

MATEMATYCZNE PODSTAWY KOGNITYWISTYKI

POWTÓRKA: WYKŁADY 1–6 PRZYKŁADY PYTAŃ ZALICZENIOWYCH

KOGNITYWISTYKA UAM, 2016–2017

JERZY POGONOWSKI
Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
pogon@amu.edu.pl

Zgodnie z zapowiedzią, ten i następny wykład poświęcamy powtórcie omówionego materiału. Podajemy też przykładowe pytania, które pojawią się na zajęciach poświęconych zaliczeniu wykładu 26 stycznia 2017. Dzisiejsza powtórka dotyczy *matematyki dyskretnej*.

Plan dzisiejszych działań jest następujący. W niniejszym pliku podajemy przykłady pytań zaliczeniowych, odnoszące się do poszczególnych wykładów. Pokazujemy rozwiązania zadań, pisząc je na tablicy i opatrując ustnym komentarzem.

1 Rachunek zbiorów

1. Przedstaw graficznie sumę, iloczyn oraz różnicę symetryczną zbiorów:
 $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 \leq y\}$ oraz $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |x| < 1 \text{ oraz } y \leq 2\}$.
2. Podaj zbiór potęgowy dla zbioru: $\{1, \{1, \emptyset\}, \{\emptyset\}\}$.
3. Korzystając z diagramów Venna rozstrzygnij, czy równe są zbiory:
 - (a) $A - (B \cap C)$ oraz $(A \cup B) - C$
 - (b) $(A \cup B) - C$ oraz $(A - C) \cup (B - C)$
4. Pokaż, że jest prawem rachunku zbiorów: jeśli $x \subseteq y$ oraz $y \cap z = \emptyset$, to $x \cap z = \emptyset$.
5. Pokaż, że nie jest prawem rachunku zbiorów: jeśli $x \in y$ oraz $y \in z$, to $x \in z$.

2 Rachunek relacji

1. Jakie własności formalne ma relacja R między zbiorami, określona warunkiem: $R(A, B)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A \div B = \emptyset$?
2. Narysuj graf relacji R określonej na zbiorze X , gdzie:
 $X = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ oraz
 $R = \{(x, y) \in X \times X : y = k \cdot x \text{ dla pewnej } k \in \mathbb{N}_+\}$.
3. Podaj obraz zbioru $\{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 5\}$ względem relacji:
 $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} : y = \lfloor x \rfloor\}$ (gdzie $\lfloor x \rfloor$ to funkcja podłogi).
4. Wyznacz rodzinę klas abstrakcji dla relacji $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, zdefiniowanej warunkiem:
 $R(x, y)$ wtedy i tylko wtedy, gdy x oraz y mają takie same reszty przy dzieleniu przez 3.
5. Udowodnij, że relacja $R \subseteq X \times X$ jest przechodnia wtedy i tylko wtedy, gdy $R \circ R \subseteq R$.

3 Funkcje

1. Znajdź przeciwobraz zbioru $\{y \in \mathbb{R} : 1 \leq y \leq 3\}$ względem funkcji sufitu $y = f(x) = \lceil x \rceil$.
2. Podaj funkcję odwrotną do funkcji $y = f(x) = x^2 + 4$.
3. Z jakich funkcji złożona jest funkcja: $f(x) = \sqrt{2^{\sin x}}$?
4. Niech $f(x) = 2^x - 1$ oraz $g(x) = \sqrt{x}$ dla $x \in \mathbb{R}_+$. Jakimi funkcjami są złożenia $f \circ g$ oraz $g \circ f$?
5. Udowodnij, że żaden zbiór nie jest równoliczny z rodziną wszystkich swoich podzbiorów.

4 Kombinatoryka i ciągi liczbowe

1. Ile jest rosnących funkcji ze zbioru $\{1, 2, \dots, k\}$ w zbiór $\{1, 2, \dots, n\}$, gdzie $k \leq n$?
2. Niech $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{3, 4, 5\}$ oraz $Z = \{2, 3, 4\}$. Ile jest funkcji ze zbioru $X \cup Y$ w zbiór Z ?
3. Zastosuj wzór dwumianowy do wyrażenia $(x + 2 \cdot y)^3$.
4. Oblicz granicę ciągu $a_n = \frac{n^2-1}{3-n^3}$.
5. Korzystając z zasady indukcji matematycznej, udowodnij, że:
 - (a) Jeśli X jest zbiorem skończonym o n elementach, to rodzina $\wp(X)$ ma 2^n elementów.
 - (b) $n! \geq 2^{n-1}$ dla wszystkich $n \geq 1$.

5 Struktury porządkowe

1. Zbadaj, czy w zbiorze X istnieją elementy minimalne i maksymalne, najmniejszy i największy względem relacji R określonej na zbiorze X , gdzie:
 $X = \{2, 3, 12, 18\}$ oraz
 $R = \{(x, y) \in X \times X : y = k \cdot x \text{ dla pewnej } k \in \mathbb{N}_+\}$.
2. Narysuj diagram Hassego dla struktury uporządkowanej $(\wp(\{a, b, c\}), \subseteq)$
3. Rozważmy zbiór $X = \{12, 18, 30\}$ oraz relację R zdefiniowaną warunkiem: $R = \{(x, y) \in \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}_+ : y = k \cdot x \text{ dla pewnej } k \in \mathbb{N}_+\}$. Jak słuchacze już wiedzą, R jest częściowym porządkiem w \mathbb{N}_+ . Znaleźć kres dolny i kres górny zbioru X względem relacji R .
4. Niech \mathbb{F} będzie rodziną tych wszystkich podzbiorów zbioru \mathbb{N} , których dopełnienia (do \mathbb{N}) są skończone. Ustal, czy w rodzinie \mathbb{F} istnieją elementy minimalne względem relacji inkluzji.
5. Podaj dowód Lematu Königa.

6 Struktury algebraiczne

1. Wykaż, że izomorficzne są zbiory uporządkowane:
 (\mathbb{N}, \leq) oraz $(\{1 - \frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}, \leq)$.
2. Zbuduj tabelkę działania \otimes określonego na zbiorze $\{0, 1, 2\}$ warunkiem:
 $\otimes(x, y) = \text{reszta z dzielenia przez 3 iloczynu } x \cdot y$.
3. Wykaż, że operacja iloczynu kartezjańskiego nie jest przemienna.
4. Wykaż, że iloczyn dwóch kongruencji w strukturze (X, R) (gdzie R jest dwuargumentową relacją w X , czyli $R \subseteq X \times X$) jest kongruencją w tej strukturze.
5. Udowodnij, że operacja średniej arytmetycznej dwóch liczb nie jest łączna.

* * *

Zadań o podobnej treści należy oczekiwać na zaliczeniu wykładu.