Logika Matematyczna (4)

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl

pogon@amu.edu.pl

8 XI 2007

Plan na dziś

Omówimy jeszcze kilka zagadnień dotyczących semantyki KRZ:

- semantyczna równoważność formuł
- koniunkcyjne postacie normalne
- alternatywne postacie normalne
- zupełne układy funkcji prawdziwościowych.

Zakładam, że wszyscy odrobili wszystkie zadania z 24 października 2007 roku oraz że wszystkie omówione dotąd pojęcia zostały zrozumiane.

Semantyczna równoważność formuł

- Formuły α i β nazywamy (semantycznie) *równoważnymi* (co oznaczamy przez $\alpha \sim \beta$), jeśli dla dowolnego wzz *w* wartość α jest równa wartości β.
- Formułę α nazywamy *spełnialną*, jeśli dla pewnego wzz formuła ta przyjmuje wartość 1.
- Formułę α nazywamy *odrzucalną*, jeśli dla pewnego wzz formuła ta przyjmuje wartość 0.
- Przypominamy, że α jest tautologią KRZ, gdy dla każdego wzz formuła ta przyjmuje wartość 1.
- Przypominamy, że α jest kontrtautologią KRZ, gdy dla każdego wzz formuła ta przyjmuje wartość 0.

Ćwiczenia. 1. Pokaż, że $\alpha \sim \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \equiv \beta$ jest tautologią KRZ. 2. Pokaż, że dowolne dwie tautologie KRZ są semantycznie równoważne.

Notacja

- Literałami nazywamy zmienne zdaniowe oraz negacje zmiennych zdaniowych. Jeśli literał L ma postać p_n, to literałem sprzężonym z L jest $\neg p_n$. Jeśli literał L ma postać $\neg p_n$, to literałem sprzężonym z L jest p_n.
- Wieloczłonową koniunkcję formuł $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ zapisywać będziemy bez użycia nawiasów: $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n$.
- Podobnie, wieloczłonową alternatywę formuł $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ zapisywać będziemy bez użycia nawiasów: $\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \ldots \vee \alpha_n$.

Ćwiczenie: Dlaczego takie uproszczenie zapisu nie prowadzi do niejednoznaczności semantycznej?

Postacie normalne formuł

- *Koniunkcją elementarną* nazwiemy dowolną koniunkcję literałów.
- *Alternatywą elementarną* nazwiemy dowolną alternatywę literałów.
- *Alternatywną postacią normalną* (*apn*) nazwiemy dowolną alternatywę koniunkcji elementarnych.
- *Koniunkcyjną postacią normalną* (*kpn*) nazwiemy dowolną koniunkcję alternatyw elementarnych.
- Apn (odpowiednio: kpn) α nazywamy *istotną* i oznaczamy *iafn* (odpowiednio: *ikpn*), jeśli każda zmienna zdaniowa formuły α występuje w każdej elementarnej koniunkcji (odpowiednio: alternatywie) dokładnie raz, zaprzeczona bądź niezaprzeczona.
- Każdą apn (odpowiednio: kpn, iapn, ikpn) semantycznie równoważną danej formule α nazywamy *apn* (odpowiednio: *kpn, iapn, ikpn*) *formuły* α.

Dlaczego postacie normalne są ważne

Dla każdej formuły α języka KRZ istnieje formuła β taka, że $\alpha \sim \beta$ i β jest kpn. Dla dowodu wystarczy zauważyć, że tautologiami KRZ są:

- $(\alpha \equiv \beta) \equiv ((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha))$
- $(\alpha \rightarrow \beta) \equiv ((\neg\alpha) \vee \beta)$
- $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv (\neg\alpha \vee \neg\beta)$
- $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$
- $\neg\neg\alpha \equiv \alpha$
- $(\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)) \equiv ((\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma))$
- $(\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)) \equiv ((\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma))$

Podobnie, dla każdej formuły α języka KRZ istnieje formuła β taka, że $\alpha \sim \beta$ i β jest apn.

Dlaczego koniunkcyjne postacie normalne są ważne

Po pierwsze: jeśli α jest tautologią KRZ oraz $\alpha \sim \beta$, to także β jest tautologią KRZ.

Po drugie: jeśli α jest kpn, to jest postaci: $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$, gdzie każda formuła A_i jest alternatywą elementarną postaci: $L_i^1 \vee L_i^2 \vee \ldots \vee L_i^m$, gdzie z kolei każda formuła L_i^j jest literałem.
Koniunkcja $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$ jest tautologią KRZ wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie formuły A_i są tautologiami.
Formuła A_i (czyli formuła $L_i^1 \vee L_i^2 \vee \ldots \vee L_i^m$) jest tautologią KRZ wtedy i tylko wtedy, gdy wśród L_i^1, L_i^2, …, L_i^m występuje co najmniej jedna para literałów sprzężonych.

Tak więc: sprowadzanie formuł do kpn dostarcza algorytmu sprawdzającego tautologiczność.

Dlaczego alternatywne postacie normalne są ważne

Po pierwsze: jeśli α jest kontrtautologią KRZ oraz $\alpha \sim \beta$, to także β jest kontrtautologią KRZ.

Po drugie: jeśli α jest apn, to jest postaci: $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$, gdzie każda formuła A_i jest koniunkcją elementarną postaci:
$L_i^1 \wedge L_i^2 \wedge \ldots \wedge L_i^m$, gdzie z kolei każda formuła L_i^j jest literałem.
Alternatywa $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$ jest kontrtautologią KRZ wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie formuły A_i są kontrtautologiami.
Formuła A_i (czyli formuła $L_i^1 \wedge L_i^2 \wedge \ldots \wedge L_i^m$) jest kontrtautologią KRZ wtedy i tylko wtedy, gdy wśród L_i^1, L_i^2, ..., L_i^m występuje co najmniej jedna para literałów sprzężonych.

Tak więc: sprowadzanie formuł do apn dostarcza algorytmu sprawdzającego kontrtautologiczność.

Jeszcze o funkcjach prawdziwościowych

Pamiętamy, że (n-argumentową) funkcją prawdziwościową nazywamy dowolną funkcję $f : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$, dla $n \geqslant 1$.

Wszystkich n-argumentowych funkcji prawdziwościowych jest 2^{2^n}. W szczególności, jest 16 dwuargumentowych funkcji prawdziwościowych oraz są 4 jednoargumentowe funkcje prawdziwościowe.

Do ważnych problemów (także praktycznych) należą:

- definiowanie jednych funkcji prawdziwościowych przez inne
- reprezentacje dowolnych funkcji prawdziwościowych przez stosowne postacie normalne
- znajdowanie zupełnych układów funkcji prawdziwościowych.

Nieco więcej o tej problematyce usłyszycie na Wstępie do matematyki.

Kodowanie funkcji prawdziwościowych

Każda z 16 dwuargumentowych funkcji prawdziwościowych może zostać zakodowana czteroelementowym ciągiem 0 i 1 (zob. tabelę z poprzedniego wykładu), a więc dwójkowym przedstawieniem jednej z liczb od 0 do 15.

Ogólnie, każda n-argumentowa funkcja prawdziwościowa może zostać zakodowana 2^n-elementowym ciągiem 0 i 1, a więc dwójkowym przedstawieniem jednej z liczb od 0 do $2^n - 1$.

Wszystkie n-argumentowe funkcje prawdziwościowe można zatem łatwo wypisać w formie tabeli o 2^n wierszach oraz $n + 2^{2^n}$ kolumnach. Na pierwszych n miejscach w i-tym wierszu należy umieścić dwójkową reprezentację liczby $i - 1$. W kolumnach od $n + 1$ do 2^{2^n} umieszczamy kolejno (pionowo) reprezentacje dwójkowe liczb od 0 do $2^{2^n} - 1$.

Termy opisujące funkcje prawdziwościowe

Klasę wszystkich funkcji prawdziwościowych oznaczymy przez $\boldsymbol{C}$. Niech $G \subset \boldsymbol{C}$. Z każdą n-argumentową funkcją f z G stowarzyszymy symbol funkcyjny $\overline{f}$. Niech $Vbl = \{v_0, v_1, v_2, \ldots\}$ będzie przeliczalnym zbiorem symboli, zwanych zmiennymi (nazwowymi). Zdefiniujemy pojęcie *termu*:

- (a) każda zmienna v_i jest termem;
- (b) jeśli f jest n-argumentową funkcją z G, a $T_1, \ldots, T_n$ są termami, to $\overline{f}(T_1, \ldots, T_n)$ jest termem;
- (c) nie ma innych termów oprócz utworzonych na mocy warunków (a) i (b).

Uwaga. Termy to wyrażenia opisujące funkcje prawdziwościowe w pewnym (nowym!) języku formalnym.

Wartości termów

Wartościowaniem zmiennych nazwowych (wzn) nazwiemy każdą funkcję $w : Vbl \rightarrow \{0, 1\}$. Przyjmujemy oznaczenie: $w(v_i) = w_i$.
Oczywiście w każdym termie występuje jedynie skończona liczba zmiennych (nazwowych).

Określamy *wartość termu T* dla danych wartości zmiennych określonych przez wzn w:

- (a) jeśli T jest zmienną v_i, to wartością T dla wzn w jest w_i;
- (b) jeśli $T = \overline{f}(T_1, \ldots, T_n)$ i wartościami $T_1, \ldots, T_n$ są odpowiednio $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$, to wartością T jest $f(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$.

Reprezentowalność

Mówimy, że n-argumentowa funkcja prawdziwościowa g jest *reprezentowana* przez term T, jeśli wszystkie zmienne T są wśród $v_1, \ldots, v_n$ i dla dowolnych wartości (przy każdym wzn) zmiennych $v_1, \ldots, v_n$ wartość termu T jest identyczna z wartością termu $\overline{g}(v_1, \ldots, v_n)$.

Mówimy, że funkcja g jest *złożeniem* funkcji $f_1, \ldots, f_n$, jeśli g jest reprezentowana przez term, którego wszystkie symbole funkcyjne znajdują się pośród $\overline{f}_1, \ldots, \overline{f}_n$.

Uwaga. W praktyce, fakt że jakaś funkcja jest złożeniem innych wyrażamy bezpośrednio w metajęzyku. Piszemy np.: $Im(x, y) = Al(Ng(x), y)$. Zwróć uwagę, że zachodzenie tej równości związane jest z faktem, że $(\alpha \rightarrow \beta) \equiv ((\neg\alpha) \vee \beta)$ jest tautologią KRZ.

Zbiory funkcji: zupełne, zamknięte, niezależne

Zbiór funkcji G nazywamy *zupełnym*, jeśli dowolna funkcja prawdziwościowa jest złożeniem pewnych funkcji z G. Zbiór funkcji G nazywamy *niezależnym*, jeśli żadna funkcja f z G nie daje się przedstawić jako złożenie funkcji z $G - \{f\}$.

Klasę funkcji G nazywamy *zamkniętą*, jeśli zawiera ona wszystkie złożenia funkcji, które są jej elementami. Zamkniętą klasę G nazywamy *prapełną*, jeśli $G \neq \boldsymbol{C}$ i G nie jest zawarta w żadnej klasie zamkniętej, różnej od $\boldsymbol{C}$. Niezależny zbiór funkcji G nazywamy *bazą klasy zamkniętej* K, jeśli każda funkcja należąca do K jest złożeniem funkcji należących do G.

Do ważnych funkcji prawdziwościowych należą omówione poprzednio: Ng, Kn, Al, Im, Rw. Będziemy posługiwać się także funkcją n-argumentowej koniunkcji: $Kn(x_1, \ldots, x_n) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_1 = \ldots = x_n = 1$. Podobnie dla n-argumentowej alternatywy.

Klasy funkcji prawdziwościowych

- Przez $\boldsymbol{C}_1$ oznaczamy klasę funkcji spełniających warunek $f(1, 1, \ldots, 1) = 1$.
- Przez $\boldsymbol{C}_0$ oznaczamy klasę funkcji spełniających warunek $f(0, 0, \ldots, 0) = 0$.
- $\boldsymbol{L}$ jest klasą wszystkich funkcji *liniowych*, tj. funkcji postaci $x_1 + \ldots + x_n + \varepsilon$, gdzie $\varepsilon \in \{0, 1\}$.
- $\boldsymbol{D}$ jest klasą funkcji *samodualnych*, tj. funkcji spełniających warunek $f(x_1, \ldots, x_n) = Ng(f(Ng(x_1), \ldots, Ng(x_n)))$.
- przez $\boldsymbol{M}$ oznaczymy klasę wszystkich funkcji *monotonicznych*, tj. funkcji spełniających warunek: jeśli $x_1 \leqslant y_1, \ldots, x_n \leqslant y_n$, to $f(x_1, \ldots, x_n) \leqslant f(y_1, \ldots, y_n)$.

Uwaga. Symbolu $\leqslant$ używamy dla relacji niewiększości na zbiorze $\{0, 1\}$ traktowanym jako zbiór liczb. Symbol $+$ oznacza dodawanie modulo 2 w tym zbiorze.

Przedstawialność: zapis formalny

Mówimy, że funkcja f jest przedstawialna za pomocą funkcji $f_1, \ldots, f_k$, jeśli równość $\overline{f}(v_1, \ldots, v_n) = T$ zachodzi dla wszystkich wartości przyporządkowanych (przez każde wzn) zmiennym $v_1, \ldots, v_n$, gdzie T jest pewnym termem zbudowanym z symboli funkcyjnych $\overline{f}_1, \ldots, \overline{f}_k$ (niekoniecznie wszystkich) oraz zmiennych $v_1, \ldots, v_n$ (również niekoniecznie wszystkich).

Przykłady:

- Kn jest przedstawialna przez Ng oraz Al:

$$\overline{Kn}(v_1, v_2) = \overline{Ng}(\overline{Al}(\overline{Ng}(v_1), \overline{Ng}(v_2)))$$

- Al jest przedstawialna przez Ng oraz Kn:

$$\overline{Al}(v_1, v_2) = \overline{Ng}(\overline{Kn}(\overline{Ng}(v_1), \overline{Ng}(v_2)))$$

Przedstawialność: zapis uproszczony

- Im jest przedstawialna przez Ng oraz Al:
  $Im(x, y) = Al(Ng(x), y)$
- Im jest przedstawialna przez Ng oraz Kn:
  $Im(x, y) = Ng(Kn(x, Ng(y)))$
- Al jest przedstawialna przez Ng oraz Im:
  $Al(x, y) = Im(Ng(x), y)$
- Kn jest przedstawialna przez Ng oraz Im:
  $Kn(x, y) = Ng(Im(x, Ng(y)))$

Uwaga. Powyższe równości (z tego slajdu), zapisane w metajęzyku, dotyczą bezpośrednio funkcji prawdziwościowych. Milcząco wykorzystujemy tu pewne własności termów opisujących funkcje prawdziwościowe. Równości z poprzedniego slajdu zapisane były w języku termów.

Nie pogub się!

Być może, jesteś wstrząśnięta (choć nie zmieszana) używanymi w tym wykładzie subtelnościami notacyjnymi. Tak trzeba, *trust me*. Zauważ, że:

- gdy piszemy np. równość $Im(x, y) = Al(Ng(x), y)$, to jest to zapis w metajęzyku, mówiący coś o funkcjach prawdziwościowych;
- gdy piszemy równość termów $\overline{Im}(v_1, v_2) = \overline{Al}(\overline{Ng}(v_1), v_2)$, to jest to zapis w języku formalnym opisującym funkcje prawdziwościowe;
- gdy piszemy równoważność $(\alpha \rightarrow \beta) \equiv ((\neg\alpha) \vee \beta)$, to jest to formuła języka KRZ.

Można ustanowić precyzyjną odpowiedniość między: spójnikami prawdziwościowymi $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ oraz $\equiv$, a symbolami funkcyjnymi, odpowiednio: $\overline{Ng}$, $\overline{Kn}$, $\overline{Al}$, $\overline{Im}$ oraz $\overline{Rw}$.

Postacie normalne dla funkcji prawdziwościowych

W języku termów opisujących funkcje prawdziwościowe można zdefiniować postacie normalne termów:

- Każde wyrażenie postaci x lub $\overline{Ng}(x)$, gdzie x jest zmienną (nazwową), nazywamy literałem.
- Wyrażenia postaci $L_1 \wedge L_2 \wedge \ldots \wedge L_n$, gdzie każde L_i jest literałem, nazywamy koniunkcjami elementarnymi.
- Wyrażenia postaci $L_1 \vee L_2 \vee \ldots \vee L_n$, gdzie każde L_i jest literałem, nazywamy alternatywami elementarnymi.
- Wyrażenie w koniunkcyjnej postaci normalnej (kpn) jest to wyrażenie kształtu $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$, gdzie każde A_i jest alternatywą elementarną.
- Wyrażenie w alternatywnej postaci normalnej (apn) jest to wyrażenie kształtu $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$, gdzie każde A_i jest koniunkcją elementarną.

Postacie normalne dla funkcji prawdziwościowych

Zachodzi następujące ważne twierdzenie o postaciach normalnych:

Twierdzenie 4.1. Każda funkcja prawdziwościowa jest przedstawialna zarówno w koniunkcyjnej, jak i w alternatywnej postaci normalnej.
Dowód w Dodatku 1.

Przykład:

- apn dla Rw: $\overline{Rw}(x, y) = \overline{Al}(\overline{Kn}(x, y), \overline{Kn}(\overline{Ng}(x), \overline{Ng}(y)))$
- kpn dla Rw: $\overline{Rw}(x, y) = \overline{Kn}(\overline{Al}(\overline{Ng}(x), y), \overline{Al}(x, \overline{Ng}(y)))$.

Ćwiczenie. Sprowadź do kpn oraz apn formułę $\alpha \equiv \beta$ języka KRZ i porównaj otrzymane rezultaty z powyższymi postaciami normalnymi dla Rw. Jakieś refleksje?

Zupełne układy funkcji prawdziwościowych

Z twierdzenia o postaciach normalnych wynika, że następujące układy funkcji są zupełne:

$\{Ng, Kn\} \quad \{Ng, Al\} \quad \{Ng, Im\}.$

Zupełny jest także układ funkcji $\{Ar, Kn, \mathbf{1}\}$, gdzie $\mathbf{1}$ jest funkcją stałą równą 1, a funkcja Ar (alternatywa rozłączna) odpowiada dodawaniu modulo 2. Zauważmy, że $Ng(x) = Ar(x, \mathbf{1}(x))$ oraz że Kn odpowiada (zwykłemu) mnożeniu w zbiorze $\{0, 1\}$.

Czasami zamiast $Kn(x, y)$ piszemy xy, zamiast $Ar(x, y)$ piszemy $x + y$, a zamiast $\mathbf{1}$ po prostu 1. Iloczyny zmiennych nazywamy jednomianami, sumy jednomianów wielomianami Żegałkina, a pusty iloczyn zmiennych utożsamiamy ze stałą 1.

Zupełne układy funkcji prawdziwościowych

Twierdzenie 4.2. Każda funkcja prawdziwościowa ma dokładnie jedno przedstawienie w postaci wielomianu Żegałkina (z dokładnością do kolejności czynników w jednomianach i składników w wielomianie).
Dowód w Dodatku 1.

Zauważmy, że:

- (a) funkcje liniowe są przedstawialne jako sumy skończenie wielu jednomianów prostych (tj. jednomianów bez mnożenia)
- (b) funkcje przedstawialne przez funkcje liniowe także są liniowe
- (c) z (a) oraz (b) wynika, że nie są zupełne np. układy: $\{+, 1\}$ oraz $\{Ng, Rw\}$.

Nie są zupełnymi także np. układy: $\{Rw, Ar\}$, $\{Al, Kn, Im\}$.

Binegacja i kreska Sheffera

Dalsze dwie ważne funkcje prawdziwościowe to:

- binegacja: $\downarrow(x, y) = Ng(Al(x, y))$
- kreska Sheffera: $|(x, y) = Ng(Kn(x, y))$

Zauważmy, że:

$Ng(x) = |(x, x) \quad Al(x, y) = \downarrow(\downarrow(x, y), \downarrow(x, y))$

$Ng(x) = \downarrow(x, x) \quad Kn(x, y) = |(|(x, y), |(x, y))$

Binegacja odpowiada spójnikowi „ani ..., ani ...”, a kreska Sheffera spójnikowi „co najwyżej jedno z dwojga ..., ...”.

Twierdzenie 4.3.

Jedyne zupełne jednoelementowe układy funkcji to: $\{|\}$ oraz $\{\downarrow\}$.

Dowód w Dodatku 1.

Przykłady zbiorów niezależnych i baz

Przykładami niezależnych układów funkcji są:
(a) $\{Ng, Rw\}$; (b) $\{Ng, Ar\}$; (c) $\{Rw, Ar\}$; (d) $\{Rw, Al\}$.

Zupełne i niezależne są np. następujące układy funkcji:
(a) $\{Im, /\}$, gdzie $/(x, y) = Ng(Im(y, x))$;
(b) $\{Rw, Al, \mathbf{0}\}$, gdzie $\mathbf{0}$ jest funkcją stałą równą 0.

- $\{Kn, Im\}$ jest bazą dla $\boldsymbol{C}_1$
- $\{Kn, Ar\}$ jest bazą dla $\boldsymbol{C}_0$
- $\{Al, Kn, \mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ jest bazą dla $\boldsymbol{M}$
- $\{\mathbf{0}, Rw\}$ jest bazą dla $\boldsymbol{L}$
- $\{Ng, \curlywedge\}$ jest bazą dla $\boldsymbol{D}$, gdzie $\curlywedge(x, y, z) = xy + xz + yz$.

Klasy prapełne i twierdzenie Posta

- Klasy: $\boldsymbol{C}_1, \boldsymbol{C}_0$, $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{L}$ są wszystkie prapełne.
- Dowolna klasa zamknięta $\boldsymbol{K} \neq \boldsymbol{C}$ zawiera się w pewnej klasie prapełnej.
- Układ funkcji jest zupełny wtedy i tylko wtedy, gdy nie jest zawarty w żadnej klasie prapełnej.

4.4. Twierdzenie Posta. Nie istnieją klasy prapełne różne od $\boldsymbol{C}_1$, $\boldsymbol{C}_0$, $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{D}$ oraz $\boldsymbol{M}$.

Dowód opuszczamy.

- Każdy zamknięty zbiór funkcji prawdziwościowych ma skończoną bazę.
- Rodzina wszystkich zamkniętych zbiorów funkcji prawdziwościowych jest przeliczalna.
- Każda baza dla $\boldsymbol{C}$ zawiera nie więcej niż cztery funkcje.

Zadanie domowe

1. Przedstawić wszystkie dwuargumentowe funkcje prawdziwościowe (z tabeli podanej na wykładzie drugim) poprzez funkcje z poniższych układów:

$\{Ng, Kn\}$ $\{Ng, Al\}$ $\{Ng, Im\}$
$\{Im, \mathbf{0}\}$ $\{|\}$ $\{\downarrow\}$

2. Dla każdego z tych przedstawień zapisać odpowiadającą mu tautologię KRZ (w przypadku $|$, $\downarrow$ oraz $\mathbf{0}$ wymaga to rozszerzenia języka KRZ o te symbole).

Przypominam: bez umiejętności rozwiązywania zadań nie zdasz egzaminu z logiki. Wybór należy do ciebie.

Dla ciekawych: KRZ a rachunek zbiorów

Przekład 1. Niech T będzie termem reprezentującym pewną funkcję prawdziwościową, w zapisie którego występują tylko znaki $\overline{Kn}$, $\overline{Al}$ i $\overline{Ng}$ oraz zmienne $v_1, \ldots, v_k$. Przez $\varepsilon(T, x)$ oznaczymy formułę języka teorii mnogości otrzymaną z termu T przez podstawienia w miejsce zmiennych $v_1, \ldots, v_k$ odpowiednio wyrażeń $x \in Z_1, \ldots, x \in Z_k$.

Przekład 2. T jak wyżej. Przez $Z(T)$ oznaczymy wyrażenie, które otrzymujemy z termu T poprzez zamianę zmiennych v_i symbolami Z_i, a symboli $\overline{Kn}$, $\overline{Al}$ i $\overline{Ng}$ odpowiednio symbolami $\cap$, $\cup$ oraz $-$.

- Podaj przykłady zbiorów, które można tworzyć z termów opisujących funkcje prawdziwościowe, posługując się przekładem 1.
- Podaj przykłady praw rachunku zbiorów odpowiadające prawom dotyczącym funkcji prawdziwościowych przy przekładzie 2.
- Podaj przykłady praw rachunku zbiorów odpowiadające tautologiom KRZ.

Koniec

Na zajęciach ze *Wstępu do matematyki* dowiesz się trochę więcej o własnościach funkcji prawdziwościowych. W szczególności, omówione tam zostaną pewne procedury dotyczące minimalizacji funkcji prawdziwościowych, która ma istotne znaczenie np. w informatyce.

Jeśli czytasz notatki z dzisiejszego wykładu, to zwróć szczególną uwagę na rozróżnienie metajęzyka oraz języków przedmiotowych: języka KRZ i języka termów opisujących funkcje prawdziwościowe.

Zauważ też odpowiedniości między składnią a semantyką!

Na następnym wykładzie: o aksjomatycznych ujęciach KRZ.