenie tablicy analitycznej



(0) $(\exists x\, P(x) \rightarrow \exists y\, Q(y)) \rightarrow \exists x\, (P(x) \rightarrow Q(x))$ $^{1.\rightarrow}$

(1_l) $\neg(\exists x\, P(x) \rightarrow \exists y\, Q(y))$ $^{2.\neg\rightarrow}$

(2_g) $\exists x\, P(x)$ $^{3.\surd a}$

(2_d) $\neg\exists y\, Q(y)$ $^{4.\star a}$

(3) $P(a)$

(4) $\neg Q(a)$

(1_p) $\exists x\, (P(x) \rightarrow Q(x))$ $^{5.\surd b}$

(5) $P(b) \rightarrow Q(b)$ $^{6.\rightarrow}$

(6_l) $\neg P(b)$

(6_p) $Q(b)$

Budowa tablicy została zakończona.

Przykład 1: tworzenie tablicy analitycznej

Dodajmy jeszcze, że w rozważanym przypadku kolejność stosowania reguł była jednoznacznie określona. Nie zawsze będziemy zmuszeni do tak rozkosznej bezmyślności; często to, jakie reguły stosować w jakiej kolejności jest niezwykle istotne dla budowania tablic w sposób możliwie najbardziej efektywny (ze względu na rozważany problem), a ponadto zaspokoić pozwala tęsknoty estetyczne: budowane drzewa powinny być ***ładne***. Ten ostatni termin podajemy oczywiście bez komentarza.

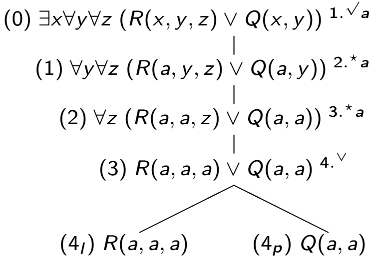
Zauważmy też, że w gałęzi prawej mogliśmy się posłużyć symbolem a dla wprowadzenia nowej stałej indywiduowej (krok 5.). Tak samo jak w KRZ, to co „dzieje się" na jednej gałęzi nie ma żadnego wpływu na to, co „dzieje się" na pozostałych gałęziach.

Przykład 2: tworzenie tablicy analitycznej

Rozważmy formułę:

$$\forall x \forall y \forall z\, (R(x,y,z) \vee Q(x,y)).$$

Zbudujemy dla niej tablicę analityczną, stosując pewne uproszczenia, które oczywiście objaśnimy:



(0) $\exists x \forall y \forall z\, (R(x,y,z) \vee Q(x,y))\ ^{1.\surd a}$

(1) $\forall y \forall z\, (R(a,y,z) \vee Q(a,y))\ ^{2.\star a}$

(2) $\forall z\, (R(a,a,z) \vee Q(a,a))\ ^{3.\star a}$

(3) $R(a,a,a) \vee Q(a,a)\ ^{4.\vee}$

(4_l) $R(a,a,a)$ (4_p) $Q(a,a)$

Przykład 2: tworzenie tablicy analitycznej

Formuła w korzeniu jest skwantyfikowana egzystencjalnie, co nakazuje wprowadzenie nowej stałej a (krok 1.). Otrzymana formuła o numerze (1) jest formułą generalnie skwantyfikowaną, i na tworzonej gałęzi występuje stała a. Trzeba więc do formuły (1) zastosować regułę $R(\forall)$ względem tej stałej (krok 2.). Otrzymana formuła o numerze (2) jest formułą generalnie skwantyfikowaną, i na tworzonej gałęzi występuje stała a. Trzeba więc do formuły (2) zastosować regułę $R(\forall)$ względem tej stałej (krok 3.). Otrzymana formuła o numerze (3) nie rozpoczyna sie od kwantyfikatora; jest alternatywą, a więc trzeba do niej zastosować regułę $R(\vee)$ (krok 4.). Otrzymujemy rozgałęzienie. Ani do formuły o numerze (4_l), ani do formuły o numerze (4_l) nie można już stosować żadnych reguł, bo są to formuły atomowe. Koniec pracy.

Uproszczenie polega tu na tym, że notacja $^\star a$ zastępuje (teoretycznie wymagane) dopisanie do tworzonej gałęzi na nowo formuły, z której prawej strony notacja ta jest umieszczona. Będziemy stosować to uproszczenie.

Przykład 2: tworzenie tablicy analitycznej

Może komuś wydawać się dziwne (albo i dziwaczne), że tłumaczymy te wszystkie uproszczenia. Należy podkreślić rzecz następującą. Precyzyjne definicje (tablicy analitycznej, tablicy systematycznej, itd.) są ***niezbędne***, aby udowodnić, że metoda tablic analitycznych w KRP jest ***poprawna*** (trafna i pełna).

Natomiast przy rozważaniu konkretnych, zwykle nieskomplikowanych przykładów tablic analitycznych użyteczne stają się pewne uproszczenia, pozwalające zaoszczędzić czas, siły, miejsce na kartce, itd. Oczywiście, uproszczenia te nie mogą prowadzić do ***błędnych*** wyników.

Przykład 2: tworzenie tablicy analitycznej

Tak więc, gdy w tablicy analitycznej mamy zdanie generalnie skwantyfikowane postaci $\forall x\, \alpha(x)$ (lub zanegowane zdanie egzystencjalnie skwantyfikowane postaci $\neg\exists x\, \alpha(x)$), to ***teoretycznie*** powinniśmy dołączyć do rozważanej gałęzi ***każde*** drzewo atomowe postaci:

$$\begin{array}{c} \forall x\, \alpha(x) \\ | \\ \alpha(t) \end{array}$$

lub ***każde*** drzewo atomowe postaci:

$$\begin{array}{c} \neg\exists x\, \alpha(x) \\ | \\ \neg\alpha(t) \end{array}$$

dla dowolnego termu bazowego t.

W ***praktyce*** dołączamy jednak w takich przypadkach jedynie formuły $\alpha(t)$ (lub $\neg\alpha(t)$), dla tych termów bazowych (w szczególności: dla tych stałych), które występują na rozważanej gałęzi.

Przykład 3: tworzenie tablicy analitycznej

Rozważmy formułę:

$$\exists x \forall y \, R(a, x, y).$$

Jej tablica analityczna ma postać następującą:

$$(0)\ \exists x \forall y \, R(a, x, y)^{\ 1.\checkmark b}$$

$$(1)\ \forall y \, R(a, b, y)^{\ 2.\star b\ \ 3.\star b}$$

$$(2)\ R(a, b, b)$$

$$(3)\ R(a, b, a)$$

Przykład 3: tworzenie tablicy analitycznej

Formuła w korzeniu tablicy to formuła egzystencjalna, a więc w kroku 1. stosujemy regułę $R(\exists)$ i wprowadzamy nową stałą b, otrzymując formułę o numerze (1).
Jest to formuła generalnie skwantyfikowana, a na rozważanej gałęzi mamy dwie stałe: a oraz b.
Trzeba zatem do formuły (1) ***dwukrotnie*** zastosować regułę $R(\forall)$: raz względem stałej b, a po raz drugi względem stałej a (kolejność nie gra roli).
W wyniku wykonania każdego z tych kroków (kroków 2. oraz 3.) otrzymujemy zdanie atomowe. Koniec pracy.

Bardziej złożone przypadki zostały omówione w pliku **tabkrz.pdf**.

Przykład 4: tablica nieskończona

Formuła: $\exists x\, P(x) \wedge \forall y \exists z\, Q(y,z)$ ma nieskończoną tablicę analityczną:

(0) $\exists x\, P(x) \wedge \forall y \exists z\, Q(y,z)$ $^{1.\wedge}$

(1$_g$) $\exists x\, P(x)$ $^{2.\surd a}$

(1$_d$) $\forall y \exists z\, Q(y,z)$ $^{3.\star a\ 5.\star b\ 7.\star c}$

(2) $P(a)$

(3) $\exists z\, Q(a,z)$ $^{4.\surd b}$

(4) $Q(a,b)$

(5) $\exists z\, Q(b,z)$ $^{6.\surd c}$

(6) $Q(b,c)$

(7) $\exists z\, Q(c,z)$

$\vdots$

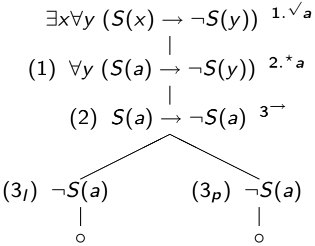
Przykład 4: tablica nieskończona

Powinno być widoczne, że budowy tej tablicy analitycznej zakończyć nie można. Tak, jak każą reguły, wprowadziliśmy stałą indywiduową opuszczając kwantyfikator egzystencjalny w formule o numerze (1_g). Rozwinięcie formuły generalnej (1_d) ze względu na tę stałą dało w wyniku zdanie egzystencjalne. Wprowadziliśmy nową stałą, rozwinęliśmy względem niej formułę generalną (1_d), znów otrzymaliśmy formułę egzystencjalną, itd.

Jeśli ktoś pragnie bliższego oswojenia się z ewentualnymi interpretacjami tej formuły, to proponujemy czytać $P(x)$ np. jako x *jest bezrobotna*, zaś $Q(x, y)$ jako *x jest zapożyczona u y*.
Czy zdanie: *Nie dość, że mamy bezrobocie, to w dodatku wszyscy mają długi* brzmi swojsko?

Przykład 5: tablica nieskończona

Zdanie: *Jest ktoś, kto jest szczęśliwy tylko wtedy, gdy wszyscy są nieszczęśliwi* ma dość ponury wydźwięk społeczny.
Uznajmy, że *być szczęśliwym* to predykat jednoargumentowy. Czytajmy $S(x)$ jako: *x jest szczęśliwy*. Zbudujmy tablicę analityczną dla formuły języka KRP, która odpowiada strukturze składniowej rozważanego zdania:



$\exists x \forall y\, (S(x) \rightarrow \neg S(y))$ $^{1.\surd a}$

(1) $\forall y\, (S(a) \rightarrow \neg S(y))$ $^{2.\star a}$

(2) $S(a) \rightarrow \neg S(a)$ $^{3\rightarrow}$

(3_l) $\neg S(a)$ $\circ$

(3_p) $\neg S(a)$ $\circ$

Przykład 5: tablica nieskończona

Na tym budowę tablicy musimy zakończyć — na żadnej gałęzi nie ma żadnych formuł, do których można byłoby stosować jakiekolwiek reguły opuszczania stałych logicznych.

Ponieważ ta tablica ma gałęzie otwarte, więc rozważana formuła jest prawdziwa w jakichś interpretacjach. Na przykład, jest prawdziwa w uniwersum jednoelementowym, w którym dopełnienie denotacji predykatu S zawiera całe to uniwersum. Wracając do interpretacji wyjściowej, rozpatrywane zdanie jest prawdziwe np. w świecie złożonym z jednego nieszczęśliwego osobnika. Jako ćwiczenie polecamy namysł nad tym, w jakich innych jeszcze światach zdanie to jest prawdziwe (czy mogą w nich istnieć ludzie szczęśliwi?).

Zbudujmy teraz tablicę analityczną dla negacji rozważanej formuły:

$$
\begin{array}{c}
\neg(\exists x \forall y (S(x) \rightarrow \neg S(y))) \quad {}^{1.^{\star}a \; 3.^{\star}b \; 7.^{\star}c} \\
| \\
(1) \quad \neg\forall y\, (S(a) \rightarrow \neg S(y)) \quad {}^{2.^{\surd}b} \\
| \\
(2) \quad \neg(S(a) \rightarrow \neg S(b)) \quad {}^{4.^{\neg\rightarrow}} \\
| \\
(3) \quad \neg\forall y\; (S(b) \rightarrow \neg S(y)) \quad {}^{6.^{\surd}c} \\
| \\
(4_g) \quad S(a) \\
| \\
(4_d) \quad \neg\neg S(b) \quad {}^{5.^{\neg\neg}} \\
| \\
(5) \quad S(b) \\
| \\
(6) \quad \neg(S(b) \rightarrow \neg S(c)) \quad {}^{8.^{\neg\rightarrow}} \\
| \\
(7) \quad \neg\forall y\, (S(c) \rightarrow \neg S(y)) \\
| \\
(8_g) \quad S(b) \\
| \\
(8_d) \quad \neg\neg S(c) \quad {}^{9.^{\neg\neg}} \\
| \\
(9) \quad S(c) \\
| \\
\vdots
\end{array}
$$

Przykład 5: tablica nieskończona

Na początku, nie mamy tu do dyspozycji formuły egzystencjalnie skwantyfikowanej, do której moglibyśmy bezpośrednio zastosować regułę $R(\exists)$ ani negacji formuły generalnie skwantyfikowanej, do której moglibyśmy zastosować regułę $R(\neg\forall)$. W takich przypadkach wprowadzamy nową stałą indywiduową korzystając z dowolnego zdania generalnie skwantyfikowanego lub negacji zdania egzystencjalnie skwantyfikowanego, tzn. rozwijamy takie zdanie ze względu na ***dowolną*** stałą indywiduową z języka KRP.
Tu mamy do czynienia z drugim z takich przypadków. Wprowadzenie nowej stałej daje w wyniku negację zdania generalnie skwantyfikowanego, to pozwala wprowadzić kolejną nową stałą; zastosowanie wobec tej drugiej stałej reguły $R(\neg\exists)$ generuje następne zdanie egzystencjalne, itd.

W rezultacie otrzymujemy gałąź nieskończoną. Jak zobaczymy później, oznacza to, że formuła $\exists x\forall y(S(x) \rightarrow \neg S(y))$ nie jest tautologią KRP. A więc — w szczególności — istnienie kogoś, kto żywiłby się wyłącznie ***Schadenfreude*** nie jest logicznie konieczne.

Trochę heurystyki

To co najważniejsze z praktycznego punktu widzenia, jeśli chodzi o metodę tablic analitycznych da się streścić tak oto. Masz jakąś formułę (dokładniej: zdanie) języka KRP. Budujesz jej tablicę analityczną. Każda z konstruowanych gałęzi jest próbą konstrukcji interpretacji, w której rozważana formuła jest prawdziwa. Jeśli gałąź jest zamknięta (zawiera parę formuł wzajem sprzecznych), to gałąź taka ***nie może*** odpowiadać żadnej interpretacji, w której badana formuła jest prawdziwa. Zamykanie gałęzi to zatem ***wykluczanie*** zachodzenia pewnych sytuacji. Natomiast istnienie gałęzi otwartych w tablicy analitycznej danej formuły ukazuje, że istnieją interpretacje, w których formuła ta jest prawdziwa.

Uwaga. Powyższe stwierdzenie, że *istnienie gałęzi otwartych w tablicy analitycznej danej formuły ukazuje, że istnieją interpretacje, w których formuła ta jest prawdziwa* zostanie precyzyjnie udowodnione.

Trochę heurystyki

Kiedy budowę tablicy analitycznej uważamy za zakończoną? Dopiero wtedy, gdy do żadnej formuły, na żadnej gałęzi ***dotąd otrzymanego*** drzewa nie można już stosować żadnych reguł, budowa tablicy jest zakończona. Wystosujmy następujący (nieco demagogiczny) apel do Humanistek (dla wzmocnienia mocy perswazyjnej, podajemy go w dwóch wersjach):

- ***Bądź mądrzejsza od komputera!***
- ***Nie bądź głupsza od komputera!***

Trochę heurystyki

Jeśli podczas tworzenia łańcucha formuł w konstruowanej tablicy analitycznej uzyskamy w tym łańcuchu parę formuł wzajem sprzecznych, to dalsza praca z tym łańcuchem jest niepotrzebna: możemy ją zakończyć, doklejając do takiego łańcucha liść z informacją o uzyskaniu sprzeczności i otrzymując w ten sposób gałąź zamkniętą drzewa, traktowaną jako twór kompletny. Pamiętasz: *Sprzeczność to śmierć logiczna.* Nadto, z kultury masowej pamiętasz: *A kto umarł, ten nie żyje.* Podstawowym celem budowania tablic analitycznych jest uzyskiwanie łańcuchów zamkniętych, tj. zbiorów formuł wśród których jest para formuł wzajem sprzecznych. Jeśli jakiś zbiór formuł zawiera parę formuł wzajem sprzecznych, to ***każdy*** jego nadzbiór także tę parę zawiera. Można zakończyć pracę.

Sens powyższego apelu proszę odbierać następująco: nie wykonuj bezmyślnie wszystkich reguł, staraj się pamiętać, jakiemu celowi służy Twoja praca — masz mianowicie ***wykluczać*** zachodzenie pewnych sytuacji.

Trochę heurystyki

Gdy wszystkie gałęzie tablicy analitycznej zdania α są zamknięte, to nie istnieje interpretacja, w której zdanie to jest prawdziwe. Gdy któraś gałąź tablicy analitycznej zdania α jest otwarta, to gałąź taka odpowiada interpretacji, w której α jest prawdziwa, tj. biorąc pod uwagę wszystkie formuły (atomowe i negacje atomowych) występujące na tej gałęzi można podać interpretację, w której wszystkie formuły tej gałęzi (a więc także formuła stanowiąca korzeń drzewa) są prawdziwe.

Poniżej pokazujemy (dowód w pliku **tabkrp.pdf**), że gałęzie otwarte tablic analitycznych (budowanych w pewien specjalny, pedantyczny sposób) tworzą *zbiory Hintikki*, a więc na mocy lematu Hintikki mają modele.

Niektóre własności TA

Twierdzenie 1.

Każda systematyczna tablica analityczna jest zakończona.

Twierdzenie 2.

Jeśli każda gałąź systematycznej tablicy analitycznej D jest sprzeczna, to D jest tablicą skończoną.

Twierdzenia powyższe będą wykorzystane w dowodach trafności i pełności metody TA w KRP.

Modele Herbranda

Jeśli S jest dowolnym zbiorem formuł języka KRP (ustalonej sygnatury), to przez ***uniwersum Herbranda*** dla S rozumiemy zbiór H_S określony indukcyjnie następująco:

- (i) jeśli stała indywiduowa a_k występuje w jakiejś formule ze zbioru S, to $a_k \in H_S$
- (ii) jeśli $t_1, \ldots, t_{n_j}$ są dowolnymi termami należącymi do H_S, to $f_j^{n_j}(t_1, \ldots, t_{n_j})$ także należy do H_S, dla dowolnego symbolu funkcyjnego $f_j^{n_j}$.

Jeśli w formułach z S nie występuje żadna stała indywiduowa, to warunek (i) definicji zbioru H_S zastępujemy warunkiem: $a_k \in H_S$ dla dowolnie wybranej stałej indywiduowej a_k.
Jeśli w formułach z S występuje co najmniej jeden symbol funkcyjny, to H_S jest zbiorem nieskończonym.

Modele Herbranda

Uniwersum Herbranda dla danego zbioru formuł S jest zatem zbiorem wszystkich termów bez zmiennych utworzonych (z użyciem symboli funkcyjnych) ze stałych indywiduowych występujących w formułach zbioru S. ***Interpretacją Herbranda*** dla zbioru formuł S nazywamy interpretację $\langle H_S, \Delta_S \rangle$ spełniającą następujące warunki:

- $\Delta_S(a_k) = a_k$ dla dowolnej stałej indywiduowej a_k należącej do H_S;
- $\Delta_S(f_j^{n_j}(t_1, \ldots, t_{n_j})) = f_j^{n_j}(t_1, \ldots, t_{n_j})$ dla dowolnych termów $t_1, \ldots, t_{n_j}$ należących do H_S.

Modelem Herbranda dla zbioru formuł S nazywamy każdą interpretację Herbranda dla S, w której prawdziwe są wszystkie formuły z S. Uniwersa Herbranda tworzone są z wyrażeń języka KRP. Tak więc, zawsze mamy możliwość budowania interpretacji, o ile tylko dany jest język. Wystarczy budować struktury relacyjne z samych wyrażeń językowych.

Zbiory Hintikki

Niech S będzie dowolnym zbiorem formuł języka KRP (ustalonej sygnatury). Mówimy, że S jest ***zbiorem Hintikki***, wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzą następujące warunki:

- (i) jeśli α jest formułą atomową bez zmiennych wolnych, to α nie należy do S lub $\neg(\alpha)$ nie należy do S
- (ii) jeśli $(\alpha) \wedge (\beta)$ należy do S, to α należy do S oraz β należy do S
- (iii) jeśli $(\alpha) \vee (\beta)$ należy do S, to α należy do S lub β należy do S
- (iv) jeśli $\forall x_n\ (\alpha)$ należy do S, to $\alpha(x_n/a_k)$ należy do S, dla każdej stałej indywiduowej a_k
- (v) jeśli $\exists x_n\ (\alpha)$ należy do S, to $\alpha(x_n/a_k)$ należy do S, dla co najmniej jednej stałej indywiduowej a_k.

Lemat Hintikki

Lemat Hintikki.
Każdy zbiór Hintikki ma model.

Ważną konsekwencją Lematu Hintikki dla metody tablic analitycznych jest to, że każda gałąź otwarta w każdej systematycznej tablicy analitycznej jest zbiorem Hintikki, a więc, na mocy powyższego lematu, jest także zbiorem spełnialnym (ma model).

Przy tym, ów model jest modelem Herbranda: jest konstruowany z wyrażeń języka KRP.

Trafność metody TA w KRP

Twierdzenie 3.
Niech S będzie zbiorem zdań, a α zdaniem języka rachunku predykatów L. Jeśli $D = \bigcup\limits_{n} D_n$ jest tablicą analityczną ze zbioru założeń S o korzeniu $\neg\alpha$, to dla dowolnej interpretacji $\mathfrak{M}$ języka L, która jest modelem $S \cup \{\neg\alpha\}$ istnieje interpretacja $\mathfrak{M}'$ języka L^D taka, że dla pewnej gałęzi P w D zachodzi następujący warunek $W(P, \mathfrak{M}')$:

$W(P, \mathfrak{M}')$ Dla każdego zdania β:

- β występuje w P wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M}' \models \beta$
- $\neg\beta$ występuje w P wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M}' \not\models \beta$.

Twierdzenie 4. ***Trafność metody tablic analitycznych w KRP.***
Jeśli istnieje istnieje dowód tablicowy D z założeń S dla α, to $S \models \alpha$.

Pełność metody TA w KRP

Twierdzenie 5.

Niech P będzie gałęzią otwartą w systematycznej tablicy analitycznej D z założeń S i o korzeniu $\neg\alpha$. Wtedy istnieje interpretacja $\mathfrak{M}^P$, w której wszystkie elementy S są prawdziwe, a α jest fałszywa.

Twierdzenie 6.

Dla dowolnego zdania α oraz zbioru zdań S zachodzi alternatywa:

- systematyczna tablica analityczna z założeń S o korzeniu $\neg\alpha$ jest dowodem tablicowym α z S;
- istnieje gałąź otwarta P w tablicy analitycznej z założeń S o korzeniu $\neg\alpha$ oraz struktura $\mathfrak{M}^P$ (zdefiniowana w twierdzeniu 3.) takie, że: $\mathfrak{M}^P \models S$ oraz $\mathfrak{M}^P \models \neg\alpha$.

Pełność metody TA w KRP

Twierdzenie 7. *Pełność metody tablic analitycznych w KRP.*

- (1) Każda tautologia KRP ma dowód tablicowy.
- (2) Dla dowolnych S oraz α: jeśli $S \models \alpha$, to istnieje dowód tablicowy α ze zbioru założeń S.
- (3) Dla dowolnego zbioru zdań S: S nie jest spełnialny (nie ma modelu) wtedy i tylko wtedy, gdy S jest tablicowo sprzeczny (tj. istnieje dowód tablicowy zdania $\beta \wedge \neg\beta$ ze zbioru założeń S, dla pewnego zdania β).

Zwróćmy uwagę na konstruktywny charakter twierdzenia o pełności. Dla dowolnego zbioru formuł S, albo nie jest on spełnialny, albo wskazać można model dla S.

Co nam daje trafność i pełność TA w KRP?

Skoro metoda TA w KRP jest trafna i pełna, to można ją wykorzystywać m.in. dla odpowiedzi na następujące pytania:

- czy dane zdanie języka KRP jest tautologią (pamiętając przy tym, że jeśli α jest tautologią KRP, to uzyskamy odpowiedź, ale jeśli α tautologią KRP nie jest, to tablica analityczna zdania $\neg\alpha$ może być nieskończona, i wtedy metoda TA nie daje odpowiedzi w skończonej liczbie kroków);
- czy dany zbiór formuł języka KRP nie jest spełnialny;
- czy zdanie α wynika logicznie ze zbioru zdań *S*, itp.

Pamiętamy oczywiście, że metoda TA ***nie dostarcza algorytmu*** dla ustalania tautologiczności formuł języka KRP.

Tautologie KRP

Przypominamy, że formuła α jest ***tautologią*** KRP, gdy jest prawdziwa we wszystkich interpretacjach. Oznacza to, że formuła α ***nie jest*** tautologią, dokładnie wtedy, gdy w co najmniej jednej interpretacji prawdziwe jest zaprzeczenie formuły α, tj. formuła $\neg\alpha$. Zatem, formuła α jest tautologią KRP dokładnie wtedy, gdy w tablicy analitycznej formuły $\neg\alpha$ wszystkie gałęzie są ***zamknięte***. Sprawdzenie metodą tablic analitycznych, czy dana formuła α jest tautologią KRP polega więc na:

- przypuszczeniu, że $\neg\alpha$ jest prawdziwa w co najmniej jednej interpretacji;
- zbudowaniu tablicy analitycznej formuły $\neg\alpha$;
- sprawdzeniu, czy wszystkie gałęzie są zamknięte;
    - jeśli tak jest, to formuła α jest tautologią KRP;
    - jeśli tak nie jest, tzn. drzewo zawiera co najmniej jedną gałąź otwartą (skończoną lub nieskończoną), to α nie jest tautologią KRP.

Kontrtautologie KRP

Sprawdzanie, czy dana formuła jest kontrtautologią KRP jest procedurą dualną do powyższej. Przypomnijmy, że formuła α jest ***kontrtautologią*** KRP wtedy i tylko wtedy, gdy jest fałszywa we wszystkich interpretacjach. Tak więc, formuła α ***nie jest*** kontrtautologią dokładnie wtedy, gdy jest prawdziwa w co najmniej jednej interpretacji. Aby sprawdzić, czy formuła α jest kontrtautologią KRP procedurę tablic analitycznych stosujemy następująco:

- przypuszczamy, że α jest prawdziwa w co najmniej jednej interpretacji;
- budujemy tablicę analityczną dla α;
- jeśli wszystkie gałęzie tablicy są zamknięte, to formuła α jest kontrtautologią KRP;
- jeśli tablica analityczna dla α zawiera gałęzie otwarte, to α nie jest kontrtautologią KRP, a z gałęzi otwartych odtworzyć możemy interpretacje, w których α jest prawdziwa.

Przykład: Uniwersalny Oszust

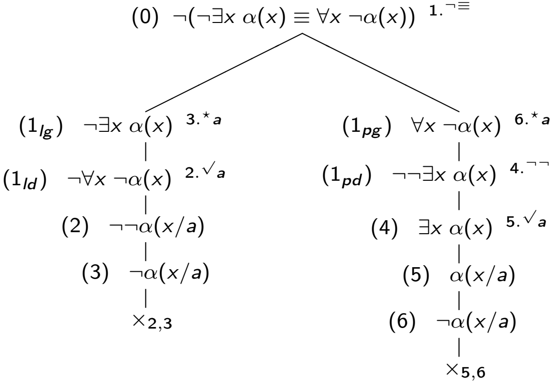
Pokażemy, że formuła $\exists x \forall y\ P(x,y) \rightarrow \exists z\ P(z,z)$ jest tautologią KRP. Istotnie, formuła ta ma następujący dowód tablicowy:

$$
\begin{array}{c}
(0)\ \ \neg(\exists x \forall y\ P(x,y) \rightarrow \exists z\ P(z,z))\ ^{1.\neg\rightarrow} \\
| \\
(1_g)\ \ \exists x \forall y\ P(x,y)\ ^{2.\surd a} \\
| \\
(1_d)\ \ \neg\exists z\ P(z,z)\ ^{3.\star a} \\
| \\
(2)\ \ \forall y\ P(a,y)\ ^{4.\star a} \\
| \\
(3)\ \ \neg P(a,a) \\
| \\
(4)\ \ P(a,a) \\
| \\
\times_{3,4}
\end{array}
$$

Zauważ, że rozważana formuła jest strukturą składniową zdania: *Jeśli ktoś oszukuje wszystkich, to ktoś sam siebie oszukuje*.

Przykład: Jedno z Praw De Morgana

Oto dowód tablicowy prawa $\neg\exists x\, \alpha(x) \equiv \forall x\, \neg\alpha(x)$:



(0) $\neg(\neg\exists x\, \alpha(x) \equiv \forall x\, \neg\alpha(x))$ $^{1.\neg\equiv}$

(1_{lg}) $\neg\exists x\, \alpha(x)$ $^{3.\star a}$

(1_{ld}) $\neg\forall x\, \neg\alpha(x)$ $^{2.\surd a}$

(2) $\neg\neg\alpha(x/a)$

(3) $\neg\alpha(x/a)$

$\times_{2,3}$

(1_{pg}) $\forall x\, \neg\alpha(x)$ $^{6.\star a}$

(1_{pd}) $\neg\neg\exists x\, \alpha(x)$ $^{4.\neg\neg}$

(4) $\exists x\, \alpha(x)$ $^{5.\surd a}$

(5) $\alpha(x/a)$

(6) $\neg\alpha(x/a)$

$\times_{5,6}$

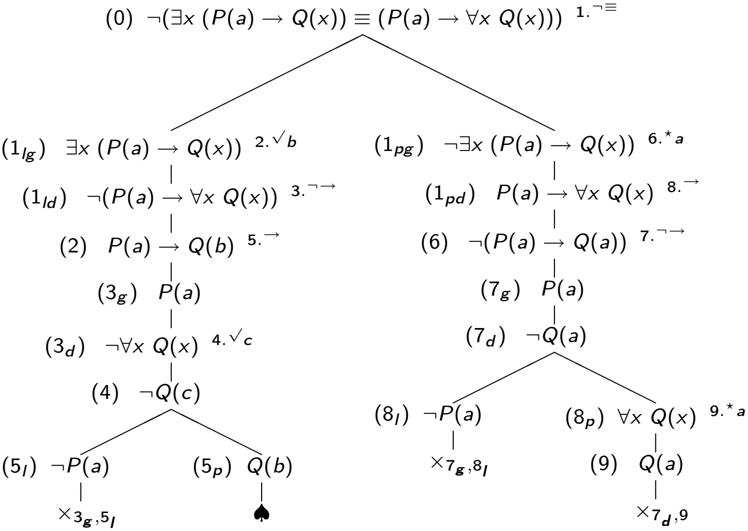
Przykład: formuła, która nie jest tautologią KRP

Pokażemy, że nie jest tautologią KRP następująca formuła, w której występuje stała indywiduowa *a*:

$$\exists x\ (Pa \rightarrow Qx) \equiv (Pa \rightarrow \forall x\ Qx)$$

W tym celu zbudujemy tablicę analityczną negacji tej formuły. Okaże się, że ma ona gałęzie otwarte. Skoro tak, to owa zanegowana formuła jest prawdziwa w co najmniej jednej interpretacji, a to oznacza, że sama formuła powyższa nie jest tautologią (bo gdy jej zaprzeczenie jest prawdziwe w jakiejś interpretacji, to ona sama jest w tejże interpretacji fałszywa; nie jest więc prawdziwa **we wszystkich** interpretacjach, *ergo* nie jest tautologią KRP). Oto tablica:

Przykład: formuła, która nie jest tautologią KRP



$(0)\quad \neg(\exists x\,(P(a)\rightarrow Q(x))\equiv(P(a)\rightarrow\forall x\,Q(x)))\quad 1.^{\neg\equiv}$

$(1_{lg})\quad \exists x\,(P(a)\rightarrow Q(x))\quad 2.^{\surd b}$

$(1_{ld})\quad \neg(P(a)\rightarrow\forall x\,Q(x))\quad 3.^{\neg\rightarrow}$

$(2)\quad P(a)\rightarrow Q(b)\quad 5.^{\rightarrow}$

$(3_g)\quad P(a)$

$(3_d)\quad \neg\forall x\,Q(x)\quad 4.^{\surd c}$

$(4)\quad \neg Q(c)$

$(5_l)\quad \neg P(a)$

$\times_{3_g,5_l}$

$(5_p)\quad Q(b)$

♠

$(1_{pg})\quad \neg\exists x\,(P(a)\rightarrow Q(x))\quad 6.^{\star a}$

$(1_{pd})\quad P(a)\rightarrow\forall x\,Q(x)\quad 8.^{\rightarrow}$

$(6)\quad \neg(P(a)\rightarrow Q(a))\quad 7.^{\neg\rightarrow}$

$(7_g)\quad P(a)$

$(7_d)\quad \neg Q(a)$

$(8_l)\quad \neg P(a)$

$\times_{7_g,8_l}$

$(8_p)\quad \forall x\,Q(x)\quad 9.^{\star a}$

$(9)\quad Q(a)$

$\times_{7_d,9}$

Przykład: formuła, która nie jest tautologią KRP

Interpretacja wyznaczona przez gałąź otwartą tablicy przedstawiona jest w poniższej tabelce:

♠	P	Q
a	+	?
b	?	+
c	?	–

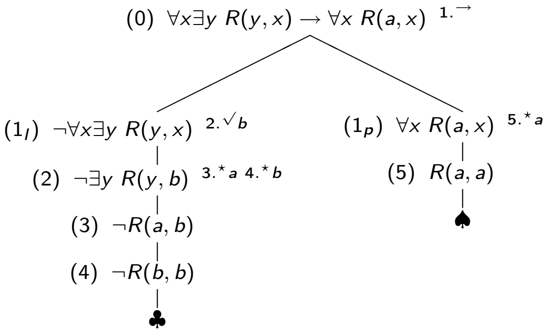
Uniwersum interpretacji to zbiór $\{a, b, c\}$. Jeśli element x należy do denotacji predykatu R, to na przecięciu odpowiedniego wiersza i kolumn piszemy znak „+”, jeśli nie należy, piszemy znak „–”. Znak „?” odpowiada sytuacji, gdy na gałęzi otwartej tablicy nie ma informacji, czy należy postawić „+” czy „–”.

Niepoznawalne Imię Boga

Formuła:

$$(\bigstar)\ \ \forall x \exists y\, R(y,x) \rightarrow \forall x\, R(a,x)$$

ma następującą tablicę analityczną:



(0) $\forall x \exists y\, R(y,x) \rightarrow \forall x\, R(a,x)$ $^{1.\rightarrow}$

(1_l) $\neg \forall x \exists y\, R(y,x)$ $^{2.\surd b}$

(2) $\neg \exists y\, R(y,b)$ $^{3.\star a}$ $^{4.\star b}$

(3) $\neg R(a,b)$

(4) $\neg R(b,b)$

♣

(1_p) $\forall x\, R(a,x)$ $^{5.\star a}$

(5) $R(a,a)$

♠

Niepoznawalne Imię Boga

Tablica ma dwie gałęzie otwarte. Badana formuła nie jest zatem kontrtautologią KRP. Poniższe tabelki podają interpretacje, w których (★) jest prawdziwa:

$R_{\clubsuit}$	a	b
a	?	–
b	?	–

$R_{\spadesuit}$	a
a	+

Tabelki te określają, między jakimi elementami uniwersum zachodzi relacja, będąca denotacją rozważanego predykatu.

A teraz tablica dla negacji formuły (★):

$$
\begin{array}{c}
(0)\ \ \neg(\forall x \exists y\ R(y,x) \rightarrow \forall x\ R(a,x))\ \ ^{1.^{\neg\rightarrow}} \\
| \\
(1_g)\ \ \forall x \exists y\ R(y,x)\ \ ^{3.^{\star}a\ 4.^{\star}b\ 7.^{\star}c\ 8.^{\star}d}\ \ldots \\
| \\
(1_d)\ \ \neg\forall x\ R(a,x)\ \ ^{2.^{\surd}b} \\
| \\
(2)\ \ \neg R(a,b) \\
| \\
(3)\ \ \exists y\ R(y,a)\ \ ^{5.^{\surd}c} \\
| \\
(4)\ \ \exists y\ R(y,b)\ \ ^{5.^{\surd}d} \\
| \\
(5)\ \ R(c,a) \\
| \\
(6)\ \ R(d,b) \\
| \\
(7)\ \ \exists y\ R(y,c)\ \ ^{9.^{\surd}e} \\
| \\
(8)\ \ \exists y\ R(y,d)\ \ ^{10.^{\surd}f} \\
| \\
\vdots
\end{array}
$$

Niepoznawalne Imię Boga

Budowy tej tablicy zakończyć nie można, co powinno być wyraźnie widoczne po prześledzeniu kilku pierwszych kroków w powyższej konstrukcji. Formuła (★) nie jest tautologią KRP. Metoda tablic analitycznych nie daje odpowiedzi w skończonej liczbie kroków. Możemy jednak, zauważając regularność w konstruowaniu coraz to większych fragmentów tablicy analitycznej negacji formuły (★), podać interpretację nieskończoną, w której negacja (★) jest prawdziwa. Nie upoważnia nas do tego sama metoda — kierujemy się zatem ***intuicjami*** (wychodzącymi poza logikę pierwszego rzędu).

Formuła (★) jest strukturą składniową np. zdania: *O ile za każdą liczbą naturalną następuje niemniejsza od niej liczba naturalna, to Jedyna Tajna Liczba Naturalna Kodująca Niepoznawalne Imię Dobrego Pana Naszego JHWH jest niemniejsza od wszystkich liczb naturalnych.*

Semantyczna niesprzeczność w KRP

Przypominamy, że zbiór formuł jest ***semantycznie niesprzeczny*** (***spełnialny***), gdy ma co najmniej jeden model, tj. gdy wszystkie jego elementy są prawdziwe w co najmniej jednej wspólnej interpretacji. W przeciwnym przypadku, tj. gdy nie ma żadnego modelu (wszystkie jego elementy nie są prawdziwe w żadnej wspólnej interpretacji), jest ***semantycznie sprzeczny***. Badanie rozważaną metodą, czy dany (skończony) zbiór formuł języka KRP jest semantycznie niesprzeczny polega na:

- przypuszczeniu, że wszystkie rozważane formuły są prawdziwe (w co najmniej jednej wspólnej interpretacji);
- zbudowaniu tablicy analitycznej, tj. drzewa, w którego pniu umieszczone są wszystkie rozważane formuły;
- konkluzji, uzależnionej od kształtu otrzymanego drzewa.

Semantyczna niesprzeczność w KRP

Możliwe są następujące sytuacje dla danego zbioru formuł X:

- wszystkie gałęzie tablicy są zamknięte; wtedy zbiór X jest semantycznie sprzeczny (wszystkie elementy zbioru X nie mogą być współprawdziwe);
- pewne gałęzie tablicy są otwarte; wtedy X jest semantycznie niesprzeczny, a każda z otwartych gałęzi tablicy pozwala utworzyć interpretację, w której wszystkie elementy zbioru X są współprawdziwe.

Może warto w tym miejscu zaznaczyć, że ***wszystkie*** problemy dotyczące zastosowań TA w KRP sprowadzają się do badania, czy pewne zbiory formuł są semantycznie sprzeczne, czy też semantycznie niesprzeczne.

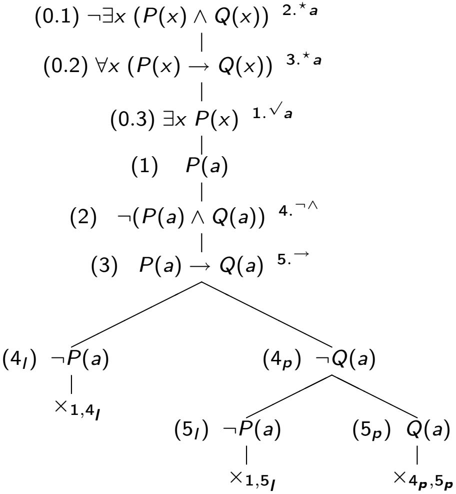
Przykład: zbiór semantycznie sprzeczny

Sprawdzimy, czy jest semantycznie niesprzeczny zbiór złożony z następujących formuł:

$$\neg\exists x\,(P(x) \wedge Q(x))$$
$$\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x))$$
$$\exists x\,P(x)$$

Budujemy tablicę analityczną, tj. drzewo, w którego pniu umieszczamy te formuły. Jeśli wszystkie gałęzie tej tablicy się zamkną, to badany zbiór formuł jest semantycznie sprzeczny. Jeśli pozostanie jakaś gałąź otwarta, to zbiór ten jest semantycznie niesprzeczny.

Przykład: zbiór semantycznie sprzeczny



$(0.1)\ \neg\exists x\,(P(x)\wedge Q(x))\quad {}^{2.\star a}$

$(0.2)\ \forall x\,(P(x)\rightarrow Q(x))\quad {}^{3.\star a}$

$(0.3)\ \exists x\,P(x)\quad {}^{1.\checkmark a}$

$(1)\quad P(a)$

$(2)\quad \neg(P(a)\wedge Q(a))\quad {}^{4.\neg\wedge}$

$(3)\quad P(a)\rightarrow Q(a)\quad {}^{5.\rightarrow}$

$(4_l)\quad \neg P(a)$

$\times_{1,4_l}$

$(4_p)\quad \neg Q(a)$

$(5_l)\quad \neg P(a)$

$\times_{1,5_l}$

$(5_p)\quad Q(a)$

$\times_{4_p,5_p}$

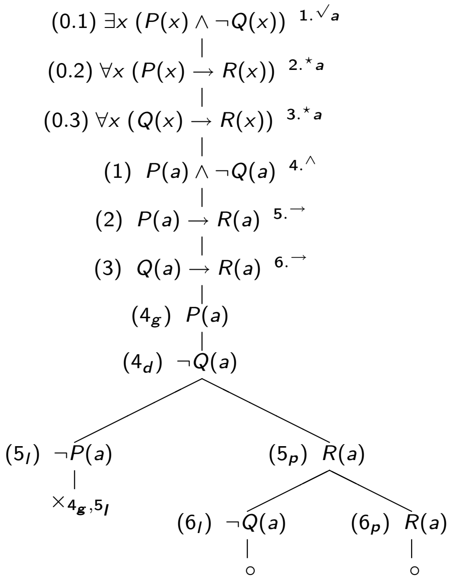
Tablica zamknięta. Zbiór semantycznie sprzeczny.

Przykład: zbiór semantycznie niesprzeczny

Pokażemy, że zbiór złożony z poniższych formuł jest semantycznie niesprzeczny, tzn. istnieje interpretacja, w której wszystkie te formuły są jednocześnie prawdziwe.

$$\begin{gathered}\exists x\,(P(x) \wedge \neg Q(x)) \\ \forall x\,(P(x) \rightarrow R(x)) \\ \forall x\,(Q(x) \rightarrow R(x))\end{gathered}$$

Budujemy tablicę analityczną, tj. drzewo, w którego pniu umieszczamy powyższe formuły. Jest to zatem przypuszczenie, że wszystkie one mogą być prawdziwe w co najmniej jednej interpretacji. Przypuszczenie to będzie potwierdzone, jeśli co najmniej jedna gałąź tablicy zostanie otwarta; wtedy, zgodnie z definicją, zbiór tych formuł jest semantycznie niesprzeczny. Gdyby wszystkie gałęzie tablicy zostały zamknięte, to powyższe przypuszczenie musielibyśmy odrzucić — rozważany zbiór formuł byłby semantycznie sprzeczny. A oto tablica:



(0.1) $\exists x\,(P(x) \wedge \neg Q(x))$ $^{1.\surd a}$

(0.2) $\forall x\,(P(x) \rightarrow R(x))$ $^{2.\star a}$

(0.3) $\forall x\,(Q(x) \rightarrow R(x))$ $^{3.\star a}$

(1) $P(a) \wedge \neg Q(a)$ $^{4.\wedge}$

(2) $P(a) \rightarrow R(a)$ $^{5.\rightarrow}$

(3) $Q(a) \rightarrow R(a)$ $^{6.\rightarrow}$

(4_g) $P(a)$

(4_d) $\neg Q(a)$

(5_l) $\neg P(a)$ | (5_p) $R(a)$

$\times_{4_g,5_l}$

(6_l) $\neg Q(a)$ | (6_p) $R(a)$

○ | ○

Tablica ma gałęzie otwarte. Zbiór semantycznie niesprzeczny.

Przykład: zbiór semantycznie niesprzeczny

Tablica ma dwie gałęzie otwarte i do żadnej formuły, na żadnej z tych gałęzi, nie można już stosować żadnych reguł. Zatem istnieją interpretacje, w których wszystkie trzy powyższe formuły są jednocześnie prawdziwe.

Z każdej z gałęzi otwartych uzyskać można informację, jakie zdania atomowe zachodzą w każdej z interpretacji, wyznaczonych przez tę gałąź. W przypadku rozważanej tablicy, informacje te są takie same na każdej gałęzi otwartej; otrzymujemy więc następującą interpretację, w której wszystkie trzy rozważane zdania są prawdziwe:

	P	Q	R
a	+	−	+

Wynikanie logiczne w KRP

Przypominamy, że formuła α ***wynika logicznie*** ze zbioru formuł X, gdy każdy model zbioru X jest też modelem α, tj. gdy α jest prawdziwa w każdej interpretacji, w której prawdziwe są wszystkie elementy zbioru X. Ustalenie zachodzenia wynikania logicznego metodą wprost wymaga więc w ogólności przejrzenia nieskończenie wielu interpretacji, co nie jest oczywiście procedurą efektywną.

Zauważmy jednak, że formuła α ***nie*** wynika logicznie ze zbioru formuł X wtedy i tylko wtedy, gdy w co najmniej jednym modelu dla X formuła α jest fałszywa.

Zatem, gdy dla ustalonego X oraz α uda się wykluczyć sytuację polegającą na tym, że w co najmniej jednej interpretacji formuła α jest fałszywa, a wszystkie formuły ze zbioru X są w tejże interpretacji prawdziwe, to potwierdzimy w ten sposób, że α wynika logicznie z X.

Jeszcze inaczej mówiąc: jeśli wykluczymy przypadek, że wszystkie formuły ze zbioru X oraz formuła $\neg\alpha$ są współprawdziwe, to wykażemy, iż α wynika logicznie z X.

Wynikanie logiczne w KRP

Ustalanie za pomocą metody tablic analitycznych czy dana formuła α wynika logicznie z danego (skończonego) zbioru formuł X polega na:

- założeniu, że wszystkie formuły z X są prawdziwe;
- przypuszczeniu, że formuła $\neg\alpha$ jest prawdziwa;
- zbudowaniu tablicy analitycznej, tj. drzewa, w którego pniu są wszystkie formuły ze zbioru X oraz formuła $\neg\alpha$.

Możliwe są następujące sytuacje:

- otrzymana tablica analityczna ma wszystkie gałęzie zamknięte; wtedy formuła α wynika logicznie ze zbioru formuł X;
- otrzymana tablica analityczna zawiera gałęzie otwarte; wtedy formuła α nie wynika logicznie ze zbioru X, a znalezione gałęzie otwarte pozwalają skonstruować takie interpretacje, które są modelami zbioru przesłanek X, a w których formuła α jest fałszywa.

Wynikanie logiczne w KRP

W jeszcze innym sformułowaniu:

- formuła α ***wynika logicznie*** ze zbioru formuł X wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór formuł $X \cup \{\neg\alpha\}$ jest ***semantycznie sprzeczny***;
- formuła α ***nie wynika logicznie*** ze zbioru formuł X wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór formuł $X \cup \{\neg\alpha\}$ jest ***semantycznie niesprzeczny***.

Przykład: Chichot Polityki

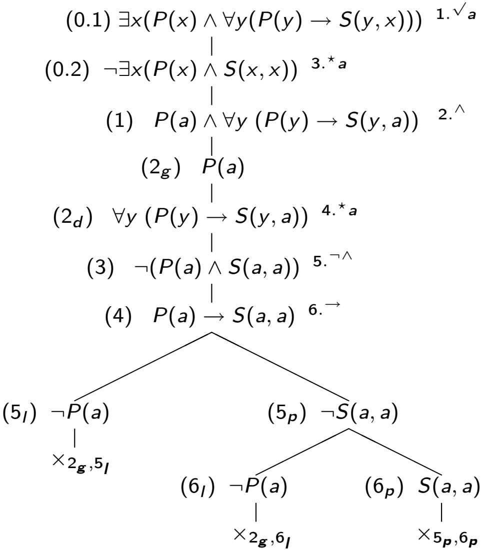
Wnioskowanie: *Z pewnego polityka śmieją się wszyscy politycy. Zatem jakiś polityk śmieje się sam z siebie.* przebiega wedle reguły:

$$\frac{\exists x\,(P(x) \wedge \forall y\,(P(y) \rightarrow S(y,x)))}{\exists x\,(P(x) \wedge S(x,x))}$$

Odczytujemy tu: $P(x)$ — x jest politykiem, $S(x,y)$ — x śmieje się z y.

Gdyby reguła ta była niezawodna, to zbudowana wedle reguł sztuki tablica analityczna (w pniu drzewa przesłanka oraz zaprzeczony wniosek) miałaby wszystkie gałęzie zamknięte. Sprawdźmy:

Przykład: Chichot Polityki



$(0.1)\ \exists x(P(x) \wedge \forall y(P(y) \rightarrow S(y,x)))\quad 1.^{\surd a}$

$(0.2)\ \neg\exists x(P(x) \wedge S(x,x))\quad 3.^{\star a}$

$(1)\ P(a) \wedge \forall y\,(P(y) \rightarrow S(y,a))\quad 2.^{\wedge}$

$(2_g)\ P(a)$

$(2_d)\ \forall y\,(P(y) \rightarrow S(y,a))\quad 4.^{\star a}$

$(3)\ \neg(P(a) \wedge S(a,a))\quad 5.^{\neg\wedge}$

$(4)\ P(a) \rightarrow S(a,a)\quad 6.^{\rightarrow}$

$(5_l)\ \neg P(a)$

$\times_{2_g,5_l}$

$(5_p)\ \neg S(a,a)$

$(6_l)\ \neg P(a)$

$\times_{2_g,6_l}$

$(6_p)\ S(a,a)$

$\times_{5_p,6_p}$

Tablica zamknięta. Reguła niezawodna. Wnioskowanie dedukcyjne.

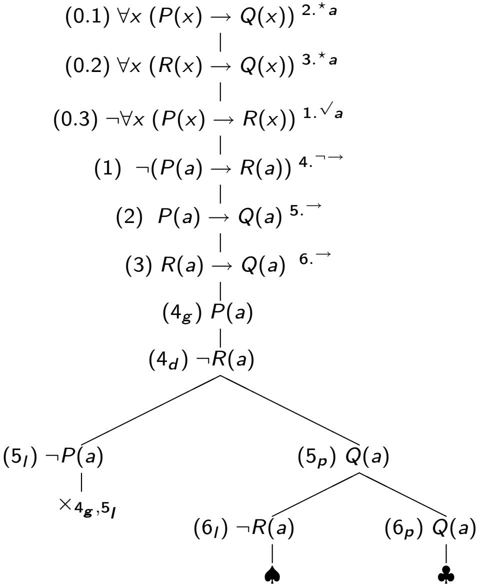
Przykład: Reguła Zawodna

Pokażemy, że zawodna jest reguła wnioskowania:

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x))\\ \forall x\,(R(x) \rightarrow Q(x))\end{array}}{\forall x\,(P(x) \rightarrow R(x))}$$

Budujemy tablicę analityczną, w której pniu umieszczamy przesłanki oraz zaprzeczony wniosek reguły. Jeśli taka tablica ma wszystkie gałęzie zamknięte, to reguła jest niezawodna. W przeciwnym przypadku jest zawodna.

Przykład: Reguła Zawodna



$(0.1)\ \forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x))\ ^{2.\star a}$

$(0.2)\ \forall x\,(R(x) \rightarrow Q(x))\ ^{3.\star a}$

$(0.3)\ \neg\forall x\,(P(x) \rightarrow R(x))\ ^{1.\surd a}$

$(1)\ \neg(P(a) \rightarrow R(a))\ ^{4.\neg\rightarrow}$

$(2)\ P(a) \rightarrow Q(a)\ ^{5.\rightarrow}$

$(3)\ R(a) \rightarrow Q(a)\ ^{6.\rightarrow}$

$(4_g)\ P(a)$

$(4_d)\ \neg R(a)$

$(5_l)\ \neg P(a)$ $(5_p)\ Q(a)$

$\times_{4_g,5_l}$

$(6_l)\ \neg R(a)$ $(6_p)\ Q(a)$

♠ ♣

Przykład: Reguła Zawodna

Tablica ma gałęzie otwarte, a zatem rozważana reguła jest zawodna.

Na gałęziach otwartych zakończonych liśćmi ♠ oraz ♣ występują te same formuły atomowe i negacje formuł atomowych. Gałęzie te wyznaczają zatem tę samą interpretację, w której przesłanki reguły są prawdziwe, a jej wniosek fałszywy:

	P	Q	R
a	$+$	$+$	$-$

Część III: TA w KRP (kilka zastosowań)

Część III:

TA w KRP

Kilka zastosowań

Wprowadzenie

W niniejszej, ostatniej części prezentacji dotyczącej metody TA w KRP omawiamy:

- prefiksowe postacie normalne formuł i skolemizację,
- niektóre twierdzenia metalogiczne dotyczące KRP,
- metodę TA w KRP z identycznością,
- kilka przykładów stosowania metody TA w KRP z symbolami funkcyjnymi.

Pełniejsze omówienie metody TA w KRP wymaga wprowadzenia dalszych pojęć (np. unifikacji), z czego w tej prezentacji rezygnujemy. Zainteresowany czytelnik zechce zajrzeć np. do: **http://www.logic.amu.edu.pl/images/f/f9/Rezkrp.pdf**

TA w KRP a własności metalogiczne KRP

Wykorzystamy metodę TA w dowodach kilku twierdzeń metalogicznych dotyczących KRP.

Najpierw pokażemy, że formuły języka KRP można przekształcać na równoważne im (w ściśle określonym sensie) formuły w tzw. prefiksowych postaciach normalnych.

Przedstawimy też kilka ważnych twierdzeń metalogicznych dotyczących KRP, których dowody otrzymać można przy użyciu metody tablic analitycznych.

Prefiksowe postacie normalne i skolemizacja

W KRZ każda formuła jest inferencyjnie równoważna pewnej formule w koniunkcyjnej postaci normalnej (KPN), a także pewnej formule w alternatywnej postaci normalnej (APN). Fakt ten może być wykorzystany w dowodzie twierdzenia o pełności KRZ, ma także inne zastosowania.

W KRP również dysponujemy metodą sprowadzania dowolnej formuły języka tego rachunku do pewnej standardowej postaci normalnej. Pokażemy mianowicie, że dowolna formuła języka KRP jest równoważna (tablicowo) formule, która rozpoczyna się ciągiem kwantyfikatorów, po którym następuje formuła bez kwantyfikatorów. Podobne twierdzenie o równoważności inferencyjnej zachodzi dla aksjomatycznego ujęcia KRP. Nadto, pokażemy, że poprzez wprowadzenie nowych symboli funkcyjnych można wyeliminować wszystkie kwantyfikatory egzystencjalne z owego ciągu.

Prefiksowe postacie normalne i skolemizacja

Mówimy, że formuły α i β języka KRP są ***inferencyjnie równoważne***, gdy tablica analityczna formuły $\neg(\alpha \equiv \beta)$ jest zamknięta.
Mówimy, że formuły α i β języka KRP są ***równospełnialne***, gdy zbiór $\{\alpha\}$ jest semantycznie niesprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $\{\beta\}$ jest semantycznie niesprzeczny.

Mówimy, że formuła α języka KRP jest w ***prefiksowej postaci normalnej***, gdy jest ona postaci $Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n\, \beta$, gdzie β jest formułą bez kwantyfikatorów, a każdy symbol Q_i jest jednym z kwantyfikatorów: $\forall$ lub $\exists$. Jeśli w dodatku β jest w KPN, to mówimy, że α jest w ***koniunkcyjnej prefiksowej postaci normalnej***. Ciąg $Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n$ nazywamy ***prefiksem*** formuły α, a formułę β jej ***matrycą***.

Przez ***formułę uniwersalną*** rozumiemy każdą formułę w prefiksowej postaci normalnej, w której prefiksie występują jedynie kwantyfikatory generalne.

Prefiksowe postacie normalne i skolemizacja

Twierdzenie 1.
Dla dowolnego ciągu kwantyfikatorów $\overrightarrow{Qx} = Q_1x_1 \dots Q_nx_n$ oraz dowolnych formuł α i β zachodzą następujące równoważności:

- $\overrightarrow{Qx}\neg\forall y\alpha \equiv \overrightarrow{Qx}\exists y\neg\alpha$.
- $\overrightarrow{Qx}\neg\exists y\alpha \equiv \overrightarrow{Qx}\forall y\neg\alpha$.
- $\overrightarrow{Qx}(\forall y\alpha \vee \beta) \equiv \overrightarrow{Qx}\forall z(\alpha(y/z) \vee \beta)$.
- $\overrightarrow{Qx}(\alpha \wedge \forall y\beta) \equiv \overrightarrow{Qx}\forall z(\alpha \wedge \beta(y/z))$.
- $\overrightarrow{Qx}(\exists y\alpha \wedge \beta) \equiv \overrightarrow{Qx}\exists z(\alpha(y/z) \wedge \beta)$.
- $\overrightarrow{Qx}(\alpha \wedge \exists y\beta) \equiv \overrightarrow{Qx}\exists z(\alpha \wedge \beta(y/z))$.

Prefiksowe postacie normalne i skolemizacja

- $\overrightarrow{Qx}(\forall y\alpha \vee \beta) \equiv \overrightarrow{Qx}\forall z(\alpha(y/z) \vee \beta)$.
- $\overrightarrow{Qx}(\alpha \vee \forall y\beta) \equiv \overrightarrow{Qx}\forall z(\alpha \vee \beta(y/z))$.
- $\overrightarrow{Qx}(\exists y\alpha \vee \beta) \equiv \overrightarrow{Qx}\exists z(\alpha(y/z) \vee \beta)$.
- $\overrightarrow{Qx}(\alpha \vee \exists y\beta) \equiv \overrightarrow{Qx}\exists z(\alpha \vee \beta(y/z))$.
- $\overrightarrow{Qx}(\forall y\alpha \rightarrow \beta) \equiv \overrightarrow{Qx}\exists z(\alpha(y/z) \rightarrow \beta)$.
- $\overrightarrow{Qx}(\alpha \rightarrow \forall y\beta) \equiv \overrightarrow{Qx}\forall z(\alpha \rightarrow \beta(y/z))$.
- $\overrightarrow{Qx}(\exists y\alpha \rightarrow \beta) \equiv \overrightarrow{Qx}\forall z(\alpha(y/z) \rightarrow \beta)$.
- $\overrightarrow{Qx}(\alpha \rightarrow \exists y\beta) \equiv \overrightarrow{Qx}\exists z(\alpha \vee \beta(y/z))$.

We wszystkich tych równoważnościach z jest zmienną nie występującą po lewej stronie równoważności.

Prefiksowe postacie normalne i skolemizacja

Twierdzenie 2.
Dla dowolnej formuły α języka KRP istnieje równoważna jej formuła α' w prefiksowej postaci normalnej, o tych samych zmiennych wolnych co α. Każdą taką formułę α' nazywamy ***prefiksową postacią normalną*** formuły α.

Twierdzenie 3.
Dla dowolnego zdania $\alpha = \forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y \beta$ języka KRP sygnatury σ zdanie

$$\alpha' = \forall x_1 \ldots \forall x_n \beta(f(x_1, \ldots, x_n)),$$

gdzie f jest nowym symbolem funkcyjnym spoza σ, jest równospełnialne z α.

Prefiksowe postacie normalne i skolemizacja

Twierdzenie 4.
Dla dowolnego zdania α języka KRP sygnatury σ istnieje formuła uniwersalna α' w języku KRP sygnatury σ rozszerzonej o nowe symbole funkcyjne taka, że α oraz α' są równospełnialne.

Każdą formułę α' spełniającą tezę powyższego twierdzenia nazywamy ***skolemową postacią normalną*** formuły α.

Na mocy powyższego twierdzenia tworzenie tablic analitycznych dla (negacji) dowolnych formuł języka KRP można sprowadzić do tworzenia tablic analitycznych dla (negacji) formuł uniwersalnych.

Przykłady

Formułę w prefiksowej postaci normalnej równoważną inferencyjnie z (1):

- (1) $\forall x \exists y P(x, y) \vee \neg \exists x \forall y Q(x, y)$

możemy znaleźć np. w następujący sposób:

- $\forall x \exists y P(x, y) \vee \neg \exists x \forall y Q(x, y)$
- $\forall u (\exists y P(u, y) \vee \neg \exists x \forall y Q(x, y))$
- $\forall u \exists v (P(u, v) \vee \neg \exists x \forall y Q(x, y))$
- $\forall u \exists v (P(u, v) \vee \forall x \neg \forall y Q(x, y))$
- $\forall u \exists v (P(u, v) \vee \forall x \exists y \neg Q(x, y))$
- $\forall u \exists v \forall w (P(u, v) \vee \exists y \neg Q(w, y))$
- $\forall u \exists v \forall w \exists z (P(u, v) \vee \neg Q(w, z))$.

Przykłady

Formułę w prefiksowej postaci normalnej równoważną inferencyjnie z (2):

- (2) $\forall x \forall y (\exists z (P(x,z) \wedge P(y,z)) \rightarrow \exists u Q(x,y,u))$

możemy znaleźć np. w następujący sposób:

- $\forall x \forall y (\exists z (P(x,z) \wedge P(y,z)) \rightarrow \exists u Q(x,y,u))$
- $\forall x \forall y \forall w ((P(x,w) \wedge P(y,w)) \rightarrow \exists u Q(x,y,u))$
- $\forall x \forall y \forall w \exists z ((P(x,w) \wedge P(y,w)) \rightarrow Q(x,y,z))$.

Przykłady

Możliwymi postaciami skolemowymi formuł (1) oraz (2) są np.:

- $(1)'$ $\forall u \forall w (P(u, f(u)) \vee \neg Q(w, g(u, w)))$
- $(2)'$ $\forall x \forall y \forall w ((P(x, w) \wedge P(y, w)) \rightarrow Q(x, y, f(x, y, w)))$.

Zwartość

Twierdzenie 5. ***Twierdzenie o zwartości.***
Zbiór zdań S języka KRP jest spełnialny wtedy i tylko wtedy, gdy każdy skończony podzbiór S jest spełnialny.

Z powyższego twierdzenia wynika, że zbiór zdań S języka KRP **nie** jest spełnialny wtedy i tylko wtedy, gdy ***pewien*** skończony podzbiór S **nie** jest spełnialny.

Twierdzenie Löwenheima-Skolema

Twierdzenie 6. ***Twierdzenie Löwenheima-Skolema.***
Jeśli przeliczalny zbiór zdań S języka KRP jest spełnialny (tj. ma model), to S ma model przeliczalny.

Dowód.
Rozważmy systematyczną tablicę analityczną D z założeń S i o korzeniu $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$ dla dowolnego wybranego zdania α. Na mocy twierdzenia o trafności metody tablic analitycznych w KRP, D nie może być dowodem tablicowym formuły $\alpha \wedge \neg\alpha$ (gdyż to oznaczałoby, że $\alpha \wedge \neg\alpha$ jest tautologią KRP, co nie jest prawdą). Tablica D nie jest zatem sprzeczna, czyli zawiera gałąź otwartą P. Wtedy struktura $\mathfrak{M}^P$ zdefiniowana w dowodzie twierdzenia o pełności metody TA w KRP jest modelem zbioru S. Ponieważ istnieje przeliczalnie wiele termów bazowych języka KRP, więc $\mathfrak{M}^P$ jest przeliczalnym modelem S.

Twierdzenie Herbranda

Następujące twierdzenie wzmacnia twierdzenie o pełności metody TA w KRP, w tym sensie, że pozwala przechodzić od niespełnialności zbioru formuł uniwersalnych (lub nawet formuł ze zmiennymi wolnymi) języka KRP do niespełnialności pewnego zbioru formuł KRZ.

Twierdzenie 7. ***Twierdzenie Herbranda.***

Niech S będzie zbiorem formuł otwartych języka KRP. Wtedy zachodzi alternatywa:

- (a) S ma model Herbranda;
- (b) S nie jest spełnialny. W szczególności, istnieje skończenie wiele podstawień (termów bazowych za zmienne wolne) formuł z S takich, że koniunkcja formuł otrzymanych w wyniku tych podstawień nie jest spełnialna.

Twierdzenie Herbranda

Warunek (b) powyżej jest równoważny warunkowi:

- (c) Istnieje skończenie wiele podstawień (termów bazowych za zmienne wolne) negacji formuł z S takich, że alternatywa formuł otrzymanych w wyniku tych podstawień jest tautologią KRP. Zauważmy, że w tym przypadku możemy tak dobrać zmienne zdaniowe (z języka KRZ), że odpowiednia alternatywa tych zmiennych jest tautologią KRZ.

Ważnym wnioskiem z twierdzenia Herbranda jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 8.

Jeśli $\alpha(\overrightarrow{x})$ jest formułą bez kwantyfikatorów w języku KRP z co najmniej jedną stałą indywiduową, to $\exists \overrightarrow{x}\ \alpha(\overrightarrow{x})$ jest tautologią wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją termy bazowe $\overrightarrow{t_i}$ takie, że alternatywa $\alpha(\overrightarrow{t_1}) \vee \ldots \vee \alpha(\overrightarrow{t_n})$ jest tautologią. [Wyrażenie $\overrightarrow{x}$ oznacza ciąg zmiennych wolnych. Podobnie, wyrażenie $\overrightarrow{t}$ oznacza ciąg termów bazowych.]

Twierdzenie Herbranda

Twierdzenie powyższe można również wzmocnić do twierdzenia następującego.

Twierdzenie 9.

Niech α będzie zdaniem w prefiksowej postaci normalnej (w języku L), a β formułą w prefiksowej postaci normalnej równoważną inferencyjnie (tablicowo) zdaniu $\neg\alpha$ oraz niech $\gamma(\overrightarrow{x})$ będzie otwartą skolemizacją formuły β (w języku L', tworzoną wedle konstrukcji podanej w twierdzeniu 3). Wtedy α jest tautologią wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją termy bazowe $\overrightarrow{t_1}, \ldots, \overrightarrow{t_n}$ języka L' takie, że alternatywa $\neg\gamma(\overrightarrow{t_1}) \vee \ldots \vee \neg\gamma(\overrightarrow{t_n})$ jest tautologią.

(Formuła jest otwarta, jeśli zawiera zmienne wolne. W przeciwnym przypadku jest zamknięta.)

Twierdzenie Churcha

Metoda tablic analitycznych jest jedynie ***półalgorytmem***, tj.:

- Jeśli α ***jest*** tautologią KRP, to isnieje tablicowy dowód α.
- Jeśli α ***nie jest*** tautologią KRP, to (systematyczna) tablica analityczna dla α może zawierać gałąź, którą należy przedłużać w nieskończoność; w konsekwencji, nie można ***w skończonej liczbie kroków*** wykazać z pomocą tablic analitycznych, że dana formuła ***nie jest*** tautologią KRP.

Powyższe ograniczenie nie dotyczy jedynie metody tablic analitycznych. **Twierdzenie Churcha** stwierdza, że nie istnieje metoda algorytmiczna ustalania, czy dowolna formuła α języka KRP jest, czy też nie jest tautologią tego rachunku. Dowód podano w poprzednim wykładzie.

Twierdzenie Churcha

Nie ma zatem efektywnej metody, tj. wykorzystującej jedynie z góry określone, mechaniczne kroki, która w skończonej liczbie takich kroków pozwoliłaby ***rozstrzygnąć***, dla dowolnej formuły α języka KRP, czy α jest, czy też nie jest tautologią tego rachunku. Rachunek predykatów jest ***nierozstrzygalny***.

Jak wiemy, istnieją metody syntaktyczne (np. metoda aksjomatyczna) takie, że ogół ***tez*** KRP pokrywa się ze zbiorem wszystkich tautologii KRP. Nie jest to żadna sprzeczność z wypowiedzianym przed chwilą twierdzeniem Churcha. W metodzie aksjomatycznej mówimy, że α jest ***tezą*** KRP, gdy ***istnieje*** dowód α z aksjomatów tego rachunku. I chociaż zbiór aksjomatów jest obliczalny (efektywnie podany), a także reguły wnioskowania są obliczalne, czego konsekwencją jest to, że pojęcie ***dowodu*** również jest obliczalne, to nie istnieje żadna efektywna metoda ograniczenia złożoności (np. długości) dowodu danej tezy.

Twierdzenie Churcha

Tak więc, chociaż wiemy, że dla dowolnej formuły α języka KRP, że:

- α jest tezą KRP wtedy i tylko wtedy, gdy α jest tautologią KRP,

to nie możemy z góry określić długości dowodów tez KRP. I to właśnie kryje się za nierozstrzygalnością KRP.

Więcej na ten temat zainteresowany czytelnik może poczytać w literaturze, której spis podano na poprzednim wykładzie.

Metoda TA dla KRP z identycznością

Jeśli pracujemy w języku KRP z identycznością, to identyczność jest traktowana w metodzie TA jako ***stała logiczna***. Trzeba zatem podać dodatkowe reguły dotyczące tablic atomowych zawierających predykat identyczności. Ponadto, twierdzenia o trafności oraz o pełności tablic analitycznych dla języka KRP z identycznością wymagają osobnych dowodów.

Identyczność jest relacją równoważności, czyli jest zwrotna, symetryczna oraz przechodnia. Nadto, przedmioty identyczne są nieodróżnialne, ani przez żadną własność, ani poprzez pozostawanie w zależnościach z innymi przedmiotami.

Zauważmy, że bez relacji identyczności praktycznie niewyobrażalne jest uprawianie większości dyscyplin matematycznych — współczesne rozumienie pojęcia ***funkcji***, jednego z najistotniejszych pojęć matematycznych, wykorzystuje relację identyczności.

Identyczność

Dla ***predykatu*** identyczności tradycyjnie używanym symbolem jest $=$ i tradycja ta zostanie tu uszanowana. To, że ***relację*** identyczności oznaczamy tym samym symbolem, nie powinno prowadzić do nieporozumień — z kontekstu zawsze będzie jasno wynikać, czy odnosimy się do predykatu (język), czy do relacji (odniesienie przedmiotowe języka, interpretacje).

Tak więc, identyczność termów t_1 oraz t_2 zapisywać będziemy formułą: $t_1 = t_2$. Formułę $\neg t_1 = t_2$ będziemy (także zgodnie z tradycją), zapisywać też czasem w postaci $t_1 \neq t_2$.

Identyczność

O predykacie identyczności zakłada się następujące aksjomaty:

- (1) $\forall x\,(x = x)$
- (2) $\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n\,((x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n) \rightarrow (f(x_1, \ldots, x_n) = f(y_1, \ldots, y_n)))$
- (3) $\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n\,((x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n) \rightarrow (P(x_1, \ldots, x_n) \equiv Q(y_1, \ldots, y_n)))$.

dla wszystkich *n*-argumentowych symboli funkcyjnych *f* oraz wszystkich predykatów *n*-argumentowych, dla wszystkich *n*.

Zwrotność predykatu identyczności wyraża warunek (1). Własności: symetryczności oraz przechodniości predykatu identyczności, czyli:

- $\forall x \forall y\,(x = y \rightarrow y = x)$
- $\forall x \forall y \forall z\,((x = y \wedge y = z) \rightarrow x = z)$

są konsekwencją powyższych aksjomatów.

Tablice atomowe w języku KRP z identycznością

Tablicami atomowymi są, oprócz wymienionych w definicji TA dla KRP, również wszystkie drzewa postaci:

α $\vert$ $t_1 = t_2$ $\vert$ $\alpha(t_2//t_1)$	α $\vert$ $t_2 = t_1$ $\vert$ $\alpha(t_2//t_1)$

gdzie α jest dowolnym zdaniem języka KRP z identycznością, a t_1 oraz t_2 dowolnymi termami bazowymi tego języka, oraz gdzie $\alpha(t_2//t_1)$ jest formułą powstającą z α poprzez zastąpienie ***pewnych*** wystąpień termu t_1 wystąpieniami termu t_2.

Tablice analityczne w języku KRP z identycznością

Definicja ***tablic analitycznych*** w języku KRP z identycznością jest taka sama, jak definicja TA w KRP, przy czym tablice atomowe są teraz oczywiście rozumiane w sensie definicji podanej powyżej.

- Gałąź P tablicy analitycznej D jest ***sprzeczna***, jeśli:
  - α oraz $\neg\alpha$ występują w P, dla pewnego zdania α, ***lub***
  - $\neg(t = t)$ występuje w P, dla pewnego termu t.
- Tablica D jest ***sprzeczna***, jeśli każda gałąź w D jest sprzeczna.

Wszystkie pozostałe definicje (tablice systematyczne, tablice zakończone, dowody tablicowe, itd.) przenoszą się automatycznie na przypadek języka KRP z identycznością.

Reguły tworzenia tablic analitycznych

Reguły dotyczące predykatu identyczności w metodzie tablic analitycznych można sprowadzić np. do następujących dwóch:

- Jeśli t_1 oraz t_2 są dowolnymi termami, α zawiera jakieś wystąpienia termu t_1, to gałąź tablicy zawierającą formuły α oraz $t_1 = t_2$ przedłużamy dodając formułę $\alpha(t_2//t_1)$:

  $R_{12}(=)$

  $$\begin{array}{c} \alpha \\ | \\ t_1 = t_2 \\ | \\ \alpha(t_2//t_1) \end{array}$$

  gdzie $\alpha(t_2//t_1)$ jest formułą powstającą z α poprzez zastąpienie pewnych wystąpień termu t_1 wystąpieniami termu t_2.

Reguły tworzenia tablic analitycznych

- Jeśli t_1 oraz t_2 są dowolnymi termami, α zawiera jakieś wystąpienia termu t_1, to gałąź drzewa zawierającą formuły α oraz $t_2 = t_1$ przedłużamy dodając formułę $\alpha(t_2//t_1)$:

  $R_{21}(=)$

  $$\begin{array}{c} \alpha \\ | \\ t_2 = t_1 \\ | \\ \alpha(t_2//t_1) \end{array}$$

  gdzie $\alpha(t_2//t_1)$ jest formułą powstającą z α poprzez zastąpienie pewnych wystąpień termu t_1 wystąpieniami termu t_2.

Umowa notacyjna. Zastosowanie reguły $R_{ij}(=)$ w kroku $^{n.}$ do formuły o numerze (m) z wykorzystaniem identyczności termów t_1 oraz t_2 wyrażonej w formule o numerze (k) zaznaczać będziemy umieszczonym z prawej strony formuły o numerze (m) komentarzem: $^{n.^{\mathbf{k},\mathbf{t_2}//\mathbf{t_1}}}$.

Poprawność metody TA w KRP z identycznością

Chociaż nie możemy zagwarantować środkami czysto syntaktycznymi, że interpretacją predykatu identyczności jest relacja identyczności, to możemy mimo to zagwarantować, że metoda tablic analitycznych w języku KRP z identycznością jest trafna i pełna.

Zachodzi ***Twierdzenie o trafności metody tablic analitycznych w KRP z identycznością*** i jego dowód jest natychmiastowy.

Dla dowodu twierdzenia o pełności metody TA w KRP z identycznością trzeba wprowadzić pojęcie ***modelu ilorazowego***.

Model ilorazowy

Niech $\mathfrak{M}$ będzie strukturą otrzymaną w twierdzeniu o pełności metody TA w KRP (pomijamy indeks odnoszący się do gałęzi, gdyż nie jest on tu istotny), dla systematycznej tablicy analitycznej D ze zbioru założeń S. Przypominamy, że elementami uniwersum $\mathfrak{M}$ są termy bazowe.

Definiujemy relację $\cong$ w uniwersum modelu $\mathfrak{M}$:

- $t_1 \cong t_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models t_1 = t_2$.

Wtedy $\cong$ jest relacją równoważności w uniwersum modelu $\mathfrak{M}$. Niech $[t]$ oznacza klasę równoważności termu t względem tej relacji.

Budujemy ***model ilorazowy*** $\mathfrak{M}/_{\cong}$ w sposób następujący:

Model ilorazowy

- uniwersum modelu $\mathfrak{M}/_{\cong}$ to rodzina wszystkich klas równoważności relacji $\cong$.
- $f^{\mathfrak{M}/_{\cong}}([t_1], \ldots, [t_n]) = [f^{\mathfrak{M}}(t_1, \ldots, t_n)]$, dla każdego symbolu funkcyjnego f.
- $\mathfrak{M}/_{\cong} \models R([t_1], \ldots, [t_n])$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models R(t_1, \ldots, t_n)$, dla każdego predykatu (różnego od predykatu identyczności).

W standardowy sposób pokazuje się, że jest to poprawna definicja, tj., że nie zależy ona od wyboru reprezentantów z poszczególnych klas równoważności $\cong$.

Interpretacja predykatu identyczności w modelu $\mathfrak{M}/_{\cong}$ jest relacją identyczności (a nie jakąkolwiek inną relacją równoważności spełniającą aksjomaty identyczności).

Pełność metody TA w KRP z identycznością

Twierdzenie 10. ***Pełność metody tablic analitycznych w KRP z identycznością.***

Dla dowolnego zbioru zdań S zawierającego aksjomaty identyczności zachodzi alternatywa:

- S jest tablicowo sprzeczny.
- Istnieje model dla S, w którym predykat identyczności interpretowany jest jako relacja identyczności.

Twierdzenia o trafności i pełności metody TA w KRP z identycznością gwarantują, że można poprawnie używać tej metody do rozwiązywania takich samych problemów, jak w KRP.

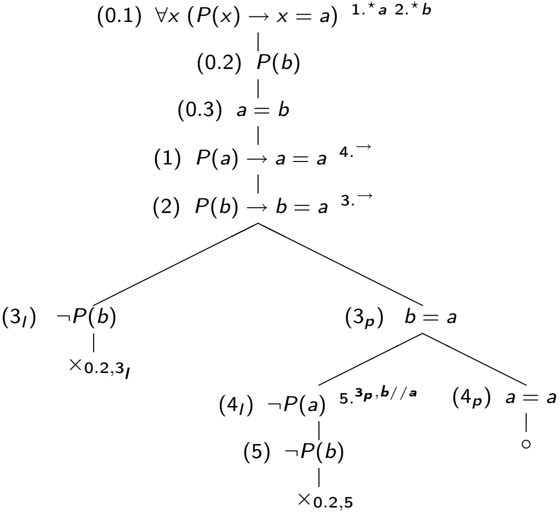
Przykład 1

Pokażemy, że następujące formuły tworzą zbiór semantycznie niesprzeczny:

$$\forall x\,(P(x) \rightarrow x = a)$$
$$P(b)$$
$$a = b$$

Przypuszczamy zatem, że podane wyżej formuły są prawdziwe w co najmniej jednej interpretacji. Przypuszczenie to zostanie potwierdzone, o ile tablica analityczna, tj. drzewo, w którego pniu umieszczamy te formuły będzie miało co najmniej jedną gałąź otwartą. Budujemy tablicę:

Przykład 1



$(0.1)\ \forall x\,(P(x) \rightarrow x = a)\ ^{1.^{\star}a\ 2.^{\star}b}$

$(0.2)\ P(b)$

$(0.3)\ a = b$

$(1)\ P(a) \rightarrow a = a\ ^{4.^{\rightarrow}}$

$(2)\ P(b) \rightarrow b = a\ ^{3.^{\rightarrow}}$

$(3_l)\ \neg P(b)$

$\times_{0.2,3_l}$

$(3_p)\ b = a$

$(4_l)\ \neg P(a)\ ^{5.^{3_p, b//a}}$

$(5)\ \neg P(b)$

$\times_{0.2,5}$

$(4_p)\ a = a$

$\circ$

Tablica ma gałąź otwartą. Zbiór semantycznie niesprzeczny.

Przykład 2

Pokażemy, że każda relacja, która jest jednocześnie symetryczna oraz antysymetryczna jest zawarta w relacji identyczności.

W tym celu wystarczy pokazać, że następująca reguła wnioskowania jest niezawodna:

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x \forall y\,(P(x,y) \rightarrow P(y,x))\\ \forall x \forall y\,(P(x,y) \wedge P(y,x) \rightarrow x = y)\end{array}}{\forall x \forall y\,(P(x,y) \rightarrow x = y)}$$

Budujemy tablicę analityczną, tj. drzewo, w którego pniu umieszczamy przesłanki oraz zaprzeczenie wniosku badanej reguły [ponieważ tablica nie mieści się na jednym slajdzie, przedstawiamy ją w dwóch częściach]:

Przykład 2

$$(0.1)\quad \forall x \forall y\,(P(x,y) \rightarrow P(y,x))\quad {}^{4.\star a}$$

$$(0.2)\quad \forall x \forall y\,(P(x,y) \wedge P(y,x) \rightarrow x = y)\quad {}^{6.\star a}$$

$$(0.3)\quad \neg\forall x \forall y\,(P(x,y) \rightarrow x = y)\quad {}^{1.\surd a}$$

$$(1)\quad \neg\forall y\,(P(a,y) \rightarrow a = y)\quad {}^{2.\surd b}$$

$$(2)\quad \neg(P(a,b) \rightarrow a = b)\quad {}^{3.\neg\rightarrow}$$

$$(3_g)\quad P(a,b)$$

$$(3_d)\quad a \neq b$$

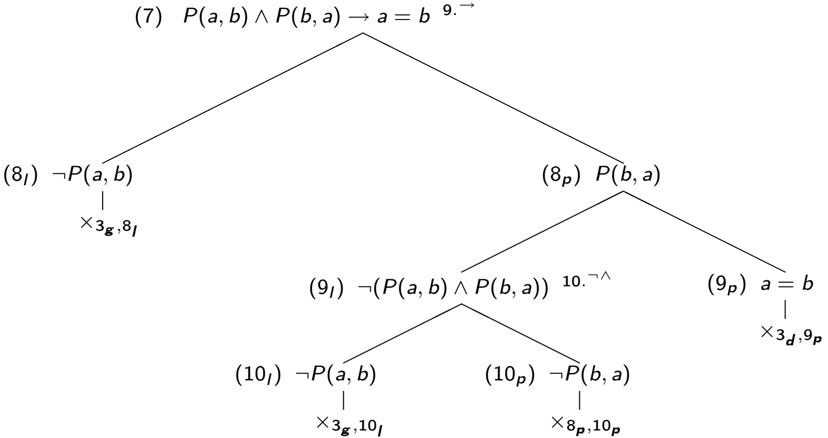
$$(4)\quad \forall y\,(P(a,y) \rightarrow yPa)\quad {}^{5.\star b}$$

$$(5)\quad P(a,b) \rightarrow P(a,b)\quad {}^{8.\rightarrow}$$

$$(6)\quad \forall y\,(P(a,y) \wedge P(y,a) \rightarrow a = y)\quad {}^{7.\star b}$$

$$(7)\quad P(a,b) \wedge P(b,a) \rightarrow a = b\quad {}^{9.\rightarrow}$$

Przykład 2



(7) $P(a,b) \wedge P(b,a) \rightarrow a = b$ $^{9.\rightarrow}$

(8_l) $\neg P(a,b)$

$\times_{3_g, 8_l}$

(8_p) $P(b,a)$

(9_l) $\neg(P(a,b) \wedge P(b,a))$ $^{10.\neg\wedge}$

(9_p) $a = b$

$\times_{3_d, 9_p}$

(10_l) $\neg P(a,b)$

$\times_{3_g, 10_l}$

(10_p) $\neg P(b,a)$

$\times_{8_p, 10_p}$

Tablica zamknięta. Reguła niezawodna.

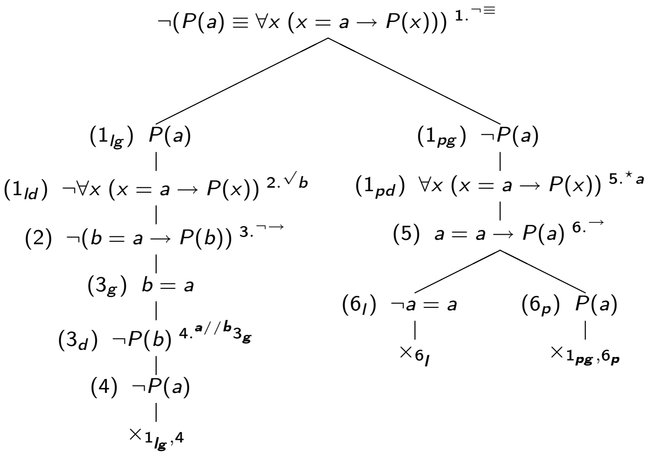
Przykład 3

Pokażemy, że następująca formuła jest tautologią KRP z identycznością:

$$P(a) \equiv \forall x\,(x = a \to P(x))$$

W tym celu wystarczy pokazać, że powyższa formuła ma dowód tablicowy, tj., że tablica analityczna jej negacji ma wszystkie gałęzie zamknięte:

Przykład 3



$\neg(P(a) \equiv \forall x\,(x = a \rightarrow P(x)))\ ^{1.\neg\equiv}$

$(1_{lg})\ P(a)$

$(1_{ld})\ \neg\forall x\,(x = a \rightarrow P(x))\ ^{2.\surd b}$

$(2)\ \neg(b = a \rightarrow P(b))\ ^{3.\neg\rightarrow}$

$(3_g)\ b = a$

$(3_d)\ \neg P(b)\ ^{4.a//b\,3_g}$

$(4)\ \neg P(a)$

$\times_{1_{lg},4}$

$(1_{pg})\ \neg P(a)$

$(1_{pd})\ \forall x\,(x = a \rightarrow P(x))\ ^{5.\star a}$

$(5)\ a = a \rightarrow P(a)\ ^{6.\rightarrow}$

$(6_l)\ \neg a = a$

$\times_{6_l}$

$(6_p)\ P(a)$

$\times_{1_{pg},6_p}$

Tablica sprzeczna. Badana formuła jest tautologią KRP.

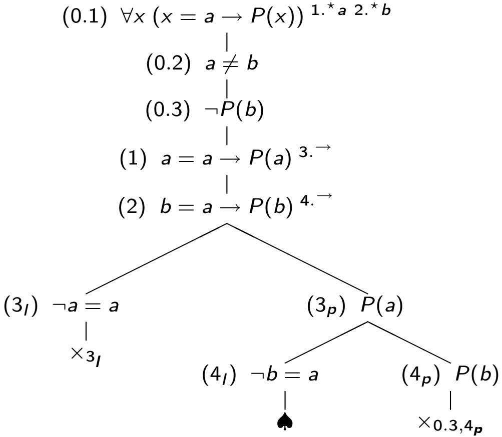
Przykład 4

Ustalimy, czy następująca reguła jest niezawodna:

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x(x = a \rightarrow P(x))\\ a \neq b\end{array}}{P(b)}$$

Budujemy tablicę analityczną, tj. drzewo, w którego pniu umieszczamy przesłanki oraz zaprzeczony wniosek:

Przykład 4



(0.1) $\forall x\,(x = a \rightarrow P(x))$ $^{1.^{\star}a\ 2.^{\star}b}$

(0.2) $a \neq b$

(0.3) $\neg P(b)$

(1) $a = a \rightarrow P(a)$ $^{3.\rightarrow}$

(2) $b = a \rightarrow P(b)$ $^{4.\rightarrow}$

(3_l) $\neg a = a$

$\times_{3_l}$

(3_p) $P(a)$

(4_l) $\neg b = a$

♠

(4_p) $P(b)$

$\times_{0.3,4_p}$

Tablica ma gałąź otwartą. Badana reguła jest zawodna.

Metoda TA dla KRP z symbolami funkcyjnymi

Dokładniejsze omówienie działania metody TA dla KRP z symbolami funkcyjnymi wymaga, jak już powiedziano, wprowadzenia pojęcia ***unifikacji***, czego w tym wykładzie nie robimy.

Poniżej podajemy jedynie kilka prostych przykładów, w których nie trzeba odwoływać się do pojęcia unifikacji.

Niektóre dowody zapisywane będą nie w postaci drzew, ale w postaci tabel, zawierających ponumerowane wiersze dowodu oraz stosowne komentarze dowodowe.

Przykład 4: Własności Funkcji

Udowodnimy, że dla dowolnych funkcji f, g oraz h:

$$(\maltese) \quad \forall x \forall y\, ((x = y \wedge f(y) = g(y)) \rightarrow (h(f(x)) = h(g(y)))).$$

Oczywiście, milcząco zakładamy tu, że dziedziny i przeciwdziedziny rozważanych funkcji są dobrze określone.

Budujemy tablicę analityczną, tj. drzewo, w którego korzeniu umieszczamy zaprzeczenie warunku $(\maltese)$. Założenia, iż f, g oraz h są funkcjami będą wykorzystywane w regułach identyczności (podstawiania termów).

Ponieważ tablica jest sprzeczna, więc stanowi dowód warunku $(\maltese)$:

Przykład 4: Własności Funkcji

$$\neg\forall x \forall y\, ((x = y \wedge f(y) = g(y)) \rightarrow h(f(x)) = h(g(y)))\ ^{1.\surd a}$$

$$(1)\quad \neg\forall y\, ((a = y \wedge f(y) = g(y)) \rightarrow h(f(a)) = h(g(y)))\ ^{2.\surd b}$$

$$(2)\quad \neg((a = b \wedge f(b) = g(b)) \rightarrow h(f(a)) = h(g(b)))\ ^{3.\neg\rightarrow}$$

$$(3_g)\quad a = b \wedge f(b) = g(b)\ ^{4.\wedge}$$

$$(3_d)\quad \neg h(f(a)) = h(g(b))\ ^{5.\mathbf{4_g}.\mathbf{a}//\mathbf{b}}$$

$$(4_g)\quad a = b$$

$$(4_d)\quad f(b) = g(b)\ ^{6.\mathbf{4_g}.\mathbf{a}//\mathbf{b}}$$

$$(5)\quad \neg h(f(a)) = h(g(a))\ ^{7.\mathbf{6}.\mathbf{f(a)}//\mathbf{g(a)}}$$

$$(6)\quad f(a) = g(a)$$

$$(7)\quad \neg h(f(a)) = h(f(a))$$

$$\times_7$$

Arytmetyka Robinsona

Tabliczki dodawania i mnożenia zbudować można w **Arytmetyce Robinsona**. Jest to system aksjomatyczny w języku KRP z identycznością oraz następującymi symbolami funkcyjnymi:

- σ — jednoargumentowy symbol funkcyjny; wyrażenie $\sigma(t)$, gdzie t jest dowolnym termem, czytamy: ***następnik*** t;
- $\oplus$ — dwuargumentowy symbol funkcyjny; wyrażenie $\oplus(t_1, t_2)$, gdzie t_1, t_2 są dowolnymi termami, czytamy: ***suma*** t_1 i t_2;
- $\otimes$ — dwuargumentowy symbol funkcyjny; wyrażenie $\otimes(t_1, t_2)$, gdzie t_1, t_2 są dowolnymi termami, czytamy: ***iloczyn*** t_1 i t_2.

Nadto, w języku Arytmetyki Robinsona używamy stałej indywidualnej $\bigcirc$. Jest to symbol, który czytamy: ***zero***.

Arytmetyka Robinsona

Aksjomaty dotyczące jedynie predykatu identyczności:

- $\forall x\,(x = x)$
- $\forall x \forall y\,(x = y \rightarrow y = x)$
- $\forall x \forall y \forall z\,((x = y \wedge y = z) \rightarrow x = z)$.

Aksjomaty identyczności dla symboli $\bigcirc$, σ, $\oplus$ oraz $\otimes$:

- $\forall x \forall y\,(x = y \rightarrow \sigma(x) = \sigma(y))$
- $\forall x \forall y \forall z\,(x = y \rightarrow \oplus(x, z) = \oplus(y, z))$
- $\forall x \forall y \forall z\,(x = y \rightarrow \oplus(z, x) = \oplus(z, y))$
- $\forall x \forall y \forall z\,(x = y \rightarrow \otimes(x, z) = \otimes(y, z))$
- $\forall x \forall y \forall z\,(x = y \rightarrow \otimes(z, x) = \otimes(z, y))$.

Arytmetyka Robinsona

Aksjomaty specyficzne systemu Arytmetyki Robinsona:

- A_1: $\forall x \forall y\ (x \neq y \rightarrow \sigma(x) \neq \sigma(y))$
- A_2: $\forall x\ (\bigcirc \neq \sigma(x))$
- A_3: $\forall x\ (x \neq \bigcirc \rightarrow \exists y\ (x = \sigma(y)))$
- A_4: $\forall x\ (\oplus(x, \bigcirc) = x)$
- A_5: $\forall x \forall y\ (\oplus(x, \sigma(y)) = \sigma(\oplus(x, y)))$
- A_6: $\forall x\ (\otimes(x, \bigcirc) = \bigcirc)$
- A_7: $\forall x \forall y\ (\otimes(x, \sigma(y)) = \oplus(\otimes(x, y), x))$.

Arytmetyka Robinsona

Modelem zamierzonym dla tych aksjomatów jest struktura, której uniwersum jest zbiór wszystkich liczb naturalnych, a denotacjami poszczególnych terminów pozalogicznych są:

- symbolu $\bigcirc$ — liczba zero;
- symbolu σ — operacja następnika;
- symbolu $\oplus$ — operacja dodawania;
- symbolu $\otimes$ — operacja mnożenia.

Arytmetyka Robinsona

Oto dowód, iż $\oplus(\sigma(\sigma(\bigcirc)), \sigma(\sigma(\bigcirc))) = \sigma(\sigma(\sigma(\sigma(\bigcirc))))$, czyli że ***dwa plus dwa jest cztery***:

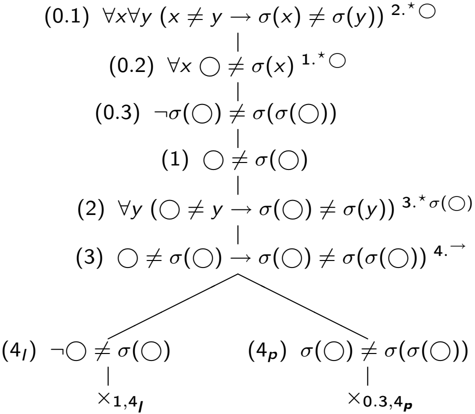
1.	$\forall x \ \oplus(x, \bigcirc) = x$	aksjomat A_4
2.	$\forall x \forall y \ \oplus(x, \sigma(y)) = \sigma(\oplus(x, y))$	aksjomat A_5
3.	$\neg(\oplus(\sigma(\sigma(\bigcirc)), \sigma(\sigma(\bigcirc))) = \sigma(\sigma(\sigma(\sigma(\bigcirc)))))$	z.d.n.
4.	$\oplus(\sigma(\sigma(\bigcirc)), \bigcirc) = \sigma(\sigma(\bigcirc))$	$R(\forall)$ dla $\sigma(\sigma(\bigcirc))$ w A_4
5.	$\forall y \ \oplus(\sigma(\sigma(\bigcirc)), \sigma(y)) = \sigma(\oplus(\sigma(\sigma(\bigcirc)), y))$	$R(\forall)$ dla $\sigma(\sigma(\bigcirc))$ w A_5
6.	$\oplus(\sigma(\sigma(\bigcirc)), \sigma(\bigcirc)) = \sigma(\oplus(\sigma(\sigma(\bigcirc)), \bigcirc))$	$R(\forall)$ dla $\bigcirc$ w 5.
7.	$\oplus(\sigma(\sigma(\bigcirc)), \sigma(\sigma(\bigcirc))) = \sigma(\oplus(\sigma(\sigma(\bigcirc)), \sigma(\bigcirc)))$	$R(\forall)$ dla $\sigma(\bigcirc)$ w 5.
8.	$\oplus(\sigma(\sigma(\bigcirc)), \sigma(\sigma(\bigcirc))) = \sigma(\oplus(\sigma(\sigma(\bigcirc)), \bigcirc))$	6. i 7., reguły dla $=$
9.	$\oplus(\sigma(\sigma(\bigcirc)), \sigma(\sigma(\bigcirc))) = \sigma(\sigma(\sigma(\sigma(\bigcirc))))$	4. i 8., reguły dla $=$
10.	$\times_{3,9}$	Sprzeczność: $3, 9$.

Arytmetyka Robinsona

W Arytmetyce Robinsona łatwo dowodzi się wszelakich *konkretnych* faktów arytmetycznych, np.: $\bigcirc \neq \sigma(\bigcirc)$, $\sigma(\bigcirc) \neq \sigma(\sigma(\bigcirc))$, itp. Natomiast nie są w niej dowodliwe liczne zdania generalnie skwantyfikowane, jak np. $\forall x\, (x \neq \sigma(x))$. Przykładowe dowody zdań tego drugiego rodzaju podamy za chwilę, omawiając aksjomatykę Arytmetyki Peana.

Pokażmy jeszcze jeden dowód w Arytmetyce Robinsona: udowodnimy mianowicie, że z aksjomatów A_1 oraz A_2 wynika logicznie nierówność $\sigma(\bigcirc) \neq \sigma(\sigma(\bigcirc))$, tj. iż jeden jest różne od dwa. Budujemy tablicę analityczną, tj. drzewo, w którego pniu umieszczamy A_1 oraz A_2, a także $\neg\sigma(\bigcirc) \neq \sigma(\sigma(\bigcirc))$.

Arytmetyka Robinsona



$$(0.1)\ \ \forall x\forall y\,(x\neq y\rightarrow\sigma(x)\neq\sigma(y))\ ^{2.\star\bigcirc}$$

$$(0.2)\ \ \forall x\,\bigcirc\neq\sigma(x)\ ^{1.\star\bigcirc}$$

$$(0.3)\ \ \neg\sigma(\bigcirc)\neq\sigma(\sigma(\bigcirc))$$

$$(1)\ \ \bigcirc\neq\sigma(\bigcirc)$$

$$(2)\ \ \forall y\,(\bigcirc\neq y\rightarrow\sigma(\bigcirc)\neq\sigma(y))\ ^{3.\star\sigma(\bigcirc)}$$

$$(3)\ \ \bigcirc\neq\sigma(\bigcirc)\rightarrow\sigma(\bigcirc)\neq\sigma(\sigma(\bigcirc))\ ^{4.\rightarrow}$$

$$(4_l)\ \ \neg\bigcirc\neq\sigma(\bigcirc) \qquad (4_p)\ \ \sigma(\bigcirc)\neq\sigma(\sigma(\bigcirc))$$

$$\times_{1,4_l} \qquad \times_{0.3,4_p}$$

Tablicowy dowód $\sigma(\bigcirc)\neq\sigma(\sigma(\bigcirc))$.

Arytmetyka Robinsona

Przedstawimy dowody następujących zdań języka Arytmetyki Robinsona:

$$\oplus(\bigcirc, \sigma(\bigcirc)) = \sigma(\bigcirc)$$

$$\otimes(\bigcirc, \sigma(\bigcirc)) = \bigcirc.$$

Dowód $\oplus(\bigcirc, \sigma(\bigcirc)) = \sigma(\bigcirc)$

0.1.	$\forall x\ (\oplus(x, \bigcirc) = x)$	aksjomat A_4
0.2.	$\forall x \forall y\ (\oplus(x, \sigma(y)) = \sigma(\oplus(x, y)))$	aksjomat A_5
0.3.	$\neg(\oplus(\bigcirc, \sigma(\bigcirc)) = \sigma(\bigcirc))$	z.d.n.
1.	$\oplus(\bigcirc, \bigcirc) = \bigcirc$	0.1., $R(\forall)$ dla $\bigcirc$
2.	$\forall y\ (\oplus(\bigcirc, \sigma(y)) = \sigma(\oplus(\bigcirc, y)))$	0.2., $R(\forall)$ dla $\bigcirc$
3.	$\oplus(\bigcirc, \sigma(\bigcirc)) = \sigma(\oplus(\bigcirc, \bigcirc))$	2, $R(\forall)$ dla $\bigcirc$
4.	$\oplus(\bigcirc, \sigma(\bigcirc)) = \sigma(\bigcirc)$	1,3, $R(=)$
5.	$\times_{0.3.,4}$	Sprzeczność.

Dowód $\otimes(\bigcirc, \sigma(\bigcirc)) = \bigcirc$

0.1.	$\forall x\ (\oplus(x, \bigcirc) = x)$	aksjomat A_4
0.2.	$\forall x\ (\otimes(x, \bigcirc) = \bigcirc)$	aksjomat A_6
0.3.	$\forall x \forall y\ (\otimes(x, \sigma(y)) = \oplus(\otimes(x, y), x))$	aksjomat A_7
0.4.	$\neg(\otimes(\bigcirc, \sigma(\bigcirc)) = \bigcirc)$	z.d.n.
1.	$\otimes(\bigcirc, \bigcirc) = \bigcirc$	0.2., $R(\forall)$ dla $\bigcirc$
2.	$\forall y\ (\otimes(\bigcirc, \sigma(y)) = \oplus(\otimes(\bigcirc, y), \bigcirc))$	0.3., $R(\forall)$ dla $\bigcirc$
3.	$\otimes(\bigcirc, \sigma(\bigcirc)) = \oplus(\otimes(\bigcirc, \bigcirc), \bigcirc)$	2, $R(\forall)$ dla $\bigcirc$
4.	$\otimes(\bigcirc, \sigma(\bigcirc)) = \oplus(\bigcirc, \bigcirc)$	1,3, $R(=)$
5.	$\oplus(\bigcirc, \bigcirc) = \bigcirc$	0.1., $R(\forall)$ dla $\bigcirc$
6.	$\otimes(\bigcirc, \sigma(\bigcirc)) = \bigcirc$	4,5, $R(=)$
7.	$\times_{0.4.,6}$	Sprzeczność.

Arytmetyka Peana

Rozszerzymy teraz system arytmetyki Robinsona poprzez dodanie do jego aksjomatów ***schematu*** aksjomatów, zwanego ***zasadą indukcji***. Otrzymany w ten sposób system nazywa się **Arytmetyką Peana**.

Stałe pozalogiczne Arytmetyki Peana są takie same, jak w Arytmetyce Robinsona:

- σ — jednoargumentowy symbol funkcyjny; wyrażenie $\sigma(t)$, gdzie t jest dowolnym termem, czytamy: *następnik* t;
- $\oplus$ — dwuargumentowy symbol funkcyjny; wyrażenie $\oplus(t_1, t_2)$, gdzie t_1, t_2 są dowolnymi termami, czytamy: *suma* t_1 i t_2;
- $\otimes$ — dwuargumentowy symbol funkcyjny; wyrażenie $\otimes(t_1, t_2)$, gdzie t_1, t_2 są dowolnymi termami, czytamy: *iloczyn* t_1 i t_2;
- $\bigcirc$ — stała indywidualna; symbol $\bigcirc$ czytamy: *zero*.

Arytmetyka Peana

Aksjomaty identyczności dla symboli $\bigcirc$, σ, $\oplus$ oraz $\otimes$ są takie same, jak w Arytmetyce Robinsona.

Aksjomaty specyficzne Arytmetyki Peana:

- P_1: $\forall x \forall y\ (x \neq y \rightarrow \sigma(x) \neq \sigma(y))$
- P_2: $\forall x\ (\bigcirc \neq \sigma(x))$
- P_3: $\forall x\ (\oplus(x, \bigcirc) = x)$
- P_4: $\forall x \forall y\ (\oplus(x, \sigma(y)) = \sigma(\oplus(x, y)))$
- P_5: $\forall x\ (\otimes(x, \bigcirc) = \bigcirc)$
- P_6: $\forall x \forall y\ (\otimes(x, \sigma(y)) = \oplus(\otimes(x, y), x))$
- P_7: $(A(\bigcirc) \wedge \forall x\ (A(x) \rightarrow A(\sigma(x)))) \rightarrow \forall x\ A(x)$
  (dla dowolnej formuły A, o jednej zmiennej wolnej, języka Arytmetyki Peana).

Arytmetyka Peana

P_7 nie jest jednym aksjomatem, lecz schematem (przeliczalnie wielu) aksjomatów. P_7 nazywamy ***zasadą indukcji***.

Rozważmy następującą regułę wnioskowania:

$$\frac{\begin{array}{c} A(\bigcirc) \\ \neg\forall x\, A(x) \end{array}}{\exists x\, (A(x) \wedge \neg A(\sigma(x)))}$$

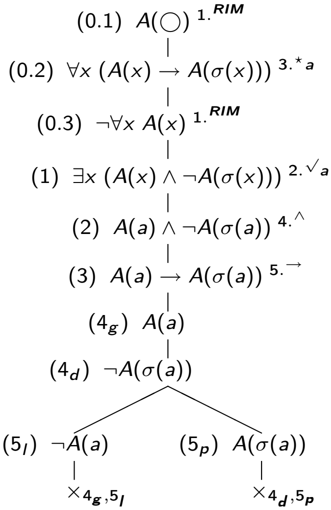
gdzie $A(x)$ jest dowolną formułą języka Arytmetyki Peana z jedną zmienną wolną. Nazwiemy ją ***regułą indukcji matematycznej*** (w skrócie: RIM).

Arytmetyka Peana

Jeśli do aksjomatów P_1–P_6 dołączyć regułę RIM, to można udowodnić — co samo w sobie nie jest zaskakujące — zasadę indukcji P_7. W tym celu wystarczy dowieść, że z przesłanek $A(\bigcirc)$ oraz $\forall x\, (A(x) \rightarrow A(\sigma(x)))$ wynika logicznie wniosek $\forall x\, A(x)$, dla dowolnej formuły $A(x)$ języka Arytmetyki Peana z jedną zmienną wolną.

Budujemy więc tablicę analityczną, tj. drzewo, w którego pniu umieszczamy powyższe przesłanki oraz zaprzeczony wniosek:

Arytmetyka Peana



(0.1) $A(\bigcirc)^{1.\,RIM}$

(0.2) $\forall x\,(A(x) \rightarrow A(\sigma(x)))^{3.\,\star a}$

(0.3) $\neg\forall x\, A(x)^{1.\,RIM}$

(1) $\exists x\,(A(x) \wedge \neg A(\sigma(x)))^{2.\,\surd a}$

(2) $A(a) \wedge \neg A(\sigma(a))^{4.\,\wedge}$

(3) $A(a) \rightarrow A(\sigma(a))^{5.\,\rightarrow}$

(4_g) $A(a)$

(4_d) $\neg A(\sigma(a))$

(5_l) $\neg A(a)$ (5_p) $A(\sigma(a))$

$\times_{4_g,5_l}$ $\times_{4_d,5_p}$

Tablica sprzeczna. P_1–P_6 i RIM implikują zasadę indukcji P_7.

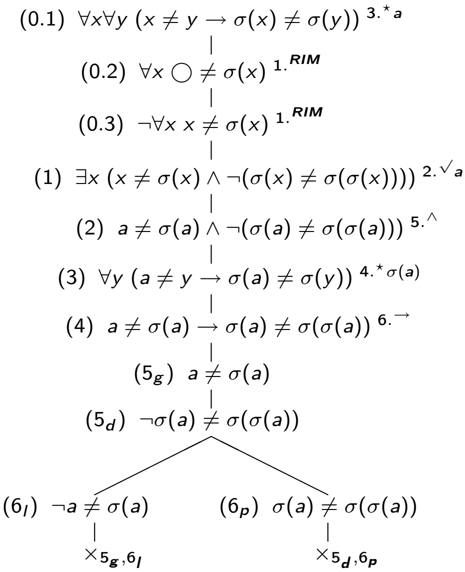
Arytmetyka Peana

Rozważmy jeszcze jedno zastosowanie reguły indukcji RIM.
Jak już wspomniano, w Arytmetyce Robinsona nie można udowodnić, że $\forall x\,(x \neq \sigma(x))$.

Pokażemy, że zdanie to można udowodnić z aksjomatów A_1 oraz A_2 Arytmetyki Robinsona oraz reguły RIM.
Budujemy tablicę analityczną, tj. drzewo, w którego pniu umieszczamy A_1, A_2 oraz $\neg\forall x\,(x \neq \sigma(x))$. Formułą $A(y)$, która wystąpi w przesłankach reguły RIM jest formuła $\forall x\,(y \neq \sigma(x))$.

Ponieważ ta tablica jest sprzeczna, więc $\forall x\,(x \neq \sigma(x))$ można udowodnić z aksjomatów A_1 oraz A_2 Arytmetyki Robinsona przy pomocy reguły RIM:

Arytmetyka Peana



$(0.1)\quad \forall x \forall y\, (x \neq y \rightarrow \sigma(x) \neq \sigma(y))\ ^{3.^{\star}a}$

$(0.2)\quad \forall x\, \bigcirc \neq \sigma(x)\ ^{1.^{RIM}}$

$(0.3)\quad \neg \forall x\, x \neq \sigma(x)\ ^{1.^{RIM}}$

$(1)\quad \exists x\, (x \neq \sigma(x) \wedge \neg(\sigma(x) \neq \sigma(\sigma(x))))\ ^{2.^{\surd}a}$

$(2)\quad a \neq \sigma(a) \wedge \neg(\sigma(a) \neq \sigma(\sigma(a)))\ ^{5.^{\wedge}}$

$(3)\quad \forall y\, (a \neq y \rightarrow \sigma(a) \neq \sigma(y))\ ^{4.^{\star}\sigma(a)}$

$(4)\quad a \neq \sigma(a) \rightarrow \sigma(a) \neq \sigma(\sigma(a))\ ^{6.^{\rightarrow}}$

$(5_g)\quad a \neq \sigma(a)$

$(5_d)\quad \neg \sigma(a) \neq \sigma(\sigma(a))$

$(6_l)\quad \neg a \neq \sigma(a)$

$\times_{5_g, 6_l}$

$(6_p)\quad \sigma(a) \neq \sigma(\sigma(a))$

$\times_{5_d, 6_p}$

Algebra: Grupy — Pierwsza Aksjomatyka

Aksjomaty teorii grup można sformułować w różnych językach, tzn. można na różne sposoby dobrać zestaw stałych pozalogicznych. Podamy trzy takie możliwości.

Teoria grup: pierwsza aksjomatyka.

Język teorii grup jest w tym przypadku językiem KRP z identycznością oraz:

- jednym dwuargumentowym symbolem funkcyjnym $\boxdot$, nazywającym *działanie* w grupie.

Algebra: Grupy — Pierwsza Aksjomatyka

Aksjomaty identyczności dla symbolu $\boxdot$, czyli formuły:

- $\forall x \forall y \forall z\ (x = y \rightarrow \boxdot(x, z) = \boxdot(y, z))$
- $\forall x \forall y \forall z\ (x = y \rightarrow \boxdot(z, x) = \boxdot(z, y))$.

Uwaga. We wszystkich trzech aksjomatykach dla teorii grup dochodzą jeszcze warunki ustalające, że identyczność jest relacją równoważności.

Aksjomaty specyficzne teorii grup:

- G^1_1: $\forall x \forall y\ (\boxdot(x, \boxdot(y, z)) = \boxdot(\boxdot(x, y), z))$
- G^1_2: $\forall x \forall y \exists z\ (\boxdot(x, z) = y)$
- G^1_3: $\forall x \forall y \exists z\ (\boxdot(z, x) = y)$.

Algebra: Grupy — Pierwsza Aksjomatyka

Warunek *przemienności* działania $\boxdot$, tj.:

$$(A) \quad \forall x \forall y\ (\boxdot(x, y) = \boxdot(y, x))$$

nie jest logiczną konsekwencją aksjomatów teorii grup. Te układy postaci $\langle G, \boxdot_G \rangle$, dla których G jest dowolnym zbiorem, a $\boxdot_G$ działaniem w zbiorze G takim, że zachodzą aksjomaty teorii grup oraz warunek (A) nazywamy *grupami przemiennymi* (albo *abelowymi*).

Jako ćwiczenie proponujemy próbę wykazania, że istotnie warunek (A) nie wynika logicznie z aksjomatów teorii grup. Wskazówka: budujemy tablicę analityczną, tj. drzewo, w którego pniu umieszczamy aksjomaty G_1^1, G_1^2, G_1^3 oraz negację warunku (A). Tablica nie jest sprzeczna, co oznacza, że (A) nie jest logiczną konsekwencją G_1^1, G_1^2 oraz G_1^3.

Algebra: Grupy — Druga Aksjomatyka

Teoria grup: druga aksjomatyka.

W tym przypadku używany język to język KRP z identycznością oraz:

- jednym dwuargumentowym symbolem funkcyjnym $\boxdot$, nazywającym *działanie* w grupie;
- jedną stałą indywiduową ε nazywającą element *neutralny* (względem działania) w grupie.

Aksjomaty identyczności dla symboli $\boxdot$ oraz ε są takie same, jak w poprzednim przypadku:

- $\forall x \forall y \forall z\ (x = y \rightarrow \boxdot(x, z) = \boxdot(y, z))$
- $\forall x \forall y \forall z\ (x = y \rightarrow \boxdot(z, x) = \boxdot(z, y))$.

Algebra: Grupy — Druga Aksjomatyka

Aksjomaty specyficzne:

- G_1^2: $\forall x \forall y \ \boxdot(x, \boxdot(y, z)) = \boxdot(\boxdot(x, y), z)$
- G_2^2: $\forall x \ (\boxdot(x, \varepsilon) = x)$
- G_3^2: $\forall x \ (\boxdot(\varepsilon, x) = x)$
- G_4^2: $\forall x \exists y \ (\boxdot(x, y) = \varepsilon)$
- G_5^2: $\forall x \exists y \ (\boxdot(y, x) = \varepsilon)$.

Dowód jedyności elementu neutralnego, tj. zdania:

$$(G_6^2) \quad \forall z(\forall x \ (\boxdot(x, z) = x \wedge \boxdot(z, x) = x) \rightarrow \varepsilon = z)$$

podajemy w poniższej tabeli:

Algebra: Grupy — Druga Aksjomatyka

1.	$\forall x\, (\boxdot(x,\varepsilon) = x)$	aksjomat G_2^2
2.	$\forall x\, (\boxdot(\varepsilon,x) = x)$	aksjomat G_3^2
3.	$\neg\forall z(\forall x\, (\boxdot(x,z) = x \wedge \boxdot(z,x) = x) \to \varepsilon = z)$	negacja G_6^2 (założenie dowodu nie wprost)
4.	$\neg(\forall x\, (\boxdot(x,a) = x \wedge \boxdot(a,x) = x) \to \varepsilon = a)$	$R(\neg\forall)$, 3
5_g.	$\forall x\, (\boxdot(x,a) = x \wedge \boxdot(a,x) = x)$	$R(\neg \to)$, 4
5_d.	$\neg\varepsilon = a$	
6.	$\boxdot(a,\varepsilon) = a$	$R(\forall)$ dla a, 1
7.	$\boxdot(\varepsilon,a) = a$	$R(\forall)$ dla a, 2
8.	$\boxdot(\varepsilon,a) = \varepsilon \wedge \boxdot(a,\varepsilon) = \varepsilon$	$R(\forall)$ dla ε, 5_g
9_g.	$\boxdot(\varepsilon,a) = \varepsilon$	$R(\wedge)$, 8
9_d.	$\boxdot(a,\varepsilon) = \varepsilon$	
10.	$\varepsilon = a$	$R(=)$, 9_g, 7
11.	$\times_{5_d,10}$	Sprzeczność: $5_d, 10$.

Algebra: Grupy — Trzecia Aksjomatyka

Teoria grup: trzecia aksjomatyka.

W tym przypadku używany język to język KRP z identycznością oraz:

- jednym dwuargumentowym symbolem funkcyjnym $\boxdot$, nazywającym *działanie* w grupie;
- jedną stałą indywiduową ε nazywającą element *neutralny* (względem działania) w grupie;
- jednym jednoargumentowym symbolem funkcyjnym $\circledcirc$ nazywającym element *odwrotny* (względem swojego argumentu).

Aksjomaty identyczności dla symboli $\boxdot$, $\circledcirc$ oraz ε:

- $\forall x \forall y \forall z\ (x = y \rightarrow \boxdot(x, z) = \boxdot(y, z))$
- $\forall x \forall y \forall z\ (x = y \rightarrow \boxdot(z, x) = \boxdot(z, y))$
- $\forall x \forall y\ (x = y \rightarrow \circledcirc(x) = \circledcirc(y))$.

Algebra: Grupy — Trzecia Aksjomatyka

Aksjomaty specyficzne:

- G_1^3: $\forall x \forall y \forall z\, (\boxdot(x, \boxdot(y, z)) = \boxdot(\boxdot(x, y), z))$
- G_2^3: $\forall x\, (\boxdot(x, \varepsilon) = x)$
- G_3^3: $\forall x\, (\boxdot(x, \circledcirc(x)) = \varepsilon)$.

Dowód prawa skracania, tj. zdania:

$$(G_4^3) \quad \forall x \forall y \forall z\, (\boxdot(x, z) = \boxdot(y, z) \rightarrow x = y)$$

podajemy w poniższej tabeli (na dwóch slajdach):

Algebra: Grupy — Trzecia Aksjomatyka

1.	$\forall x \forall y \forall z\ (\boxdot(x, \boxdot(y, z)) = \boxdot(\boxdot(x, y), z))$	aksjomat G_1^3
2.	$\forall x\ (\boxdot(x, \varepsilon) = x)$	aksjomat G_2^3
3.	$\forall x\ (\boxdot(x, \circledcirc(x)) = \varepsilon)$	aksjomat G_3^3
4.	$\neg \forall x \forall y \forall z\ (\boxdot(x, z) = \boxdot(y, z) \rightarrow x = y)$	negacja G_4^3 (założenie dowodu nie wprost)
5.	$\neg \forall y \forall z\ (\boxdot(a_1, z) = \boxdot(y, z) \rightarrow a_1 = y)$	$R(\neg\forall)$ dla a_1, 4
6.	$\neg \forall z\ (\boxdot(a_1, z) = \boxdot(a_2, z) \rightarrow a_1 = a_2)$	$R(\neg\forall)$ dla a_2, 5
7.	$\neg(\boxdot(a_1, a_3) = \boxdot(a_2, a_3) \rightarrow a_1 = a_2)$	$R(\neg\forall)$ dla a_3, 6
8_g. 8_d.	$\boxdot(a_1, a_3) = \boxdot(a_2, a_3)$ $a_1 \neq a_2$	$R(\neg \rightarrow)$, 7
9.	$\forall y \forall z\ (\boxdot(a_1, \boxdot(y, z)) = \boxdot(\boxdot(a_1, y), z))$	$R(\forall)$ dla a_1, 1
10.	$\forall z\ \boxdot\ (a_1, \boxdot(a_3, z)) = \boxdot(\boxdot(a_1, a_3), z)$	$R(\forall)$ dla a_3, 9
11.	$\boxdot(a_1, \boxdot(a_3, \circledcirc(a_3))) = \boxdot(\boxdot(a_1, a_3), \circledcirc(a_3))$	$R(\forall)$ dla $\circledcirc(a_3)$, 10
12.	$\boxdot(a_1, \boxdot(a_3, \circledcirc(a_3))) = \boxdot(\boxdot(a_2, a_3), \circledcirc(a_3))$	$R(=)$ 11, 8_g

Algebra: Grupy — Trzecia Aksjomatyka

13.	$\forall y \forall z\ (\boxdot(a_2, \boxdot(y,z)) = \boxdot(\boxdot(a_2,y),z))$	$R(\forall)$ dla a_2, 1
14.	$\forall z\ (\boxdot(a_2, \boxdot(a_3,z)) = \boxdot(\boxdot(a_2,a_3),z))$	$R(\forall))$ dla a_3, 13
15.	$\boxdot(a_2, \boxdot(a_3, \circledcirc(a_3))) = \boxdot(\boxdot(a_2,a_3), \circledcirc(a_3))$	$R(\forall)$ dla $\circledcirc(a_3)$, 14
16.	$\boxdot(a_3, \circledcirc(a_3)) = \varepsilon$	$R(\forall)$ dla a_3, 3
17.	$\boxdot(a_1, \boxdot(a_3, \circledcirc(a_3))) = \boxdot(a_2, \boxdot(a_3, \circledcirc(a_3)))$	$R(=)$, 12, 15
18.	$\boxdot(a_1, \varepsilon) = \boxdot(a_2, \varepsilon)$	$R(=)$, 16,17
19.	$\boxdot(a_2, \varepsilon) = a_2$	$R(\forall)$ dla a_2, 2
20.	$\boxdot(a_3, \varepsilon) = a_3$	$R(\forall)$ dla a_3, 2
21.	$a_1 = \boxdot(a_2, \varepsilon)$	$R(=)$, 19, 18
22.	$a_1 = a_2$	$R(=)$, 20, 21
23.	$\times_{8_{\boldsymbol{d}},22}$	Sprzeczność: $8_d, 22$.

Dowód zdania:

$$(G_5^3) \quad \forall x\ (\boxdot(x,\varepsilon) = \boxdot(\varepsilon,x))$$

podajemy poniżej (na dwóch slajdach):

Algebra: Grupy — Trzecia Aksjomatyka

1.	$\forall x \forall y \forall z\ (\boxdot(x, \boxdot(y, z)) = \boxdot(\boxdot(x, y), z))$	aksjomat G_1^3
2.	$\forall x\ (\boxdot(x, \varepsilon) = x)$	aksjomat G_2^3
3.	$\forall x\ (\boxdot(x, \circledcirc(x)) = \varepsilon)$	aksjomat G_3^3
4.	$\forall x \forall y \forall z\ (\boxdot(x, z) = \boxdot(y, z) \rightarrow x = y)$	twierdzenie G_4^3
5.	$\neg \forall x\ (\boxdot(x, \varepsilon) = \boxdot(\varepsilon, x))$	negacja G_5^3 (założenie dowodu nie wprost)
6.	$\boxdot(a, \varepsilon) \neq \boxdot(\varepsilon, a)$	$R(\forall)$ dla a, 5
7.	$\forall y \forall z\ (\boxdot(\varepsilon, \boxdot(y, z)) = \boxdot(\boxdot(\varepsilon, y), z))$	$R(\forall)$ dla ε, 1
8.	$\forall z\ (\boxdot(\varepsilon, \boxdot(a, z)) = \boxdot(\boxdot(\varepsilon, a), z))$	$R(\forall)$ dla a, 7
9.	$\boxdot(\varepsilon, \boxdot(a, \circledcirc(a))) = \boxdot(\boxdot(\varepsilon, a), \circledcirc(a))$	$R(\forall)$ dla $\circledcirc(a)$, 8
10.	$\boxdot(a, \circledcirc(a)) = \varepsilon$	$R(\forall)$ dla a, 3
11.	$\boxdot(\varepsilon, \varepsilon) = \varepsilon$	$R(\forall)$ dla ε, 2
12.	$\boxdot(\varepsilon, \varepsilon) = \boxdot(\boxdot(\varepsilon, a), \circledcirc(a))$	$R(=)$, 9, 10

Algebra: Grupy — Trzecia Aksjomatyka

13.	$\varepsilon = \boxdot(\boxdot(\varepsilon, a), \circledcirc(a))$	$R(=)$, 11, 12
14.	$\boxdot(a, \circledcirc(a)) = \boxdot(\boxdot(\varepsilon, a), \circledcirc(a))$	$R(=)$, 10, 13
15.	$\forall y \forall z\ (\boxdot(a, z) = \boxdot(y, z) \rightarrow a = y$	$R(\forall))$ dla a, 4
16.	$\forall z\ (\boxdot(a, z) = \boxdot(\boxdot(\varepsilon, a), z) \rightarrow a = \boxdot(\varepsilon, a))$	$R(\forall)$ dla $\boxdot(\varepsilon, a)$, 15
17.	$\boxdot(a, \circledcirc(a)) = \boxdot(\boxdot(\varepsilon, a), \circledcirc(a)) \rightarrow a = \boxdot(\varepsilon, a)$	$R(\forall)$ dla $\circledcirc(a)$, 16
18_l.	$\boxdot(a, \circledcirc(a)) \neq \boxdot(\boxdot(\varepsilon, a), \circledcirc(a))$	$R(\rightarrow)$, 17
18_l.1.	$\times_{14,18_l}$	Sprzeczność: $14, 18_l$.
18_p.	$a = \boxdot(\varepsilon, a)$	$R(\rightarrow)$, 17
18_p.1.	$\boxdot(a, \varepsilon) = a$	$R(\forall)$ dla a, 2
18_p.2.	$\boxdot(a, \varepsilon) = \boxdot(\varepsilon, a)$	$R(=)$, 18_p., 18_p.1.
18_p.3.	$\times_{6,18_p.2.}$	Sprzeczność: $6, 18_p.2.$

Dowód zdania:

$$(G_6^3) \quad \forall y \forall x\ (\boxdot(x, y) = x \rightarrow y = \varepsilon)$$

podajemy poniżej:

Algebra: Grupy — Trzecia Aksjomatyka

1.	$\forall x\ (\boxdot(x,\varepsilon) = x)$	aksjomat G_2^3
2.	$\forall x\ (\boxdot(x,\varepsilon) = \boxdot(\varepsilon,x))$	twierdzenie G_5^3
3.	$\neg\forall y\forall x\ (\boxdot(x,y) = x \rightarrow y = \varepsilon)$	negacja G_6^3 (założenie dowodu nie wprost)
4.	$\neg\forall x\ (\boxdot(x,a) = x \rightarrow a = \varepsilon)$	$R(\forall)$ dla a, 3
5_g.	$\forall x\ \boxdot\ (x,a) = x$	$R(\neg\rightarrow)$, 4
5_d.	$a \neq \varepsilon$	
6.	$\boxdot(\varepsilon,a) = \varepsilon$	$R(\forall)$ dla ε, 5_g
7.	$\boxdot(a,\varepsilon) = \boxdot(\varepsilon,a)$	$R(\forall)$ dla a, 2
8.	$\boxdot(a,\varepsilon) = \varepsilon$	$R(=)$, 6,7
9.	$\boxdot(a,\varepsilon) = a$	$R(\forall)$ dla a, 1
10.	$a = \varepsilon$	$R(=)$, 8,9
11.	$\times_{5_d,10}$	Sprzeczność: 5_d, 10.

Algebra: Grupy — Przykłady

Przykłady grup:

- Zbiór liczb całkowitych z działaniem dodawania oraz zerem jako elementem neutralnym tworzy grupę.
- Zbiór liczb rzeczywistych różnych od zera z działaniem mnożenia oraz jedynką jako elementem neutralnym tworzy grupę.
- Zbiór wszystkich wzajemnie jednoznacznych odwzorowań danego zbioru na siebie tworzy grupę. Działaniem jest tu złożenie funkcji, a elementem neutralnym funkcja identycznościowa.

Wykorzystywana literatura

- Annelis, I.A. 1990. From Semantic Tableaux to Smullyan Trees: A History of the Development of the Falsifiability Tree Method. *Modern Logic* **1**, 36–69.
- Bell, J.L., Machover, M. 1977. *A Course in Mathematical Logic.* North-Holland Publishing Company, Amsterdam New York Oxford.
- Beth, E.W. 1955. *Semantic Entailment and Formal Derivability.* Mededelingen der Koninklijke Nederlandse Akademie van wetenschapen, afd. letterkunde, new series, vol. **18**, no. **13**, Amsterdam.
- Fitting, M. 1990. *First-Order Logic and Automated Theorem Proving.* Springer Verlag, New York Berlin Heidelberg London Paris Tokyo Hong Kong.
- Gentzen, G. 1935. Untersuchungen über das logische Schliessen. *Mathematische Zeitschrift* **39**, 176–210, 405–431.

Wykorzystywana literatura

- Georgacarakos, G.N., Smith, R. 1979. *Elementary Formal Logic.* McGraw-Hill Book Company.
- *Handbook of Automated Reasoning.* 2001. A. Robinson, A. Voronkov (eds.), Elsevier, Amsterdam London New York Oxford Paris Shannon Tokyo, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts.
- *Handbook of Tableau Methods*. 1999. Edited by: D'Agostino, M., Gabbay, D.M., Hähnle, R., Posegga, J., Kluwer Academic Publishers, Dordrecht Boston London.
- Hintikka, J. 1955. Form and Content in Quantification Theory. *Acta Philosophica Fennica* **8**, 7–55.
- Hodges, W. 1977. *Logic.* Pelican Books.
- Howson, C. 1997. *Logic with trees.* Routledge, London and New York.
- Jeffrey, R. 1991. *Formal Logic: Its Scope and Limits.* McGraw-Hill, New York.

Wykorzystywana literatura

- Kleene, S.C. 1967. *Mathematical Logic.* John Wiley & Sons, Inc. New York London Sydney.
- Kripke, S. 1959. A Completeness Theorem in Modal Logic. *Journal of Symbolic Logic* **24**, 1–14.
- Lis, Z. 1960. Wynikanie semantyczne a wynikanie formalne. *Studia Logica* **X**, 39–60.
- Marciszewski, W., Murawski, R. 1995. *Mechanization of Reasoning in a Historical Perspective.* Rodopi, Amsterdam – Atlanta.
- Nerode, A., Shore, R.A. 1997. *Logic for Applications.* Graduate Texts in Computer Science, Springer.
- Pawlak, Z. 1965. *Automatyczne dowodzenie twierdzeń.* Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, Warszawa (seria: *Biblioteczka Matematyczna*, **19**).

Wykorzystywana literatura

- Porębska, M., Suchoń, W. 1991. *Elementarne wprowadzenie w logikę formalną.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.
- Priest, G. 2001. *An Introduction to Non-Classical Logic.* Cambridge University Press.
- Quine, W.V. 1955. A proof procedure for quantification theory. *The Journal of Symbolic Logic* Volume **20**, Number **2**, 191–149.
- Rasiowa, H., Sikorski, R. 1960. On the Gentzen Theorem. *Fundamenta Mathematicae* **48**, 58–69.
- Rasiowa, H., Sikorski, R. 1963. *The Mathematics of Metamathematics.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.
- Smullyan, R. 1968. *First-Order Logic.* Springer Verlag, Berlin.

Wykorzystywana literatura

- Schütte, K. 1956. Ein System des verknüpfenden Schliessens. *Archiv für mathematische Logik und Grundlagenforschungen* **2**, 56–67.
- Wang, H. 1960. Toward Mechanical Mathematics. *IBM Journal Research and Development* **4**, 2–22.

- Ponadto wykorzystano materiały dostępne w sieci.
- Zainteresowany czytelnik zechce również zajrzeć na stronę tych wykładów, gdzie podano niektóre odnośniki.