INTUICJA MATEMATYCZNA W DZIAŁANIU

JERZY POGONOWSKI

Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl
pogon@amu.edu.pl

1 Wstęp

Pan Profesor Mieczysław Omyła znany jest przede wszystkim ze swoich prac dotyczących *logiki niefregowskiej*. Ta tematyka nie wyczerpuje jednak bogatej i różnorodnej jego twórczości. Niniejszy tekst nawiązuje do jego artykułu o intuicji w naukach formalnych, opublikowanego niedawno w *Edukacji Filozoficznej* (Omyła 2010). Nasz cel jest skromny. Nie zamierzamy formułować ogólnych wniosków filozoficznych dotyczących intuicji matematycznej. Przyjrzymy się natomiast zmienności niektórych poglądów związanych z rozumieniem paru wybranych ważnych ogólnych pojęć matematycznych. Ograniczamy się do matematyki klasycznej, nie rozważamy zatem poglądów formułowanych w ramach matematyki intuicjonistycznej.

2 Czym jest intuicja matematyczna?

Współczesna filozofia matematyki nie udziela definitywnej odpowiedzi na pytanie zawarte w tytule tego punktu. Prace z tej dziedziny oferują liczne komentarze na temat rozumienia intuicji matematycznej w poszczególnych kierunkach filozofii matematyki. Poznanie intuicyjne w matematyce pozostaje zdolnością wielce tajemniczą. Wypowiadali się o niej klasycy filozofii (Kant, Kartezjusz), wielcy matematycy (Hilbert, Poincaré, Gödel, Hadamard), napisano na jej temat niezliczone artykuły, a także – dotąd nieliczne – monografie (np. Tieszen 1989, Parsons 2008). Nie podejmując się tutaj streszczania tych poglądów, przywołamy jedynie niektóre ustalenia z popularnej, ale wielce poczytnej pracy Davis, Hersh 1994. Powinno to wystarczyć dla naszych celów.

2.1 Davies i Hersh o intuicji

Davis i Hersh piszą o różnych znaczeniach, w których sami matematycy używają terminu *intuicja matematyczna* (Davis, Hersh 1994, 340–341):

1. Intuicyjność jest przeciwstawieniem ścisłości.
2. Intuicyjność oznacza wizualność.
3. Przy braku dowodu intuicyjne oznacza prawdopodobne lub przekonujące.
4. Intuicyjne oznacza niekompletne.
5. Intuicyjne oznacza oparte na modelu fizycznym, lub na jakichś wiodących przykładach.
6. Intuicyjne oznacza holistyczne lub całościowe w przeciwstawieniu do szczegółowego lub analitycznego.

Niektóre z tych określeń zawierają oceny – w domyśle zawsze wyżej stawiamy ścisły dowód nad uzasadnieniami opartymi na intuicji. Jednak w samym dochodzeniu do stwierdzeń matematycznych to właśnie intuicje odgrywają główną rolę – dowodzenie stanowi potwierdzanie intuicji. Dodać może warto, że intuicyjność nie jest bezpośrednio związana z oczywistością – np. twierdzenie Jordana o krzywej zamkniętej na płaszczyźnie jest, chciałoby się rzec, całkiem oczywiste, natomiast jego dowód jest niezwykle skomplikowany. Z drugiej strony, twierdzenia, intuicyjnie może wcale nieoczywiste mogą mieć proste dowody, jak choćby w przypadku wielu zastosowań metody przekątniowej. Wreszcie, intuicje matematyczne jakoś splecione są także z kryteriami natury czysto estetycznej – wielu matematyków chętnie przyznaje, że to właśnie kryterium piękna (obiektu, konstrukcji, dowodu, teorii) jest podstawową inspiracją w ich twórczości.

2.2 Mieczysław Omyła o intuicji

Mieczysław Omyła rozważa w swoim artykule najpierw dwa rodzaje intuicji, związane odpowiednio z: *abstrahowaniem* oraz *uogólnianiem*. Pisze m.in. co następuje (Omyła 2010, 147–148):

> Pierwszy z omawianych tutaj rodzajów intuicji znajdujący się w naukach formalnych, jest to ten jej rodzaj, który prowadzi od spostrzeżeń i obserwacji empirycznych do nazw abstrakcyjnych i pojęć formalnych, na przykład do pojęcia liczby, zbioru, trójkąta i podobnych. Ten

rodzaj intuicji jest ściśle związany z procesem myślowym zwanym procesem abstrakcji.

Drugi rodzaj intuicji prowadzi od pojęć abstrakcyjnych mniej ogólnych do bardziej ogólnych, na przykład, od pojęcia liczby naturalnej do pojęcia liczby całkowitej, a następnie od pojęcia liczby całkowitej do pojęcia liczby wymiernej i analogicznie, od liczb wymiernych do rzeczywistych i od liczb rzeczywistych do liczb zespolonych. W bardziej zaawansowanej matematyce podobnie od pewnych struktur abstrakcyjnych mniej ogólnych przechodzi się do bardziej ogólnych, na przykład od ciała zbiorów do pojęcia algebry Boole'a, bądź od zbioru liczb rzeczywistych do dowolnego ciała liczbowego. Te drugie z wymienionych pojęć są ogólniejsze, gdyż każde ciało zbiorów jest algebrą Boole'a, a nie każda algebra Boole'a jest ciałem zbiorów,[1] podobnie liczby rzeczywiste stanowią szczególny rodzaj ciała liczbowego mianowicie stanowią ciało uporządkowane w sposób ciągły.

Zarówno w procesie abstrahowania jak i uogólniania matematycy kierują się intuicją, gdyż na ogół nie wiedzą od jakich własności owocne jest abstrahować, i w jakim kierunku należy pojęcia uogólniać.

Dodaje ponadto, że intuicja pełni podstawową rolę w *kontekście odkrycia* w naukach formalnych oraz że również problematyka *aplikacji* (*interpretacji*) jest tu istotna (Omyła 2010, 154):

> Trzeci rodzaj intuicji związany jest z uzasadnianiem twierdzeń w naukach formalnych. Od czasów Hansa Reichenbacha w filozofii nauki odróżnia się w badaniach prowadzonych nad nauką „kontekst odkrycia" i „kontekst uzasadnienia". Prawa naukowe muszą być uzasadniane zgodnie z wymogami współczesnej logiki i filozofii nauki, czyli muszą być intersubiektywnie sprawdzalne. Natomiast odkrycie danego prawa naukowego, 'wpadnięcie na pomysł' wykracza poza rozważania logiczne i zawsze zawiera pewien element intuicyjny. W przypadku nauk formalnych wszelkie twierdzenia uzasadnia się w sposób dedukcyjny. Rozumowanie dedukcyjne może być ściśle sformalizowane, ale odkrycie danego dowodu czy odkrycie tylko myśli przewodniej danego dowodu ma na ogół charakter nieformalny, czyli intuicyjny.
>
> Aby dana teoria formalna była teorią naukową, a nie tylko formalną grą symbolami, to teoria ta musi mieć interesujące interpretacje, które

[1] Pamiętajmy jednak, że – na mocy twierdzenia Stone'a o reprezentacji – każda algebra Boole'a jest *izomorficzna* z ciałem zbiorów – JP.

– zgodnie z postulatem J. Łukasiewicza wyrażonym w pracy [7][2] – zaspakajają, a przynajmniej przyczyniają się do zaspokojenia jakichś ogólnoludzkich potrzeb poznawczych.

2.3 Czymże więc są intuicje matematyczne?

Jedna z nowszych propozycji ujmowania genezy matematyki, w tym także źródeł intuicji matematycznych to propozycja wysunięta przez *kognitywistów* – zob. Lakoff, Núñez 2000. Autorzy przedstawiają argumenty mające świadczyć o tym, że matematyka jest wytworem działania *ucieleśnionego umysłu* (*embodied mind*) i jako taka właśnie jest kreacją czysto ludzką, a przy tym nie całkowicie arbitralną. Wyniki eksperymentów zdają się potwierdzać, że pewne – dość skromne – umiejętności matematyczne są wrodzone. Główną rolę w tworzeniu abstrakcyjnych pojęć matematyki odgrywają natomiast procesy budowania *metafor*. W szczególności, autorzy zwracają uwagę na następującą metaforę (Lakoff, Núñez 2000, 158):

> We hypothesize that all cases of actual infinity – infinite sets, points at infinity, limits of infinite series, infinite intersections, least upper bounds – are special cases of a single general conceptual metaphor in which processes that go on indefinitely are conceptualized as having an end and an ultimate result. We call this metaphor the *Basic Metaphor of Infinity*, or the BMI for short. The target domain of the BMI is the domain of processes without end – that is, what linguists call imperfective processes. The effect of the BMI is to add a metaphorical completion to the ongoing process so that it is seen as having a result – an infinite *thing*.

Trzeba pamiętać, że koncepcja Lakoffa i Núñeza nie jest ani teorią *stricte* matematyczną, ani też stanowiskiem w filozofii matematyki. Jest natomiast próbą wyjaśnienia genezy oraz funkcjonowania matematyki, próbą podjętą na gruncie nauk kognitywnych. Stoi w sprzeczności z Platonizmem matematycznym. Stara się zredukować całość twórczości matematycznej do metaforyzowania. Jest, w naszym przekonaniu, kontrowersyjna, a przez to warta poznania.

Może warto wreszcie przywołać też pewne uwagi Romana Suszki, dotyczące możliwości skonstruowania systemów formalnych dopiero wtedy, gdy nagromadzony został już wystarczająco duży *materiał logiczny* (Suszko 1965, 13):

> Należy jednak zaznaczyć, że pojawienie się problematyki logicznej mogło nastąpić dopiero w warunkach, gdy w rozwoju kultury i nauki

[2]Czyli w Łukasiewicz 1961 – JP.

> helleńskiej nagromadziło się dostatecznie dużo materiału, który jest przedmiotem badań w logice. Materiał ten – nazywajmy go materiałem logicznym ($\lambda\acute{o}\gamma o\varsigma$, $\lambda\acute{o}\gamma o\iota$) – jest ludzkim wytworem, zmieniającym się i komplikującym poprzez dzieje. Obejmuje wszelkie konstrukcje pojęciowe, twierdzenia, rozumowania i teorie, a dany jest w wypowiedziach, rozmowach, dyskusjach i wykładach oraz, w stosunkowo trwałej formie, w pismach i traktatach.

Nie widać żadnych przeszkód, abyśmy posługiwali się terminem *materiał matematyczny*, rozumianym tak samo, jak u Suszki, jednak w odniesieniu do całości matematyki, a nie tylko logiki formalnej.

Proponujemy rozumieć intuicje matematyczne jako *przekonania*. Przy tym, uważamy, że poddawać analizie możemy jedynie przekonania *zwerbalizowane*, natomiast o wszelakich ewentualnych przekonaniach, które nie poddają się werbalizacji mówić możemy jedynie metaforycznie. Podkreślmy przy tym wyraźnie, przy takim rozumieniu intuicji matematycznych:

1. Może być tak, że żywiący takie przekonania matematyk nie potrafi wskazać, *dlaczego*, *na jakiej podstawie* je przyjmuje. To własność to zresztą cecha wszelkich bodaj przekonań intuicyjnych – są one akceptowane („narzucają się jako prawdziwe") właśnie bez szczegółowego oraz wyraźnego uzasadnienia.

2. Sądzimy jednak, że w przypadku intuicji *matematycznych* dopuścić należy także tę możliwość, że są one jakoś kształtowane przez *inne przekonania*, przez *wiedzę*, którą posiada dany zawodowy matematyk. Nie jest bowiem tak, że wszyscy mamy te same intuicje matematyczne – zgromadzona wiedza oraz długotrwały, intensywny trening w rozwiązywaniu problemów z danej dyscypliny matematycznej pozwalają wykształcić intuicje całkiem nowe, dzięki którym możliwy jest rozwój tej dyscypliny.

3. Intuicje matematyczne mają charakter propozycjonalny – odpowiadają temu, co Charles Parsons nazywa *intuition that*. Wyróżniany przez niego drugi typ intuicji matematycznych – *intuition of* – który miałby być jakimś intuicyjnym poznawaniem samych obiektów matematycznych uważamy za wtórny, dający się sprowadzić do *intuition that*. Nie możemy mieć bowiem intuicji obiektu matematycznego inaczej, jak tylko poprzez to, co na jego temat sądzimy. Ograniczenie się do *intuition that* nie wymaga zatem żadnych definitywnych rozstrzygnięć w ontologii matematyki, jak się zdaje.

2.4 Intuicja matematyczna w działaniu

Gdzie mamy do czynienia z intuicją matematyczną *w działaniu*? Wskazać należy m.in. na:

1. *Aksjomaty*. Niewątpliwie, przekonaniu intuicyjne zawieramy w aksjomatach teorii – są to przecież założenia czynione bez dowodu, mamy w nie po prostu wierzyć. Osobną jest sprawą, że – pomijając oczywiście klasyczny przypadek systemu geometrii Euklidesa – budowanie teorii matematycznych od samego początku na sposób aksjomatyczny to stosunkowo nowy standard: liczy sobie mniej niż dwieście lat. Aksjomatyczne ugruntowanie np. arytmetyki liczb naturalnych, dokonane w XIX wieku, poprzedzone było setkami lat gromadzenia wyników dotyczących tych liczb. Wybór takich, a nie innych aksjomatów wymagał osobnej refleksji nad tymi rezultatami.

2. *Praktykę badawczą matematyki*. Mieczysław Omyła wskazuje w cytowanym artykule na związki intuicji matematycznych z *abstrahowaniem* oraz *uogólnianiem*. Dodajmy może, że również intuicyjne rozumowania odwołujące się do *indukcji* oraz *analogii* mogą zostać wymienione w tym kontekście. Czasami hipotezę ogólną stawiamy pod wpływem sugestii natury indukcyjnej: powiedzmy, w teorii liczb zauważamy, iż jakaś własność przysługuje szeregu kolejnym liczbom naturalnym i na tej podstawie formułujemy zdanie ogólne, które próbujemy później udowodnić. Davies i Hersh w cytowanej wyżej książce podają ciekawy przykład rozumowania przez analogię, pochodzący z pracy Good, Churchhouse 1968: jeśli pewną funkcję wyznaczoną przez funkcję Möbiusa potraktujemy tak, jakby była zmienną losową, to otrzymujemy „prawdziwość z prawdopodobieństwem 1” hipotezy Riemanna. Istotnie, wydaje się *intuicyjnie oczywiste*, że funkcja Möbiusa „z takim samym prawdopodobieństwem” przyjmuje wartość 1 (gdy wszystkie czynniki rozkładu danej liczby są różne i jest ich liczba nieparzysta), jak i wartość -1 (gdy wszystkie czynniki rozkładu danej liczby są różne i jest ich liczba parzysta).

3. *Dydaktykę matematyki*. Elementarne intuicje matematyczne narzucane są nam przez szkołę, na drodze *przemocy symbolicznej*. Nauczanie matematyki jest *interaktywne*, by użyć modnego dziś określenia – polega wszak na rozwiązywaniu zadań, analizie przykładów, a nie jest uczeniem się *pamięciowym*. Poprawne rozwiązania, rozumowania, konstrukcje są przez nauczyciela nagradzane, niepoprawne korygowane. W programach nauczania matematyki zawsze mowa jest o *wykształcaniu intuicji matematycznych* uczniów – temu przede wszystkim ma służyć dydaktyka matematyki.

Intuicje mogą być przenoszone (przekształcane) z jednej dziedziny matematyki na inną – formalnym odpowiednikiem tej procedury są *funktory* rozważane w teorii kategorii.

3 Zmienność intuicji matematycznych

Nasze intuicje potoczne, czyli intuicje związane z codziennym doświadczeniem życiowym ssaka rozumnego są dość stabilne, trudno ulegają zmianom, ponieważ rodzaje owych potocznych doświadczeń nie zmieniły się drastycznie (powiedzmy, od czasu neolitu). Inaczej jest w przypadku intuicji matematycznych, przynajmniej w odniesieniu do zawodowych matematyków.

3.1 Antynomie i paradoksy

Trzy klasyczne przykłady zmienności intuicji, zwykle przywoływane w pracach z filozofii matematyki to:

1. *Odkrycie niewymierności*. Przekonanie Pitagorejczyków, że struktura świata zasadza się w liczbach i stosunkach liczbowych było przekonaniem filozoficznym, ale niosło też przesłanie o treści matematycznej – wielkości wymierne miały początkowo tworzyć ogół możliwych wielkości. Odkrycie niewymierności zburzyło ten porządek. Okazało się, że jeśli pewnym tworom geometrycznym próbuje się przyporządkować wielkości, to owe wielkości „nie są z dotąd znanego świata". Grecki kult racjonalności wymuszał jednak uporanie się z tą trudnością nie poprzez odmówienie niewymiernościom racji bytu, ale właśnie poprzez uznanie ich za *nowy* rodzaj wielkości, na których również można było rachować. Inną sprawą jest to, że struktura całego zbioru liczb rzeczywistych opisana została precyzyjnie dopiero w wieku XIX.

2. *Antynomia Russella*. Przekonanie, że każda własność wyznacza zbiór prowadzi, jak wiadomo, do różnych antynomii (nie istnieje zbiór wszystkich zbiorów, nie istnieje zbiór złożony dokładnie z tych zbiorów, które nie są swoimi elementami, nie istnieje zbiór wszystkich liczb porządkowych, itd.). Zostaje (w aksjomatycznej teorii mnogości Zermela-Fraenkla) zastąpione przekonaniem (wyrażonym w aksjomacie *wyróżniania*), że własności wyznaczają podzbiory *już wprzódy danych* zbiorów. Ponadto, sam język aksjomatycznej teorii mnogości narzuca pewne ograniczenia: własności, o których mowa w aksjomacie wyróżniania to własności wyrażalne w tym języku. Osobną kwestią jest tworzenie zbiorów na mocy aksjomatów: *zbioru potęgowego* oraz *zastępowania*.

3. *Paradoksy nieskończoności*. W *Elementach* Euklidesa przyjmuje się za pewne, że *całość jest większa od części*. To intuicyjne sformułowanie (wraz z przekonaniem, że wielkości są zawsze porównywalne) prowadzi do – także intuicyjnego – wniosku, że część i całość *równe* być nie mogą. Na paradoksalną własność zbiorów nieskończonych, polegającą na tym, iż każdy taki zbiór może być *równoliczny* ze swoim podzbiorem właściwym zwracali uwagę Proklos, Galileusz i Bolzano. Własność ta uchodziła za paradoksalną do czasu, gdy Dedekind przyjął właśnie ją za *definiującą* zbiory nieskończone. Odtąd zawodowi matematycy zobowiązani są korelować swoje intuicje dotyczące nieskończoności z tą definicją (lub inną, np.: von Neumanna, Tarskiego).

To właśnie wykrywanie antynomii i paradoksów jest jedną z przyczyn zmienności intuicji matematycznych. W tych bowiem przypadkach – gdy trzeba wyeliminować antynomię lub rozwiązać paradoks – dokonujemy korekty żywionych dotąd przekonań intuicyjnych. Matematyka nie toleruje sprzeczności, jeśli więc operowanie jakimiś pojęciami do niej prowadzi, to zmienić musimy albo rozumienie owych pojęć albo rozumienie dopuszczalnych operacji na nich. Z kolei wykrycie paradoksu czyni widocznym fakt, że pewne intuicje potoczne przestają obowiązywać w myśleniu o fragmencie matematyki, w którym napotkano paradoks – jak np. potoczne intuicje dotyczące miary w zderzeniu z twierdzeniem Banacha-Tarskiego o paradoksalnym rozkładzie kuli. W tym przypadku należy zresztą zwrócić uwagę, że nie tylko teza wspomnianego twierdzenia jest – z potocznego punktu widzenia – paradoksalna, lecz także środki dowodowe (nieefektywny aksjomat wyboru, operowanie zbiorami niemierzalnymi w sensie Lebesgue'a) użyte w jego uzasadnianiu umykają ogarnięciu przez intuicje dnia codziennego.

3.2 Przykłady zmienności intuicji matematycznych

Inne jeszcze przykłady zmienności intuicji matematycznych, poświadczone w dziejach matematyki to m.in.:

1. Przekonanie, że granica punktowa ciągu funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą (wyrażone np. przez Cauchy'ego). Jak pokazał Dirichlet, dla ciągłości funkcji granicznej potrzebne jest założenie o jednostajnej zbieżności rozważanego ciągu funkcji.

2. Przekonanie, że to co prawdziwe jest dla wszystkich wyrazów ciągu, prawdziwe jest także dla jego granicy (żywione przez matematyków jeszcze w wieku XVIII).

3. Przekonanie, że wszystkie równania algebraiczne jednej zmiennej posiadają rozwiązania podane przez pierwiastniki. W wieku XVI znane były takie rozwiązania dla równań stopnia $\leqslant 4$. Wierzono (Euler, Bézout, Lagrange), że można podać ogólną metodę pierwiastników, jednak dopiero Paolo Ruffini pokazał (1799), iż jest to niemożliwe dla równań stopnia $\geqslant 5$; jego nie całkiem ścisły dowód poprawił Niels Abel (1824), a ogólną teorię zapoczątkował Évariste Galois.

4. Przekonanie, że geometria euklidesowa jest *prawdziwą* geometrią, że opisuje adekwatnie przestrzeń fizyczną. Okrycie (skonstruowanie?) geometrii *nieeuklidesowych* ukazało, że *możliwe* są inne jeszcze systemy geometrii. To, jaki system geometrii adekwatnie przystaje do rzeczywistości fizycznej (globalnie, bądź w ustalonej skali) jest oczywiście problemem *pozamatematycznym*. Zwróćmy uwagę, że oprócz skonstruowania systemów geometrii nieuklidesowych (Gauss, Bolayi, Łobaczewski) badano również ogólne pojęcie *krzywizny* przestrzeni (Riemann, wykorzystując pewne pomysły Gaussa); poszczególne typy geometrii są wtedy wyznaczone przez własność ogólną: krzywizna dodatnia, ujemna bądź zerowa.

5. Przekonanie, że wszystkie problemy matematyczne są *rozstrzygalne* oraz że możliwy jest dowód *niesprzeczności* całości matematyki, w dodatku dowód *finitarny*. Stanowiło to jądro *programu Hilberta*. Jak pokazały wyniki Gödla, Turinga, Tarskiego i innych, program ten *w całości* nie może zostać zrealizowany; możliwe są jednak jego częściowe realizacje. W każdym razie wiadomo, iż *całości* matematyki nie można ująć w jednym finitarnym, niesprzecznym i rozstrzygalnym systemie.

Nie wystarczy jedynie stwierdzić, że intuicje matematyczne są zmienne i wskazać przykłady takich zmian. Potrzebne są również ustalenia, próbujące *wyjaśnić* mechanizmy owej zmienności. W szczególności, wyjaśnienia wymagają sytuacje, gdy matematycy kultywują *różne* intuicje na jeden i ten sam temat. Przy tym, owe różne intuicje mogą w ostateczności prowadzić do jednej i tej samej konstrukcji czysto formalnej, bądź jedna z konkurujących intuicji może wypierać w zapomnienie drugą. Przypomnijmy przykłady takich sporów w dziejach matematyki:

1. *Wielkości niewymierne. Teajtet a Eudoksos*. Wielkości niewymierne opisywać można (nieskończonymi) *ułamkami ciągłymi*, które wyznaczane są z użyciem algorytmu dzielenia liczb. To podejście nazwać można umownie podejściem Teajteta. Konkurencyjne podejście to teoria *proporcji*, rozwinięta przez Eudoksosa i opisana w V księdze *Elementów* Euklidesa. Teoria proporcji wykorzystywana była w metodzie *wyczerpywania*. Uogólnie-

nia teorii proporcji dokonał w wieku XIX Dedekind, podając definicję liczb rzeczywistych jako *przekrojów* zbioru wszystkich liczb wymiernych.

2. *Podstawy rachunku różniczkowego i całkowego. Newton a Leibniz.* Newton odwołuje się do geometrii, styczna jest granicą siecznych, wprowadza się zatem nową operację – przechodzenia do granicy. Leibniz wprowadza wielkości nieskończenie małe i odwołuje się do arytmetyki. Newton różniczkuje równania, Leibniz różniczkuje funkcje. W XIX wieku dokonano arytmetyzacji analizy (Cauchy, Weierstrass). Pojęcia nieskończonościowe (granica, ciągłość) wyrażone zostały w terminach arytmetycznych, a nie geometrycznych, przy czym formalizm $\varepsilon-\delta$ nie wymaga rozważania wielkości nieskończenie małych. Pojawiają się one na powrót (w analizie niestandardowej) dopiero w drugiej połowie XX wieku.

3. *Ogólne pojęcie funkcji.* O jakimś rozumieniu pojęcia funkcji możemy mówić już w przypadku teorii *szerokości form* (Oresme). Przez długi czas przez funkcję rozumiano zależność pewnych wielkości od innych, przy czym albo podany był wyraźny przepis na otrzymywanie wartości funkcji, albo i nawet sposób liczenia tych wartości mógł być nieznany (Euler). Badano możliwość reprezentacji funkcji przez szeregi nieskończone i ich sumy. W wieku XIX wykryto (skonstruowano?) przykłady funkcji, które określano jako *patologiczne*, gdyż ich własności przeczyły uprzednim przekonaniom np. na temat tego czym miałby być wykres funkcji (krzywa Weierstrassa, krzywe Peano i Hilberta – por. np. uwagi w Hahn 1956). Obecnie akceptujemy określenie pojęcia funkcji w terminach teorii mnogości, jako zbioru par uporządkowanych (z odpowiednim warunkiem jednoznaczności wartości).

4. *Algebra wektorów. Hamilton a Grassmann.* Początki analizy wektorowej wiążą się – z jednej strony – z geometryczną interpretacją liczb zespolonych (Gauss, Wessel, Argand, Mourey). Można jednak zdefiniować liczby zespolone czysto algebraicznie, np. tak, jak uczynił to Hamilton, jako pary liczb rzeczywistych, ze stosownie określonymi działaniami. Naturalne staje się wtedy poszukiwanie struktur, wyznaczonych przez układy trzech, czterech, itd. liczb rzeczywistych, przy czym najważniejszym problemem jest oczywiście możliwość zdefiniowania dla nich podstawowych operacji arytmetycznych, spełniających określone warunki. Na tej drodze Hamilton odkrył *kwaterniony*, a inni (B. Peirce, Cayley, Clifford) wprowadzili szereg dalszych struktur algebraicznych. Inną drogą szedł Grassmann, tworząc początki algebry liniowej i wprowadzając iloczyny: *skalarny* oraz *wektorowy*, swoiście rozumiane. Rozważania Grassmanna (które być może dałoby się jakoś powiązać już z ideą Leibniza rachowania na obiektach geometrycznych)

przyczyniły się w pewnym sensie do rozwoju geometrii wielowymiarowych. Spór między zwolennikami Hamiltona i Grassmanna był bardzo żywy pod koniec XIX wieku. Ostatecznie, analiza wektorowa została zaakceptowana w postaci, jaką nadali jej Gibbs i Heavyside.

Te oraz wiele innych kontrowersji w rozwoju matematyki opisują podręczniki jej historii – zob. np.: Juszkiewicz 1975–1977, Kline 1972, Kolmogorov, Yushkevich 2001, Kordos 2005, Więsław 1997. W istocie, historia matematyki to nie tylko rejestracja kolejno tworzonych teorii, ale także historia tego, jak zmieniały się intuicje matematyczne, m.in. w wyniku sporów zawodowych matematyków. Wydaje się przy tym, że społeczność matematyków (klasycznych) dąży do unifikacji intuicji, do jakiegoś wspólnego jej rozumienia. Czy zatem możemy w ogóle mówić o *błędnych* intuicjach? Nie chodziłoby w tym przypadku o błędy pojawiające się w wyniku nieuwagi, niekompetencji, lenistwa, a raczej o żywienie przekonań, które tworzyłyby *ślepe uliczki* w matematyce. Trudno tu o dobre przykłady, bo ostają się przecież jedynie intuicje zwycięskie. Być może, przykładem takiej nietrafnej intuicji był *aksjomat ograniczenia* Fraenkla w teorii mnogości: głosił on, w uproszczeniu, że istnieją tylko te zbiory, których istnienie może zostać dowiedzione z aksjomatów. Był to zatem aksjomat *minimalności*, mający ograniczać liczbę możliwych zbiorów. Rozwój teorii mnogości poszedł jednak – m.in. za sugestią Gödla, który przywoływał w tym kontekście *aksjomat zupełności* Hilberta w geometrii – w inną stronę: obecnie rozważa się jako ewentualne dalsze aksjomaty tej teorii raczej aksjomaty *maksymalności* (aksjomaty istnienia dużych liczb kardynalnych), które miałyby gwarantować istnienie możliwie jak największej liczby zbiorów.

3.3 Kilka problemów

Osobny problem dla intuicji stwarzają zdania *nierozstrzygalne* takich teorii, jak arytmetyka Peana lub teoria mnogości Zermela-Fraenkla. Z czysto formalnego punktu widzenia, można rozwijać np. teorię mnogości zarówno z założeniem hipotezy kontinuum, jak też z założeniem jej negacji. Zauważmy jednak, że teoria mnogości jest stosunkowo młodą teorią matematyczną. Być może potrzeba jeszcze wiele dziesiątków, albo i setek lat na to, aby *praktyka* badawcza matematyki miała w tej sprawie głos decydujący.

W procesie rozwoju matematyki co pewien czas pojawiają się obiekty i konstrukcje *patologiczne*. Odróżnienie normy, standardu, zwyczajności od patologii wymaga uwzględnienia czynników natury pragmatycznej. O pewnych obiektach mówimy, że „dobrze się zachowują”, mając na myśli ich przydatność w określonych zastosowaniach (np. przestrzenie Hausdorffa „zachowują się lepiej” niż ogólne przestrzenie topologiczne, funkcje analityczne „zachowują się lepiej” niż funkcje gładkie, itp.). Obiekty „dobrze zachowujące się", normalne, standardowe bywają często w mniejszości, ich standardowość jest zatem postrzegana jako prototypowość. Obiekt może być *wyjątkowy* w jakiejś klasie – np. grupy sporadyczne w klasyfikacji wszystkich grup skończonych, albo wielokomórki foremne wśród wszystkich wielościanów. Natomiast obiekty patologiczne to takie, których własności są „niechciane", jakoś rażąco sprzeczne z żywionymi dotąd przekonaniami. Obiektami takimi są np. wspomniane wyżej krzywe patologiczne. Pewne obiekty mogą tracić cechę patologiczności wraz z rozwojem teorii ich dotyczącej – np. zbioru Cantora nikt z zawodowych matematyków nie nazwie już chyba patologicznym, „straszy" się nim jedynie w niektórych popularnych opracowaniach. Dużo informacji o wyjątkach, kontrprzykładach, obiektach patologicznych znaleźć można np. w: Steen, Seebach 1995, Gelbaum, Olmsted 1990, 2003, Wise, Hall 1993.

Czy we współczesnej matematyce spotykamy paradoksy, które mogłyby nas skłaniać do zmiany intuicji matematycznych? Rozważane w teorii mnogości aksjomaty *istnienia dużych liczb kardynalnych* – choć bardzo dalekie od intuicji potocznych – zawodowych matematyków już chyba nie szokują. W miarę rozwoju rachunku prawdopodobieństwa stopniowo zaczęliśmy się przyzwyczajać do tego, że płonna jest wiara, iż jesteśmy z natury „intuicyjnymi statystykami" i potrafimy trafnie bezrefleksyjnie oceniać prawdopodobieństwa. Zaawansowane działy algebry, analizy, topologii operują już na takich poziomach abstrakcji, że trudno tu mówić o paradoksach wiążących się z intuicjami doświadczenia potocznego. Istnienie takich obiektów jak np. *sfera rogata Alexandera* poucza, że w przypadku pewnych konstrukcji musimy zapomnieć o intuicjach potocznych. Twierdzenie Smale'a (o możliwości *przenicowania* sfery S^2 w przestrzeni $\mathbb{R}^3$), które nazywane bywa paradoksalnym doczekało się jednak, rzecz godna uwagi, *wizualizacji* w postaci modelu fizycznego, który każdy może *obejrzeć*. Z kolei, istnienie *sfer egzotycznych* (homeomorficznych, lecz nie dyfeomorficznych ze „zwykłymi" sferami) lub fakt, że wśród $\mathbb{R}^n$ jedynie na $\mathbb{R}^4$ istnieje kontinuum struktur, które są homeomorficzne, ale nie są dyfeomorficzne ze „zwykłą" $\mathbb{R}^4$ trudno nazywać paradoksalnym w sensie godzenia w intuicje potoczne – dla tego oraz wielu dalszych przypadków ocena, czy mamy do czynienia z paradoksalnością związana jest z bardzo wysublimowanymi intuicjami zawodowych matematyków.

4 Zakończenie

To były jedynie dość powierzchowne uwagi na temat intuicji matematycznej. Uważamy, że głębszą wiedzę na jej temat osiągnąć można nie tyle przez analizę wypowiedzi filozofów, co raczej przez wnikliwe studiowanie dziejów samej matematyki. W pracach filozoficznych z reguły omawia się intuicje związane z pojęciami: *liczby*, *zbioru* oraz *nieskończoności* (czasem także intuicje *geometryczne*). Zadaniem dla filozofa matematyki, zastanawiającego się nad fenomenem intuicji matematycznej powinna być – naszym zdaniem – drobiazgowa analiza wielu przypadków szczególnych, ukazujących zmiany rozumienia wybranych ważnych pojęć matematyki. Oprócz wyżej wymienionych należą do nich np.: *kontinuum*, *funkcja*, *granica*, *ciągłość*, *struktura*, *obliczenie*. Zarówno opracowania z historii matematyki oraz komentarze w dobrych podręcznikach, jak i same teksty źródłowe dostarczają wiele interesującego materiału dla takich analiz. Ponadto, należy chyba uzbroić się w cierpliwość przy ferowaniu wyroków, jakież to mechanizmy poznawcze miałyby kierować np. zmiennością intuicji matematycznych – ustalenia współczesnych nauk kognitywnych w tej sprawie są, jak na razie, dosyć skromne.

Literatura cytowana

Good, I. J., Churchhouse, R. F. 1968. The Riemann hypothesis and pseudorandom features of the Möbius sequence, *Mathematics of Computation* **22**, 857–861.

Davis, J.P., Hersh, R. 1994. *Świat Matematyki*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Gelbaum, B.R., Olmsted, J.M.H. 1990. *Theorems and Counterexamples in Mathematics*. Springer-Verlag, New York.

Gelbaum, B.R., Olmsted, J.M.H. 2003. *Counterexamples in Analysis*. Dover Publications, Inc., Mineola, New York.

Hahn, H. 1956. The crisis of intuition. W: J.R. Newman (ed.), *The World of Mathematics*. Vol. **3**, Dover Publications, Inc., Mineola, New York.

Juszkiewicz, A.P. (red.) 1975–1977. *Historia matematyki. Od czasów najdawniejszych do początku XIX stulecia.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa. Tom **1**: *Od czasów najdawniejszych do początku czasów nowożytnych* (1975). Tom **2**: *Matematyka XVII stulecia* (1976). Tom **3**: *Matematyka XVIII stulecia* (1977).

Kline, M. 1972. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Oxford University Press, New York Oxford.

Kolmogorov, A.N., Yushkevich, A.P. (eds.). 2001. *Mathematics of the 19th Century. Mathematical Logic, Algebra, Number Theory, Probability Theory*. Birkhäuser, Basel.

Kordos, M. 2005. *Wykłady z historii matematyki*. SCRIPT, Warszawa.

Lakoff, G., Núñez, R.E. 2000. *Where Mathematics Comes From. How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*. Basic Books, New York.

Łukasiewicz, J. 1961. O twórczości w nauce. W: J. Słupecki (red.) *Z zagadnień logiki i filozofii. Pisma wybrane*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Omyła, M. 2010. Intuicja w naukach formalnych. *Edukacja Filozoficzna* **50**, 139–155.

Parsons, C. 2008. *Mathematical Thought and Its Objects*. Cambridge University Press, Cambridge, New York, Melbourne, Madrid, Cape Town, Singapore, São Paulo.

Steen, L.A., Seebach, J.A., Jr. 1995. *Counterexamples in Topology*. Dover Publications, Inc., New York.

Suszko, R. 1965. *Wykłady z logiki formalnej*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Tieszen, R.L. 1989. *Mathematical intuition: phenomenology and mathematical knowledge*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Więsław, W. 1997. *Matematyka i jej historia*. Wydawnictwo NOWIK, Opole.

Wise, G.L., Hall, E.B. 1993. *Counterexamples in Probability and Real Analysis*. Oxford University Press, New York.