MATEMATYCZNE PODSTAWY KOGNITYWISTYKI

WYKŁAD 5: STRUKTURY PORZĄDKOWE

KOGNITYWISTYKA UAM, 2016–2017

JERZY POGONOWSKI
Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
pogon@amu.edu.pl

Na wykładzie poświęconym relacjom powiedzieliśmy parę słów o ważnym typie relacji, a mianowicie *relacjach równoważności* (zwrotnych, symetrycznych i przechodnich). Wiążą się one, jak już wiemy, z *nieodróżnialnością* obiektów (ze względu na ustalony zbiór cech). Gdy dokonujemy *kategoryzacji* przedmiotów, gdy grupujemy przedmioty nieodróżnialne pod ustalonymi względami w ich *typy* – wtedy korzystamy właśnie ze stosownych relacji równoważności.

Obok kategoryzowania inną ważną czynnością poznawczą jest ustalanie poprzedzania jednych obiektów przez inne względem jakiejś zależności. Może ono dawać w wyniku *uszeregowanie* badanych obiektów, albo jakąś ich *hierarchię*. Relacje, które reprezentują tego typu sytuacje to różnego rodzaju relacje *porządkujące*. Słuchacze znają już proste przykłady takich relacji: mniejszość w zbiorze liczb, inkluzja zbiorów.

1 Relacje porządkujące: podstawowe definicje

Słuchacze zechcą wziąć pod uwagę, że rozważamy formalne własności pewnego typu relacji, a mianowicie relacji *porządkujących* (relacji *porządku*, relacji *porządkowych*). W edukacji szkolnej słuchacze spotkali się przede wszystkim z relacjami porządku, określonymi na liczbach. Zarówno w trakcie dalszej edukacji, jak i w Życiu Dorosłym przydatna będzie wiedza dotycząca tego typu relacji określonych na różnych typach obiektów.

1.1 Porządki częściowe i liniowe

Mówimy, że relacja R jest relacją *częściowego porządku* w zbiorze X, gdy jest ona w tym zbiorze zwrotna, przechodnia oraz antysymetryczna, czyli gdy spełnione są następujące warunki:

1. *Zwrotność*: dla dowolnego $x \in X$ zachodzi xRx.

2. *Przechodniość*: dla dowolnych $x \in X$, $y \in X$ oraz $z \in X$, jeśli xRy oraz yRz, to xRz.

3. *Antysymetria*: dla dowolnych $x \in X$, $y \in X$, jeśli xRy oraz yRx, to $x = y$.

W takim przypadku mówimy też, że R *częściowo porządkuje* zbiór X. Układ (X, R) nazywamy wtedy zbiorem *częściowo uporządkowanym*.

Czasami rozważa się nieco ogólniejsze relacje porządkujące: mówimy, że R jest *quasi-porządkiem (częściowym)*, jeśli R jest zwrotna i przechodnia.

PRZYKŁADY.

1. Dla dowolnego zbioru X, układ $(\wp(X), \subseteq)$ jest zbiorem częściowo uporządkowanym (przez relację inkluzji $\subseteq$). Zauważmy, że z czysto formalnego punktu widzenia powinniśmy rozważać inkluzję jako relację między zbiorami będącymi podzbiorami ustalonego wprzódy uniwersum X, czyli jako podzbiór produktu kartezjańskiego $\wp(X) \times \wp(X)$. Rozważanie inkluzji jako relacji w uniwersum *wszystkich* zbiorów nie jest możliwe, ponieważ ogół wszystkich zbiorów sam zbiorem nie jest.

2. Relacja podzielności w zbiorze $\mathbb{N}_+$ wszystkich dodatnich liczb naturalnych jest relacją częściowego porządku w tym zbiorze. W tym porządku liczba x poprzedza liczbę y, gdy y jest podzielna przez x.

3. Relacja zachodząca między trójkątami A i B na płaszczyźnie wtedy i tylko wtedy, gdy pole A jest niewiększe od pola B nie jest częściowym porządkiem w zbiorze wszystkich trójkątów na płaszczyźnie. Jest ona zwrotna i przechodnia, ale nie jest antysymetryczna. Tak więc, rozważana relacja jest quasi-porządkiem.

Jeśli (X, R) jest zbiorem częściowo uporządkowanym oraz $x \in X$, $y \in X$, to mówimy, że x oraz y są *porównywalne* (względem częściowego porządku R), gdy xRy lub yRx. Jeśli x oraz y nie są porównywalne (względem R), to mówimy, że x oraz y są *nieporównywalne* (względem R).

Jeśli (X, R) jest zbiorem częściowo uporządkowanym oraz każde dwa elementy zbioru X są porównywalne (względem R), to mówimy, że R jest *liniowym* porządkiem w zbiorze X. Układ (X, R) nazywamy wtedy zbiorem *liniowo uporządkowanym*.

Słuchacze z pewnością zauważyli, że relacja liniowego porządku to taka relacja częściowego porządku, która jest dodatkowo *spójna* w zbiorze, na którym jest określona, czyli spełniająca warunek: dla dowolnych $x \in X$ oraz $y \in X$, jeśli $x \neq y$, to xRy lub yRx.

Jeśli (X, R) jest zbiorem częściowo uporządkowanym oraz $Y \subseteq X$, to Y nazywamy *łańcuchem* (względem relacji R) w (X, R), gdy każde dwa elementy zbioru Y są porównywalne względem R, czyli gdy relacja R ograniczona do zbioru Y jest w nim porządkiem liniowym.

Jeśli (X, R) jest zbiorem częściowo uporządkowanym oraz $Y \subseteq X$, to Y nazywamy *antyłańcuchem* (względem relacji R) w (X, R), gdy każde dwa różne elementy zbioru Y są nieporównywalne względem R.

PRZYKŁADY.

1. Rozważmy zbiór częściowo uporządkowany $(\wp(\{1,2,3,4,5,6,7\}), \subseteq)$. Przykładem łańcucha względem inkluzji jest rodzina zbiorów:
$$\{\{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,5\}, \{1,2,3,5,7\}\}.$$
2. Rozważmy częściowy porządek dodatnich liczb naturalnych wyznaczony przez relację podzielności. Dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej x łańcuchem względem tego porządku jest np. zbiór wszystkich potęg o wykładniku naturalnym liczby x, czyli zbiór $\{y \in \mathbb{N} : y = x^n \text{ dla pewnej } n \in \mathbb{N}\}$.
3. Znana ze szkoły relacja $\leqslant$ jest liniowym porządkiem w zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$.
4. Rozważmy relację inkluzji w rodzinie $\wp(\{1,2,3\})$. Zbiory $\{1,2\}$ oraz $\{2,3\}$ są nieporównywalne względem tej relacji.
5. Rozważmy częściowy porządek dodatnich liczb naturalnych wyznaczony przez relację podzielności. Każde dwie różne liczby pierwsze są nieporównywalne względem tego porządku. W konsekwencji, dowolny zbiór liczb pierwszych jest antyłańcuchem względem tego porządku.

1.2 Porządki ostre i nieostre

To odróżnienie jest dobrze znane ze szkoły, gdzie omawiano zarówno relację mniejszości $<$ między liczbami, jak i relację niewiększości $\leqslant$. W przyjętych wyżej definicjach zakładano warunek zwrotności, a więc mówiono o *nieostrych* porządkach częściowych i liniowych. Jeśli $\preceq$ jest takim (nieostrym) porządkiem częściowym (czyli relacją zwrotną, przechodnią i antysymetryczną na rozważanym zbiorze), to $\preceq$ wyznacza jednoznacznie także pewien *ostry* porządek częściowy na rozważanym zbiorze, zdefiniowany przez warunek: $x \prec y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \preceq y$ oraz $x \neq y$.

Przez *ostry porządek częściowy* rozumiemy relację, która jest przeciwzwrotna oraz przechodnia. Przez *ostry porządek liniowy* rozumiemy relację ostrego porządku częściowego, która jest spójna.

Zauważmy, że jeśli jakaś relacja jest przeciwzwrotna oraz przechodnia, to jest także asymetryczna.
PRZYKŁADY.

1. Relacja $\leqslant \subseteq \mathbb{R}^2$ (*mniejsze lub równe*) znana ze szkoły jest nieostrym porządkiem liniowym w zbiorze $\mathbb{R}$.

2. Relacja $< \subseteq \mathbb{R}^2$ (*mniejsze*) znana ze szkoły jest ostrym porządkiem liniowym w zbiorze $\mathbb{R}$.

3. Relacja inkluzji $\subseteq$ jest nieostrym częściowym porządkiem (w ustalonej rodzinie zbiorów).

4. Relacja inkluzji właściwej $\subset$ jest ostrym częściowym porządkiem (w ustalonej rodzinie zbiorów).

UWAGA. Relacje porządkujące często oznacza się symbolami, których kształt ma kojarzyć się z ideą poprzedzania jednych obiektów przez drugie. Przykłady takich symboli to, m.in.: $<$, $\leqslant$, $\prec$, $\preceq$, $\sqsubset$, $\sqsubseteq$, $\preccurlyeq$, $\lhd$, itp. Dodajmy przy okazji, że dla relacji równoważności (czyli relacji zwrotnych, symetrycznych i przechodnich), które są formalnymi odpowiednikami zależności *nieodróżnialności* pod ustalonym względem stosuje się często oznaczenia także mające kojarzyć się z ich znaczeniem, a więc m.in.: $\equiv$, $\sim$, $\simeq$, $\approx$, $\doteq$, $\approxeq$, $\backsimeq$, $\thickapprox$, $\asymp$, itp. Często też symbole te opatrywane są stosownymi indeksami, zarówno w przypadku relacji porządkujących, jak i relacji równoważności.

1.3 Porządki dyskretne i gęste

Słuchacze z łatwością rozpoznają różnicę między uporządkowaniem liczb całkowitych przez relację mniejszości a uporządkowaniem liczb wymiernych przez relację mniejszości.

Wprowadziliśmy już wcześniej, dla dowolnej relacji $R \subseteq X \times X$ oraz elementu $x \in X$, pojęcia: R-poprzednika oraz R-następnika elementu x. Powiemy, że $y \in X$ jest *bezpośrednim R-następnikiem* x, jeśli xRy oraz nie istnieje $z \in X$ taki, że $z \neq x$, $z \neq y$, xRz oraz zRy. Podobnie, x jest *bezpośrednim R-poprzednikiem* y, jeśli xRy oraz nie istnieje $z \in X$ taki, że $z \neq x$, $z \neq y$, xRz oraz zRy.

Niech $(X, \preceq)$ będzie zbiorem liniowo uporządkowanym oraz, jak zwykle, niech $\prec$ będzie ostrym porządkiem wyznaczonym przez $\preceq$ (czyli $x \prec y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \preceq y$ oraz $x \neq y$). Mówimy, że:

1. Porządek $\prec$ jest *dyskretny*, gdy każdy element $x \in X$ ma bezpośredni $\prec$-poprzednik oraz bezpośredni $\prec$-następnik.

2. Porządek $\prec$ jest *gęsty*, gdy zbiór X ma co najmniej dwa elementy oraz dla każdej pary różnych elementów $x \in X$, $y \in X$, jeśli $x \prec y$, to istnieje $z \in X$ taki, że $x \prec z$ oraz $z \prec y$.

PRZYKŁADY.

1. Zbiór wszystkich liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ jest uporządkowany w sposób dyskretny przez relację mniejszości.

2. Zbiór wszystkich liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ jest uporządkowany w sposób gęsty przez relację mniejszości.

3. Dyskretność nie jest zaprzeczeniem gęstości. Oczywiście żaden porządek liniowy nie może być jednocześnie dyskretny i gęsty. Istnieją jednak porządki liniowe, które nie są ani dyskretne ani gęste. Dla przykładu, zwykła relacja mniejszości w zbiorze $\mathbb{Z} \cup [0, 1]$ nie jest ani porządkiem dyskretnym ani porządkiem gęstym.

1.4 Operacje na porządkach

Relacje porządkujące są zbiorami, a więc można na nich wykonywać operacje określone na zbiorach, które słuchacze poznali wcześniej. Zdarza się, że na jednym i tym samym zbiorze obiektów określiliśmy, powiedzmy, dwa porządki i pytamy, czy ich kombinacja (stosownie rozumiana) także jest porządkiem. Ograniczymy się jedynie do kilku ilustracji.
PRZYKŁADY.

1. Konwers porządku częściowego jest porządkiem częściowym. Podobnie, konwers porządku liniowego jest porządkiem liniowym. Słuchacze pamiętają ze szkoły, że konwersem relacji mniejszości $<$ (powiedzmy, w zbiorze $\mathbb{R}$) jest relacja większości $>$ w tymże zbiorze. Często stosowaną praktyką jest używanie symbolu dla konwersu danego porządku zwierciadlanego odbicia symbolu dla tego porządku.

2. Jeśli $\preceq_1$ oraz $\preceq_2$ są porządkami częściowymi, to ich iloczyn $\preceq_1 \cap \preceq_2$ też jest porządkiem częściowym.

3. Jeśli $\preceq_1$ oraz $\preceq_2$ są porządkami ostrymi, to ich suma $\preceq_1 \cap \preceq_2$ jest porządkiem ostrym wtedy i tylko wtedy, gdy $(\preceq_1 \circ \preceq_2 \cup \preceq_1 \circ \preceq_2) \subseteq \preceq_1 \cup \preceq_2$.

4. Jeśli $\preceq$ jest quasi-porządkiem, to $\preceq\, \cap \preceq^{-1}$ jest relacją równoważności. Oczywiście, jeśli $\preceq$ jest porządkiem częściowym, to $\preceq\, \cap \preceq^{-1}$ także jest relacją równoważności: czy widać jaką? Te fakty mają bardzo istotne znaczenie dla określania porządku w zbiorze klas abstrakcji otrzymanej relacji równoważności, który byłby *zgodny* z wyjściowym porządkiem na rozważanym uniwersum.

Ważne są również takie przypadki, gdy na jednym ze zbiorów określono jakiś porządek, na drugim inny, a interesuje nas, czy na sumie, iloczynie lub produkcie kartezjańskim rozważanych zbiorów także określić można porządek, w jakimś sensie *zgodny* z obu wyjściowymi porządkami. Ograniczymy się jedynie do kilku ilustracji.
PRZYKŁADY.

1. *Suma zbiorów częściowo uporządkowanych*. Niech $(X, \preceq)$ oraz $(Y, \sqsubseteq)$ będą zbiorami częściowo uporządkowanymi takimi, że $X \cap Y = \emptyset$. Na zbiorze $X \cup Y$ możemy zdefiniować relację $\leqslant$ następująco: $u \leqslant v$ wtedy i tylko wtedy gdy zachodzi jeden z członów alternatywy:

   (a) $u \in X$ oraz $v \in Y$ lub
   (b) $u, v \in X$ oraz $u \preceq v$ lub
   (c) $u, v \in Y$ oraz $u \sqsubseteq v$.

   Tak określona relacja $\leqslant$ jest wtedy częściowym porządkiem na zbiorze $X \cup Y$.

2. *Porządek leksykograficzny w produkcie kartezjańskim*. Niech $(X, \preceq)$ oraz $(Y, \sqsubseteq)$ będą zbiorami częściowo uporządkowanymi. *Porządkiem leksykograficznym* w zbiorze $X \times Y$ nazywamy relację $\leqslant_\ell$ określoną następująco dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$ oraz $y_1, y_2 \in Y$: $(x_1, y_1) \leqslant_\ell (x_2, y_2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_1 \preceq x_2$ lub ($x_1 = x_2$ oraz $y_1 \sqsubseteq y_2$). Wtedy $\leqslant_\ell$ jest porządkiem częściowym w zbiorze $X \times Y$.

3. *Porządek produktowy*. Niech $(X, \preceq)$ oraz $(Y, \sqsubseteq)$ będą zbiorami częściowo uporządkowanymi. Na produkcie kartezjańskim $X \times Y$ można określić inny jeszcze porządek częściowy $\leqslant_{pr}$, wyznaczony przez porządki w X oraz w Y. Niech mianowicie dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$ oraz $y_1, y_2 \in Y$: $(x_1, y_1) \leqslant_{pr} (x_2, y_2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_1 \preceq x_2$ oraz $y_1 \sqsubseteq y_2$.

Rozważmy zbiory: $\{1, 2\}$ oraz $\mathbb{N}$, oba uporządkowane przez zwykłą relację porządku. Porządki leksykograficzne w zbiorach $\mathbb{N} \times \{1, 2\}$ oraz $\{1, 2\} \times \mathbb{N}$ istotnie się różnią:

1. $\mathbb{N} \times \{1, 2\}$ uporządkowany leksykograficznie jest „tego samego typu” porządkiem co zwykły porządek w zbiorze $\mathbb{N}$, co ustala bijekcja $f : \mathbb{N} \to (\mathbb{N} \times \{1, 2\})$, zdefiniowana wzorami: $f(2n) = (n, 1)$, $f(2n + 1) = (n, 2)$.

2. $\{1, 2\} \times \mathbb{N}$ jest uporządkowany leksykograficznie tak, jak przez zwykły porządek uporządkowany jest zbiór:

$$\{1 - \frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{2 - \frac{1}{n+1} n \in \mathbb{N}\}.$$

   Poświadcza to bijekcja

$$g : (\{1, 2\} \times \mathbb{N}) \to \{1 - \frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{2 - \frac{1}{n+1} n \in \mathbb{N}\},$$

   zdefiniowana wzorem: $g((1, n)) = 1 - \frac{1}{n+1}$, $g((2, n)) = 2 - \frac{1}{n+1}$.

   Można więc (nieformalnie) powiedzieć, że $\{1, 2\} \times \mathbb{N}$ jest uporządkowany leksykograficznie tak, jak *dwie kopie* zbioru $\mathbb{N}$ (ze zwykłym porządkiem), *ustawione jedna za drugą*.

Terminu *porządek leksykograficzny* używa się także na oznaczenie pewnego typu porządku, który można określić w zbiorze wszystkich *słów*, utworzonych z elementów ustalonego *alfabetu*. Być może będziemy jeszcze mieli okazję poznać i zastosować to pojęcie.

1.5 Dygresja: paradoks Condorceta

Przypuśćmy, że dziewczęta X, Y, Z chcą ustalić, który z facetów A, B, C jest najbardziej przystojny. Niech preferencje poszczególnych dziewcząt wyglądają następująco (piszemy $P > Q$ w znaczeniu: wybór P jest preferowany względem wyboru Q; preferencje każdego dziewczęcia są *przechodnie*):

X: $A > B > C$

Y: $B > C > A$

Z: $C > A > B$.

Czy możliwe jest liniowe uporządkowanie kandydatów zgodne z preferencjami większości dziewcząt?

Dość łatwo widać, że tak nie jest:

1. $\frac{2}{3}$ dziewcząt uważa, że A jest bardziej przystojny od B.

2. $\frac{2}{3}$ dziewcząt uważa, że B jest bardziej przystojny od C.

3. $\frac{2}{3}$ dziewcząt uważa, że C jest bardziej przystojny od A.

Tak więc, choć indywidualne preferencje poszczególnych dziewcząt są dobrze określone, to nie można ich uzgodnić dla otrzymania uszeregowania w sposób liniowy wszystkich rozważanych kandydatów, jeśli kryterium miałoby stanowić to, jak pozycja kandydata zależy od liczby oddanych na niego głosów.

Sytuacja opisana powyżej przedstawia tzw. *paradoks Condorceta*. Pojawia on się także (w nieco bardziej złożonej postaci) w pewnych twierdzeniach pokazujących, że niemożliwe jest przeprowadzenie wyborów (czyli ustalenie globalnych preferencji społeczeństwa), które czyniłyby zadość pewnym naturalnym zasadom demokracji. Zachęcamy zainteresowanych słuchaczy do poczytania o *twierdzeniu Arrowa*, które dotyczy tej problematyki.

1.6 Intuicje dotyczące izomorfizmu porządków

Ogólne pojęcie *izomorfizmu* omówimy w następnym wykładzie. Teraz ograniczymy się jedynie do przypadku szczególnego, dotyczącego porównywania relacji porządkowych.

Niech $(X, \preceq)$ oraz $(Y, \sqsubseteq)$ będą zbiorami częściowo uporządkowanymi. Mówimy, że funkcja $f : X \to Y$ jest *izomorfizmem* tych zbiorów, jeśli:

1. f jest bijekcją z X na Y.

2. f jest funkcją zachowującą porządek, czyli dla dowolnych $x_1 \in X$, $x_2 \in X$: $x_1 \preceq x_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(x_1) \sqsubseteq f(x_2)$.

Jeśli istnieje izomorfizm układów $(X, \preceq)$ oraz $(Y, \sqsubseteq)$, to mówimy, że układy te są *izomorficzne*.

Tak więc, układy izomorficzne są „tak samo zbudowane”, jeśli chodzi o relacje, określone na rozważanych uniwersach.

Zauważmy ponadto, że jeśli $(X, \preceq)$ oraz $(Y, \sqsubseteq)$ są zbiorami *liniowo* uporządkowanymi, to dla ustalenia, że są one izomorficzne wystarczy podać przykład funkcji (surjekcji) *ściśle rosnącej* $f : X \to Y$ takiej, że dla dowolnych $x_1 \in X$, $x_2 \in X$: jeśli $x_1 \preceq x_2$, to $f(x_1) \sqsubseteq f(x_2)$.

PRZYKŁADY.

1. Rozważmy zbiory liniowo uporządkowane $(\mathbb{N}, \leqslant)$ oraz $(\{1 - \frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}, \leqslant)$. Są one izomorficzne, gdyż funkcja ściśle rosnąca $f(n) = 1 - \frac{1}{n+1}$ zachowuje rozważany porządek.

2. Funkcja $f : \mathbb{R} \xrightarrow[1-1]{na} (-1, 1)$ określona wzorem $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ jest ściśle rosnąca, ustala zatem izomorfizm układów $(\mathbb{R}, \leqslant)$ oraz $((-1, 1), \leqslant)$.

3. Rodzina wszystkich podzbiorów zbioru $\{1, 2, 3\}$ uporządkowana częściowo przez inkluzję jest izomorficzna ze zbiorem liczb $\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ uporządkowanym częściowo przez relację podzielności. Zachęcamy słuchaczy do narysowania grafów obu rozważanych relacji.

2 Wyróżnione elementy i podzbiory

Wyżej określono już pewne szczególne podzbiory w zbiorach częściowo uporządkowanych, a mianowicie łańcuchy i antyłańcuchy. Teraz przyjrzymy się pewnym wyróżnionym elementom w zbiorach częściowo uporządkowanych.

2.1 Elementy: minimalne, maksymalne, najmniejszy i największy

Niech $(X, \preceq)$ będzie zbiorem częściowo uporządkowanym oraz, jak zwykle, niech $\prec$ będzie ostrym porządkiem wyznaczonym przez $\preceq$ (czyli $x \prec y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \preceq y$ oraz $x \neq y$). Niech ponadto $A \subseteq X$ oraz $a \in X$. Mówimy, że a jest:

1. *elementem najmniejszym* w zbiorze A, gdy $a \in A$ oraz $a \preceq x$ dla wszystkich $x \in A$;

2. *elementem największym* w zbiorze A, gdy $a \in A$ oraz $x \preceq a$ dla wszystkich $x \in A$;

3. *elementem minimalnym* w zbiorze A, gdy $a \in A$ oraz nie istnieje $x \in A$ taki, że $x \prec a$;

4. *elementem maksymalnym* w zbiorze A, gdy $a \in A$ oraz oraz nie istnieje $x \in A$ taki, że $a \prec x$.

PRZYKŁADY.

1. Rozważmy rodzinę wszystkich *niepustych* podzbiorów zbioru $\{1, 2, 3\}$ częściowo uporządkowaną poprzez relację inkluzji $\subseteq$. Elementem największym w sensie tego porządku jest zbiór $\{1, 2, 3\}$, nie istnieje element najmniejszy w tej rodzinie. Elementami minimalnymi są zbiory jednoelementowe: $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$.

2. W rodzinie *wszystkich* podzbiorów zbioru $\{1, 2, 3\}$ częściowo uporządkowanego poprzez relację inkluzji $\subseteq$ istnieje element największy $\{1, 2, 3\}$ oraz element najmniejszy, którym jest zbiór pusty $\emptyset$.

3. W zbiorze liczb $\{2, 3, 5, 6, 10, 15\}$ uporządkowanym częściowo przez relację podzielności nie istnieją elementy: największy i najmniejszy, elementami maksymalnymi są 6, 10 oraz 15, zaś elementami minimalnymi są: 2, 3 oraz 5.

4. W zbiorze $\{x \in \mathbb{N} : x > 1\}$ uporządkowanym częściowo przez relację podzielności nie istnieją elementy: największy i najmniejszy; elementami minimalnymi są wszystkie liczby pierwsze, elementy maksymalne nie istnieją.

UWAGA. W mowie potocznej często używa się zamiennie słów: minimalny oraz najmniejszy (a także: maksymalny oraz największy). W dalszym ciągu używamy czterech wyżej wprowadzonych terminów wyłącznie w sensie podanych definicji.

2.2 Ograniczenia i kresy

Niech $(X, \preceq)$ będzie zbiorem częściowo uporządkowanym oraz, jak zwykle, niech $\prec$ będzie ostrym porządkiem wyznaczonym przez $\preceq$ (czyli $x \prec y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \preceq y$ oraz $x \neq y$). Niech ponadto $A \subseteq X$ oraz $a \in X$. Mówimy, że a jest:

1. *ograniczeniem dolnym* zbioru A, gdy $a \preceq x$ dla wszystkich $x \in A$ (zauważmy, że a nie musi należeć do A oraz że dany zbiór może mieć wiele ograniczeń dolnych);

2. *ograniczeniem górnym* zbioru A, gdy, gdy $x \preceq a$ dla wszystkich $x \in A$ (zauważmy, że a nie musi należeć do A oraz że dany zbiór może mieć wiele ograniczeń górnych);

3. *kresem dolnym* (*infimum*) zbioru A, gdy a jest elementem największym w zbiorze wszystkich ograniczeń dolnych zbioru A (zauważmy, że a nie musi należeć do A);

4. *kresem górnym* (*supremum*) zbioru A, gdy a jest elementem najmniejszym w zbiorze wszystkich ograniczeń górnych zbioru A (zauważmy, że a nie musi należeć do A).

Kres górny (supremum) zbioru A oznaczamy przez $\sup A$, kres dolny (infimum) zbioru A oznaczamy przez $\inf A$. Jeśli zbiór A ma co najmniej jedno ograniczenie górne, to mówimy, że jest *ograniczony z góry*, a jeśli ma co najmniej jedno

ograniczenie dolne, to mówimy, że jest *ograniczony z dołu*. Oczywiście wszystkie te pojęcia odnoszą się do rozważanego w danym przypadku porządku.
PRZYKŁADY.

1. Niech $\mathcal{A} \subseteq \wp(X)$ dla pewnego zbioru X oraz niech $\mathcal{A} \neq \emptyset$. Rozważamy inkluzję jako porządek częściowy w rodzinie $\wp(X)$. Ograniczeniem dolnym zbioru $\mathcal{A}$ w $\wp(X)$ jest dowolny podzbiór zbioru X, który jest zawarty we wszystkich zbiorach należących do $\mathcal{A}$. Kresem dolnym zbioru $\mathcal{A}$ jest $\bigcap \mathcal{A}$.

2. Niech $\mathcal{A} \subseteq \wp(X)$ dla pewnego zbioru X oraz niech $\mathcal{A} \neq \emptyset$. Rozważamy inkluzję jako porządek częściowy w rodzinie $\wp(X)$. Ograniczeniem górnym zbioru $\mathcal{A}$ w $\wp(X)$ jest dowolny podzbiór zbioru X, zawierający wszystkie zbiory należące do $\mathcal{A}$. Kresem górnym zbioru $\mathcal{A}$ jest $\bigcup \mathcal{A}$.

3. Rozważmy dowolny niepusty skończony zbiór A, będący podzbiorem zbioru $\mathbb{N}_+$ i częściowy porządek w tym zbiorze, wyznaczony przez relację podzielności. Ograniczeniem dolnym zbioru A w $\mathbb{N}_+$ jest dowolna liczba, która jest wspólnym dzielnikiem wszystkich liczb z A. Kresem dolnym zbioru A jest największy wspólny dzielnik wszystkich liczb należących do A.

4. Rozważmy dowolny niepusty skończony zbiór A, będący podzbiorem zbioru $\mathbb{N}_+$ i częściowy porządek w tym zbiorze, wyznaczony przez relację podzielności. Ograniczeniem górnym zbioru A w $\mathbb{N}_+$ jest dowolna liczba, która jest wspólną wielokrotnością wszystkich liczb z A. Kresem górnym zbioru A jest najmniejsza wspólna wielokrotność wszystkich liczb należących do A.

5. Rozważmy podzbiór $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$ zbioru $\mathbb{Q}$ wszystkich liczb wymiernych (uporządkowanego w zwykły sposób). Jest on ograniczony z góry (np. przez każdą liczbę wymierną większą od 13), ale nie istnieje w $\mathbb{Q}$ jego kres górny.

6. Zbiór $\mathbb{P}$ wszystkich liczb pierwszych rozważany jako podzbiór zbioru wszystkich liczb naturalnych uporządkowanego przez relację mniejszości ma ograniczenie dolne (np. liczbę 1) oraz ma kres dolny (liczbę 2), nie ma natomiast elementu największego względem tej relacji. Nie istnieją też elementy maksymalne w zbiorze $\mathbb{P}$ względem tej relacji.

Niektóre zależności między omawianymi wyżej elementami wyróżnionymi podaje następujące twierdzenie (którego dowód jest oczywisty):
TWIERDZENIE. Niech $(X, \preceq)$ będzie zbiorem częściowo uporządkowanym oraz niech $A \subseteq X$. Wtedy:

1. W zbiorze A istnieje co najwyżej jeden element najmniejszy oraz co najwyżej jeden element największy.

2. Zbiór A ma co najwyżej jeden kres dolny oraz co najwyżej jeden kres górny.

3. Jeśli $a \in A$ jest elementem najmniejszym w zbiorze A, to a jest:

   (a) jedynym elementem minimalnym w zbiorze A,

   (b) kresem dolnym zbioru A.

4. Jeśli $a \in A$ jest elementem największym w zbiorze A, to a jest:

   (a) jedynym elementem maksymalnym w zbiorze A,

   (b) kresem górnym zbioru A.

3 Kraty i algebry Boole'a: definicja porządkowa

Zbiór częściowo uporządkowany $(X, \preceq)$ nazywamy *kratą*, jeśli dla dowolnych dwóch elementów $x \in X$ oraz $y \in X$ istnieją kresy: $\sup\{x, y\}$ oraz $\inf\{x, y\}$. Zwykle używa się następujących oznaczeń:

1. $x \cap y$ (lub $x \wedge y$) dla $\inf\{x, y\}$

2. $x \cup y$ (lub $x \vee y$) dla $\sup\{x, y\}$.

Krata $(X, \preceq)$ jest *dystrybutywna*, gdy dla wszystkich $x, y, z \in X$:

$$x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$$

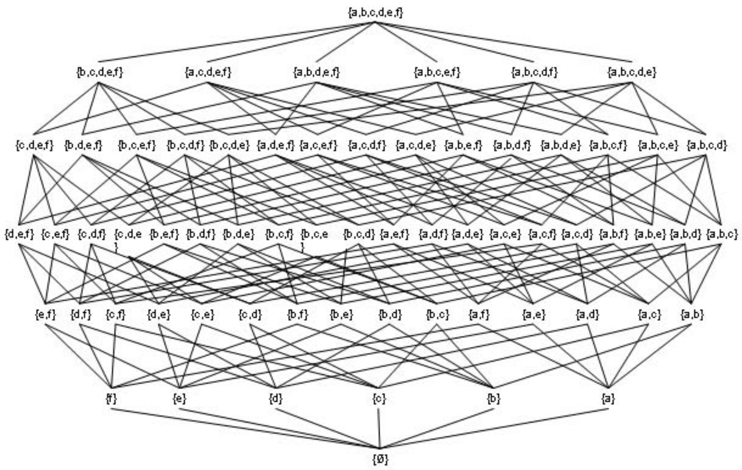
$$x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z).$$

Największy element kraty (o ile istnieje), nazywamy *jedynką* kraty i oznaczamy np. przez $\mathbf{1}$.

Najmniejszy element kraty (o ile istnieje), nazywamy *zerem* kraty i oznaczamy np. przez $\mathbf{0}$.

Algebrą Boole'a nazywamy każdą kratę dystrybutywną $(X, \preceq)$ z zerem $\mathbf{0}$ oraz jedynką $\mathbf{1}$, w której dla każdego elementu $x \in X$ istnieje *uzupełnienie* $-x$ tego elementu, spełniające warunki: $x \cup -x = \mathbf{1}$, $x \cap -x = \mathbf{0}$.

Zwykle reprezentuje się kraty graficznie, za pomocą *diagramów Hassego*. W diagramie takim węzły odpowiadają elementom kraty, a ich połączenia mają reprezentować porządek kratowy. Przyjmuje się przy tym umowę, że gdy $x \leqslant y$,



to węzeł x jest na rysunku umieszczany niżej niż węzeł y. Dla przykładu, załączamy diagram Hassego kraty $(\wp(\{a, b, c, d, e, f\}), \subseteq)$ wszystkich podzbiorów zbioru sześcioelementowego $\{a, b, c, d, e, f\}$ z inkluzją jako porządkiem częściowym.

Źródło: Public Domain, https://en.wikipedia.org/w/index.php?curid=15327698

PRZYKŁADY.

1. Zbiór wszystkich dodatnich liczb naturalnych częściowo uporządkowany poprzez relację podzielności (bez reszty) jest kratą. Największy wspólny dzielnik liczb x oraz y jest tu kresem dolnym zbioru $\{x, y\}$, a najmniejsza wspólna wielokrotność liczb x oraz y jest tu kresem górnym zbioru $\{x, y\}$.

2. *Wartości logiczne*. Znane słuchaczom z kursu *Wprowadzenie do logiki* wartości logiczne 0 oraz 1 tworzą algebrę Boole'a względem porządku określonego warunkiem $0 \preceq 1$.

3. *Zbiór potęgowy*. Dla dowolnego zbioru X, rodzina $\wp(X)$ jest algebrą Boole'a. Rozważanym porządkiem jest relacja inkluzji $\subseteq$. Kresem dolnym dla pary zbiorów $\{A, B\}$ jest ich iloczyn $A \cap B$, kresem górnym dla pary zbiorów $\{A, B\}$ jest ich suma $A \cup B$, uzupełnieniem elementu $A \subseteq X$ jest jego dopełnienie $A' = X - A$.

4. *Ciała zbiorów*. *Ciałem zbiorów* nazywamy dowolną rodzinę zbiorów, która jest domknięta na operacje: sumy, iloczynu oraz dopełnienia. Każde ciało

zbiorów jest algebrą Boole'a. Rozważanym porządkiem jest relacja inkluzji $\subseteq$. Kresy określone są tak samo, jak w poprzednim przykładzie.

Na następnym wykładzie poznamy inną jeszcze (algebraiczną) charakterystykę krat oraz algebr Boole'a.

4 Drzewa

Drzewa to bardzo ważne struktury porządkowe, spotykamy je w wielu zastosowaniach. Drzewa reprezentują *struktury składniowe* wyrażeń, *obliczenia* również traktować możemy jako drzewa. Także *dowody* twierdzeń są drzewami.

4.1 Definicje

Drzewem (o korzeniu x_0) nazwiemy każdy układ (X, R, x_0) taki, że:

1. (X, R) jest grafem o zbiorze *wierzchołków* X i zbiorze *krawędzi* $R \subseteq X \times X$;

2. R jest częściowym porządkiem w X;

3. x_0 jest elementem R-najmniejszym w X;

4. zbiór wszystkich R-poprzedników każdego wierzchołka jest liniowo uporządkowany przez relację R.

To jest jedna z możliwych definicji drzewa. Rozważa się też inne, w zależności od zastosowań. Potrzebne nam będą pewne ustalenia terminologiczne:

1. *Liśćmi* drzewa D nazywamy wszystkie te jego wierzchołki, które nie mają R-następników.

2. Jeśli $(x, y) \in R$ jest krawędzią w D, to x nazywamy *przodkiem* y, a y nazywamy *potomkiem* x. Jeśli $(x, y) \in R - R^2$ jest krawędzią w D, to x nazywamy *bezpośrednim przodkiem* y, zaś y nazywamy *bezpośrednim potomkiem* x.

3. Każdy podzbiór zbioru wierzchołków drzewa D, który jest uporządkowany liniowo przez R nazywamy *łańcuchem* w D (czasem: *ścieżką* w D). Każdy łańcuch maksymalny (względem inkluzji) w D nazywamy *gałęzią* w D.

4. Przez *długość* łańcucha P rozumiemy liczbę elementów zbioru P.

5. *Rzędem* wierzchołka x nazywamy moc (liczbę elementów) zbioru wszystkich bezpośrednich potomków x. *Rzędem* drzewa D jest kres górny rzędów wszystkich wierzchołków drzewa D.

6. Drzewo D jest *skończone*, jeśli zbiór jego wierzchołków jest skończony; w przeciwnym przypadku jest *nieskończone*. Drzewo D jest *rzędu skończonego* (jest *skończenie generowane*), jeśli każdy jego wierzchołek ma rząd skończony.

7. Przez indukcję definiujemy *poziomy* drzewa:

   (a) poziom *zerowy* to zbiór jednoelementowy, złożony z korzenia drzewa;

   (b) poziom $k + 1$ to zbiór wszystkich bezpośrednich następników wierzchołków poziomu k.

8. W dalszym ciągu będziemy rozważać głównie drzewa skończone lub rzędu skończonego.

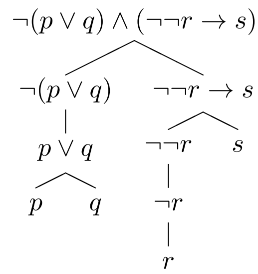
9. *Drzewo dwójkowe* to drzewo, w którym każdy wierzchołek ma co najwyżej dwóch bezpośrednich potomków. *Pełne drzewo dwójkowe* to drzewo, w którym każdy wierzchołek ma dokładnie dwóch bezpośrednich potomków.

10. Przez *drzewo znakowane* (elementami ze zbioru L) rozumiemy parę uporządkowaną (D, f), gdzie D jest drzewem, a f jest funkcją ze zbioru wierzchołków drzewa D w zbiór L. W zastosowaniach w logice zwykle L jest pewnym zbiorem formuł.

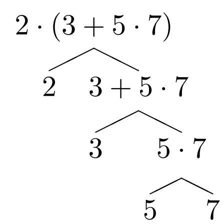
11. Graficzne reprezentacje drzew są rysunkami, na których wierzchołki (jakoś znakowane – punktami, liczbami, formułami, itd.) połączone są liniami, odpowiadającymi krawędziom. Przy tym, jeśli (X, R, x_0) jest drzewem, to na rysunku zaznaczamy tylko krawędzie należące do $R - R^2$.

PRZYKŁADY.

1. *Drzewa składniowe*. Na kursach logicznych słuchacze poznają reprezentacje składniowe wyrażeń rozważanych języków formalnych. Dla przykładu, każdej formule (powiedzmy, języka klasycznego rachunku zdań) przyporządkować można drzewo jej wszystkich *podformuł*. Np. formule $\neg(p \vee q) \wedge (\neg\neg r \to s)$ odpowiada drzewo:



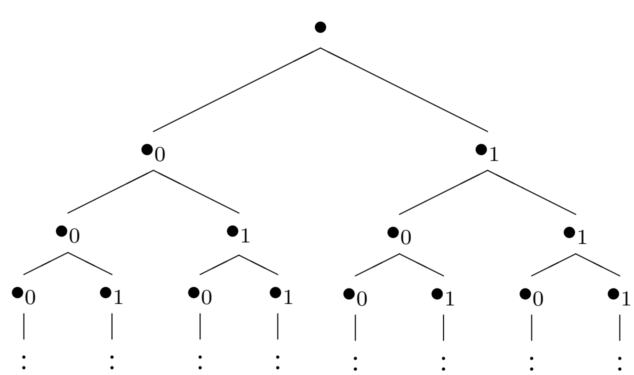
2. *Obliczenia*. Podobnie, obliczeniom arytmetycznym można przyporządkować stosowne drzewa: na liściach umieszcza się argumenty, w pozostałych wierzchołkach wyniki kolejnych obliczeń, w korzeniu znajduje się końcowy wynik. Dla przykładu, obliczenie $2 \cdot (3 + 5 \cdot 7)$ reprezentuje drzewo:



4.2 Przypomnienie: nieskończone drzewo dwójkowe

W wykładzie trzecim poznaliśmy *pełne drzewo dwójkowe*. Przypomnijmy tę konstrukcję, powtarzając fragment wykładu trzeciego.

Każdy wierzchołek ma dwóch bezpośrednich potomków: lewego potomka znakujemy przez 0, prawego przez 1. Ta reprezentacja pełnego drzewa dwójkowego wygląda zatem następująco:



Wykorzystując tę reprezentację pokażemy, że nie jest możliwe ponumerowanie (liczbami naturalnymi: 0, 1, 2, 3, 4, 5,...) wszystkich gałęzi pełnego drzewa dwójkowego, czyli wszystkich nieskończonych ciągów o wyrazach 0 lub 1.

Rozwiązanie wykorzystuje *metodę przekątniową* Cantora. Przypuśćmy, dla dowodu nie wprost, że można wszystkie gałęzie nieskończonego drzewa dwójkowego ponumerować liczbami naturalnymi. Niech to wyliczenie ma postać następującą (każda a_i^j jest zerem lub jedynką):

1. $g_1 = a_1^1 a_1^2 a_1^3 \ldots$
2. $g_2 = a_2^1 a_2^2 a_2^3 \ldots$
3. $g_3 = a_3^1 a_3^2 a_3^3 \ldots$
4. itd.

Rozważmy ciąg $G = b_1 b_2 b_3 \ldots$, gdzie:

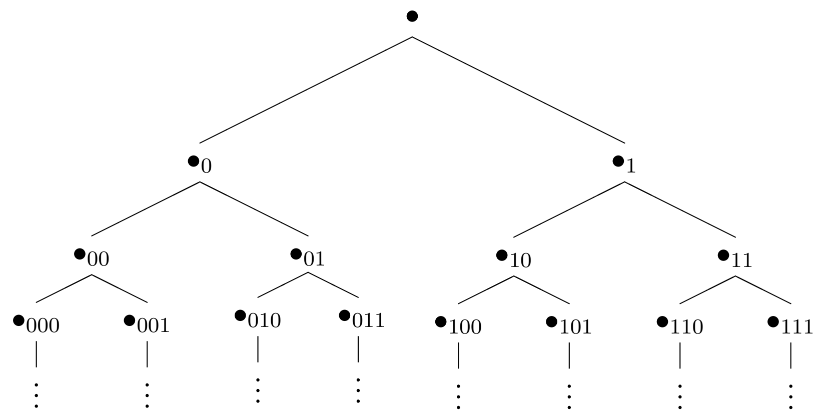
1. jeśli $a_n^n = 0$, to $b_n = 1$
2. jeśli $a_n^n = 1$, to $b_n = 0$.

Wtedy ciąg G różni się od *każdego* z ciągów g_n (co najmniej na n-tym miejscu). Tak więc, jakkolwiek chcielibyśmy ponumerować wszystkie gałęzie pełnego drzewa dwójkowego liczbami naturalnymi, to zawsze pozostaną gałęzie, dla których numerów nie starczy.

Zauważmy, że nasze przypuszczenie dotyczyło *dowolnego* sposobu numerowania wszystkich gałęzi drzewa dwójkowego liczbami naturalnymi. Powyższy wynik oznacza zatem, że taka (wyczerpująca wszystkie gałęzie) numeracja jest niemożliwa. Tak więc wszystkich gałęzi tego drzewa nie można ustawić w ciąg uporządkowany tak, jak wszystkie liczby naturalne.

Pełne drzewo dwójkowe reprezentuje wszystkie wartościowania w klasycznym rachunku zdań: jak słuchacze wiedzą z kursu *Wprowadzenia do logiki*, każde takie wartościowanie jest nieskończonym ciągiem zero-jedynkowym, a więc gałęzią w pełnym drzewie dwójkowym.

Możemy też patrzeć na pełne drzewo dwójkowe w sposób następujący. Każdy z kolejnych wierzchołków ma dwóch bezpośrednich potomków. Wierzchołki (oprócz korzenia) kodujemy *ciągami* zer i jedynek. Tak więc, jeśli jakiś wierzchołek ma kod σ, to jego bezpośrednimi potomkami są wierzchołki o kodach: $\sigma 0$ oraz $\sigma 1$.



4.3 Lemat Königa

LEMAT KÖNIGA. *Jeśli drzewo* $D = (X, R, x_0)$ *rzędu skończonego jest nieskończone, to ma gałąź nieskończoną.*
DOWÓD. Przypuśćmy, że D jest nieskończone. Zdefiniujemy gałąź nieskończoną $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ w D przez indukcję matematyczną.

Element x_0 (czyli korzeń drzewa D) jest pierwszym elementem konstruowanej gałęzi. Ponieważ D jest nieskończone, więc x_0 ma nieskończenie wiele R-następników.

Przypuśćmy, że $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ zostały zdefiniowane tak, że x_i należy do i-tego poziomu drzewa D oraz x_i ma nieskończenie wiele R-następników. Z założenia, x_{n-1} ma tylko skończenie wiele *bezpośrednich* R-następników. Ponieważ x_{n-1} ma nieskończenie wiele R-następników, więc co najmniej jeden z jego bezpośrednich R-następników także ma nieskończenie wiele R-następników. Wybieramy więc element x_n z n-tego poziomu drzewa D o tej właśnie własności. Wtedy x_n ma nieskończenie wiele R-następników. Ponieważ jest tak dla każdego n, pokazaliśmy istnienie nieskończonej gałęzi $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ w drzewie D.
PRZYKŁADY.

1. *Przykład drzewa, które nie jest skończenie generowane*. Wyobraźmy sobie drzewo, z którego korzenia zaczyna się nieskończenie wiele gałęzi, np. o długości jeden, długości dwa, długości trzy, itd. Takie drzewo nie jest skończenie generowane.

2. *Perspektywa Demona i perspektywa Mrówki*. Przypuśćmy, że D jest drzewem dwójkowym rzędu skończonego (drzewem *skończenie generowanym*). Oglądać je można z dwóch perspektyw:

(a) *Perspektywa Demona*. Widzi on całe drzewo D. Ma pełną informację o D. Uzna, że D jest *nieskończone*, gdy ma ono nieskończoną liczbę wierzchołków (lub, co na to samo wychodzi, nieskończoną liczbę krawędzi).

(b) *Perspektywa Mrówki*. Mrówka może wędrować po drzewie D, startując z jego korzenia i dokonując wyborów (lewo-prawo) w każdym z kroków (i nie zawracając). Ma niepełną informację o D. Może osiągnąć kres swojej wędrówki, docierając do liścia. Dla Mrówki drzewo będzie *nieskończone*, jeśli da jej ono gwarancję (koszmarnej) nieśmiertelności, czyli gdy Mrówka znajdzie gałąź nieskończoną w D, po której będzie dreptać, dreptać, dreptać... Mrówka drepcząca po (skończenie generowanym) drzewie dwójkowym robi to dzielnie, bez trwogi. Jeśli dotrze do liścia drzewa, to może spokojnie przejść do (szczęśliwego) Niebytu. Jeśli ma pecha żyć w drzewie nieskończonym i w dodatku ma Prawdziwego Pecha, ponieważ wybrała gałąź nieskończoną, to cóż – musi hardo znosić Koszmar Nieśmiertelności. Bądźcie dzielni, co najmniej tak samo, jak Mrówka.

4.4 Dygresja: gra w kulki i uśmiercanie hydry

Przypuśćmy, że masz nieskończenie wiele kul, ponumerowanych dodatnimi liczbami całkowitymi, przy czym każda taka liczba jest umieszczona na nieskończenie wielu kulach (masz więc nieskończenie wiele kul z jedynką, nieskończenie wiele z dwójką, nieskończenie wiele z trójką, itd.). Masz też pudełko, które zawiera skończenie wiele ponumerowanych kul. Celem zabawy jest opróżnienie pudełka, wedle następującej reguły. W każdym kroku wyjmujesz pewną kulę, a na jej miejsce wkładasz całkiem dowolną liczbę kul o mniejszych numerach. Ponieważ nie ma mniejszych od jedynki dodatnich liczb całkowitych, więc kuli z jedynką niczym nie zastępujesz. Rozwiązanie wygląda prosto: wystarczy, że zastąpisz każdą kulę w pudełku kulą z jedynką, a potem wyjmiesz te wszystkie kule z jedynką po kolei. Ciekawe w tej zabawie jest jednak to, że nie można z góry ograniczyć liczby kroków potrzebnych to opróżnienia pudełka – pamiętajmy, że można „utrudniać” poprzez dokładanie dowolnej skończonej liczby kul, byle o numerze mniejszym niż numer kuli zastępowanej. Czy potrafisz uzasadnić, że zabawa musi zakończyć się po skończonej liczbie kroków?

Zabawę tę przedstawić można w postaci drzewa o ponumerowanych wierzchołkach. Początkową zawartość pudełka reprezentują wierzchołki wychodzące bezpośrednio z korzenia drzewa. Zastępowanie jakiejś kuli (liścia drzewa) zbiorem innych polega na dołączeniu, w miejsce usuwanego liścia, całego zbioru nowych liści, reprezentujących kule, zastępujące usuwaną kulę. Drzewo „rośnie w górę” w miarę jak zastępujemy usuwane kule nowymi. Zauważmy, że na każdej gałęzi drzewa występują kule o coraz mniejszych numerach. Ponadto, każdy wierzchołek drzewa ma tylko skończenie wielu bezpośrednich potomków. Gdyby drzewo miało nieskończoną liczbę wierzchołków, to (na mocy *lematu Königa*) musiałoby mieć gałąź nieskończoną. To jednak jest niemożliwe, ze względu na wspomniany już fakt, że numery na każdej gałęzi maleją, w miarę oddalania się od korzenia drzewa. Tak więc, zabawa w opróżnianie pudełka musi zakończyć się w skończonej liczbie kroków.

Jedna z prac Heraklesa polegała na uśmierceniu *hydry lernejskiej*, potwora o wielu głowach, przy tym o tyle trudnym do zabicia, że w miejsce odciętej głowy wyrastały natychmiast następne. Jak pamiętamy, Herakles *praktycznie* rozwiązał ten problem, znany był zresztą z wielu *praktycznych* rozwiązań trudnych problemów. Z matematycznego punktu widzenia hydra jest *drzewem*: *korzeniem* tego drzewa jest jej kadłubek, *liśćmi* poszczególne głowy, pozostałe *wierzchołki* drzewa odpowiadają segmentom szyi, (które same mogą stać się głowami, po odcięciu innych głów). Zabicie hydry polega na takim jej okaleczeniu, iż pozostaje z niej jedynie tułów-kadłubek (korzeń drzewa). Odcinamy głowy hydry (czyli liście drzewa) w pojedynczych krokach (cięciach mieczem). Odcięcie głowy w n-tym kroku pociąga za sobą następujące konsekwencje:

1. Znika krawędź drzewa prowadząca do tej głowy, pozostawiając zatem wierzchołek, który nazwiemy, powiedzmy, *krwawiącym kikutem*.

2. W wierzchołku będącym bezpośrednim poprzednikiem krwawiącego kikuta wyrasta hydrze dodatkowo n kopii tej części hydry, która po odcięciu głowy znajduje się powyżej węzła poprzedzającego krwawiący kikut.

3. Jeśli krwawiącym kikutem właśnie odciętej głowy jest kadłub hydry, to żadna nowa głowa nie wyrasta.

Proponujemy wykonać rysunek średnio skomplikowanej hydry i przekonać się, jak wygląda jej utarczka z Heraklesem. Poczytać o tej konstrukcji można np. w Murawski 2000.

Zdawać by się mogło, że uśmiercenie hydry robi się coraz trudniejszym zadaniem, w miarę stopniowego ucinania jej głów (wszak z każdym cięciem odrasta nie jedna głowa, ale wiele kopii całego fragmentu hydry, a liczba dodawanych kopii rośnie wraz z liczbą kolejnych cięć). Mamy jednak złe wiadomości dla hydry, a dobre dla Heraklesa. Otóż *niezależnie* od tego, jaką przyjmie on strategię (czyli niezależnie od tego, które kolejne głowy hydry będzie odcinał), to po *skończonej* liczbie cięć z biednej hydry zostanie jedynie bezgłowy kadłubek, czyli zostanie ona uśmiercona. Ciekawym problemem jest udowodnienie tego faktu. Nie jest to przy tym problem banalny: okazuje się, że twierdzenie gwarantujące zwycięstwo Heraklesa jest *prawdziwe* w standardowej dziedzinie liczb naturalnych, lecz *nie jest dowodliwe* w arytmetyce. Jego dowód wykorzystuje środki *infinitarne*, niedostępne w zwykłej arytmetyce, a dostępne w teorii mnogości.

4.5 Dygresja: drzewo Calkina-Wilfa

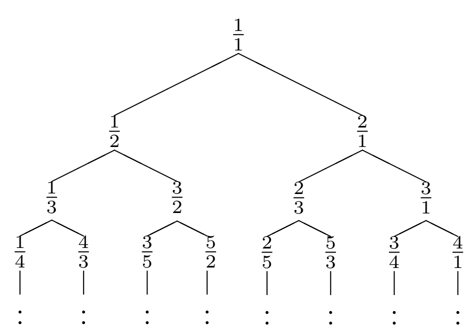
Na jakie sposoby umysł może *wyobrażać sobie* liczby wymierne? Jedna z możliwości to ta, którą słuchacze poznali w szkole: liczbom wymiernym przyporządkowuje się punkty na osi liczbowej. Zbiór tych punktów jest gęsty w porządku osi liczbowej i jest przeliczalny (jest ich *tyle samo*, co liczb naturalnych). Z liczbami wymiernymi skojarzyć można też wszystkie proste przechodzące przez początek układu współrzędnych na płaszczyźnie oraz przez punkty kratowe (czyli punkty o współrzędnych całkowitych na płaszczyźnie), co opisaliśmy nieco dokładniej w pliku zawierającym szczegółowy plan niniejszych wykładów. Istnieje jeszcze wiele innych *reprezentacji* tego zbioru. Podamy teraz jedną z nich, odwołującą się do częściowego porządku innego od zwykłego porządku liczb wymiernych.

Zbudujemy następujące drzewo ułamków:

1. Korzeniem drzewa jest ułamek $\frac{1}{1}$.
2. Każdy wierzchołek drzewa ma dwóch bezpośrednich potomków.
3. Jeśli $\frac{a}{b}$ jest wierzchołkiem w drzewie, to jego bezpośrednimi potomkami są wierzchołki: $\frac{a}{a+b}$ (lewy) oraz $\frac{a+b}{b}$ (prawy).

To drzewo nazywamy drzewem *Calkina-Wilfa*. Można udowodnić, że każda dodatnia liczba wymierna wystąpi w tym drzewie dokładnie raz, przy tym zapisana w postaci nieskracalnego ułamka.

Początkowy fragment tego drzewa wygląda następująco:



Wszystkie wierzchołki drzewa wylicza kolejno funkcja:

1. $q(1) = 1$
2. $q(n+1) = \frac{1}{\lfloor q(n) \rfloor - (q(n) - \lfloor q(n) \rfloor) + 1}$ dla $n \geqslant 1$, gdzie $\lfloor x \rfloor$ jest *funkcją podłogi* (dla dowolnej x jej wartość to największa liczba naturalna $\leqslant x$).

Calkin i Wilf pokazali (Calkin, Wilf 2000), że każda dodatnia liczba wymierna jest postaci $\frac{b(n)}{b(n+1)}$ ($n \geqslant 0$), gdzie:

1. $b(0) = b(1) = 1$
2. $b(2n+1) = b(n)$
3. $b(2n+2) = b(n) + b(n+1)$.

Tak więc, drzewo Calkina-Wilfa podaje inną jeszcze reprezentację zbioru $\mathbb{Q}$ wszystkich liczb wymiernych. W jednym z dodatków w drugiej części wykładów opowiemy o drzewie Sterna-Brocota, podobnym do drzewa Calkina-Wilfa.

5 Porządki ciągłe

Niech $(X, \leqslant)$ będzie zbiorem liniowo uporządkowanym oraz, jak zwykle, niech $\prec$ będzie ostrym porządkiem wyznaczonym przez $\preceq$ (czyli $x \prec y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \preceq y$ oraz $x \neq y$). Mówimy, że porządek $\leqslant$ jest *ciągły*, gdy:

1. porządek $\preceq$ jest gęsty w X oraz
2. każdy niepusty zbiór $A \subseteq X$ ograniczony z góry ma kres górny w zbiorze X, a każdy niepusty zbiór $B \subseteq X$ ograniczony z dołu ma kres dolny w zbiorze X.

PRZYKŁADY.

1. Porządek $\leqslant$ w zbiorze $\mathbb{R}$ jest ciągły.
2. Porządek $\leqslant$ w zbiorze $\mathbb{Q}$ nie jest ciągły. Jest to porządek gęsty, ale np. następujący zbiór liczb wymiernych nie ma kresu górnego, choć jest ograniczony z góry:
$$\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}.$$
3. Porządek $\leqslant$ w zbiorze $\mathbb{Z}$ nie jest ciągły, ponieważ nie jest gęsty.

Zauważmy, że w definicji porządku ciągłego wystarczy założyć jedynie, że każdy niepusty podzbiór ograniczony z góry miał kres górny (albo: by każdy niepusty podzbiór ograniczony z dołu miał kres dolny), zachodzi bowiem następujące twierdzenie:
TWIERDZENIE. Jeśli relacja $\leqslant$ liniowo porządkuje zbiór X, to następujące warunki są równoważne:

1. Dla każdego niepustego ograniczonego z góry podzbioru zbioru X istniej w zbiorze X kres górny.

2. Dla każdego niepustego ograniczonego z dołu podzbioru zbioru X istniej w zbiorze X kres dolny.

DOWÓD. Trzeba pokazać, że z pierwszego warunku wynika drugi, a także, że z drugiego warunku wynika pierwszy. Udowodnimy, że zachodzi to pierwsze wynikanie, pozostawiając słuchaczom przyjemność zmierzenia się z dowodem drugiego.

1. Załóżmy, że zachodzi warunek 1). Niech A będzie niepustym ograniczonym z dołu podzbiorem zbioru X.

2. Niech B będzie zbiorem wszystkich ograniczeń dolnych zbioru A:

$$B = \{y \in X : y \leqslant x \text{ dla wszystkich } x \in A\}.$$

3. Na mocy założenia mamy $B \neq \emptyset$.

4. Zbiór B jest ograniczony z góry (każdy element zbioru A jest bowiem ograniczeniem górnym zbioru B).

5. Z przyjętego założenia, B ma zatem kres górny. Niech $b = \sup B$.

6. Pokażemy teraz, że b jest kresem dolnym zbioru A.

7. Jeśli $x \in A$, to x jest ograniczeniem górnym zbioru B. W konsekwencji, skoro b jest *najmniejszym* ograniczeniem górnym zbioru B, to $b \leqslant x$.

8. Ponieważ element x został wybrany całkiem dowolnie z A, więc b jest ograniczeniem dolnym zbioru A.

9. Niech c będzie dowolnym ograniczeniem dolnym zbioru A. Naszym celem jest pokazanie, że $c \leqslant b$.

10. Przypuśćmy, dla dowodu nie wprost, że $b < c$.

11. Wtedy $c \notin B$, a zatem istnieje $x \in A$ taki, że $x < c$. To jednak oznacza, że c nie jest ograniczeniem dolnym zbioru A.

12. Przypuszczenie, że $b < c$ doprowadziło do sprzeczności, a więc musimy je odrzucić.

13. Ostatecznie, $c \leqslant b$, czyli b jest kresem dolnym zbioru A.

6 Dobre porządki

Mówimy, że porządek liniowy $\preceq$ w zbiorze X jest *dobry*, jeśli w każdym niepustym zbiorze $A \subseteq X$ istnieje element najmniejszy względem tego porządku. Jeśli $\preceq$ jest dobrym porządkiem w zbiorze X, to mówimy, że układ $(X, \preceq)$ jest zbiorem *dobrze uporządkowanym*.
PRZYKŁADY.

1. Porządek $\leqslant$ w zbiorze $\mathbb{N}$ jest dobrym porządkiem. W każdym niepustym zbiorze liczb naturalnych istnieje liczba najmniejsza.

2. Relacja należenia $\in$ jest dobrym porządkiem w dowolnej rodzinie zbiorów $\mathcal{A}$. Własność ta wynika z aksjomatów teorii mnogości. Wykluczają one mianowicie możliwość, aby istniał ciąg zbiorów $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_+}$ taki, że: $x_{i+1} \in x_i$ dla wszystkich $i \in \mathbb{N}_+$. Tak więc, każdy zbiór jest „ufundowany".

3. Porządek $\leqslant$ w zbiorze $\mathbb{Z}$ nie jest dobrym porządkiem, gdyż np. zbiór
$$\{n \in \mathbb{Z} : z \leqslant 0\}$$
nie ma elementu najmniejszego.

Nazwa *dobry porządek* nie ma charakteru ocennego, stosujemy ją na mocy Tradycji. Należy jednak podkreślić, że dobre porządki są niezwykle ważne, jeśli chodzi o możliwości definiowania wielu pojęć matematycznych oraz przeprowadzanie dowodów (w szczególności, dowodów indukcyjnych).

W pewnym sensie, dobry porządek jest przeciwieństwem porządku gęstego. Jak pamiętamy, w porządku gęstym żaden element nie ma bezpośredniego następnika. Zachodzi natomiast następujące twierdzenie:
TWIERDZENIE. Jeśli zbiór X jest dobrze uporządkowany przez relację $\preceq$, to dla każdego elementu (z wyjątkiem elementu największego) istnieje dokładnie jeden bezpośredni następnik (w sensie tego porządku).
DOWÓD. Jeśli $\leqslant$ jest porządkiem częściowym, to bezpośrednimi następnikami elementu $x \in X$ są dokładnie elementy minimalne zbioru $A_x = \{y \in X : x \prec y\}$, o

ile $A_x \neq \emptyset$ oraz w A_x istnieją elementy minimalne. Jeśli teraz porządek $\preceq$ jest liniowy, to (ponieważ wszystkie elementy zbioru A_x są porównywalne) dla x istnieje co najwyżej jeden bezpośredni następnik i jest nim najmniejszy element zbioru A_x, o ile taki element w A_x istnieje. Wreszcie, jeśli porządek $\preceq$ jest dobry, to dla istnienia elementu najmniejszego w zbiorze A_x wystarcza, aby $A_x \neq \emptyset$, a to ma miejsce dla dowolnego elementu oprócz elementu największego w zbiorze X (o ile taki największy element istnieje).

DODATKI

Dalsza część tekstu tego wykładu zawiera kilka dodatków, przeznaczonych dla słuchaczy zainteresowanych poszerzeniem swoich wiadomości na temat struktur porządkowych.

7 Dodatek: Lemat Kuratowskiego-Zorna

Sformułujemy bardzo ważne twierdzenie, które jest wykorzystywane w wielu rozważaniach matematycznych.
LEMAT KURATOWSKIEGO-ZORNA. *Jeśli w niepustym zbiorze częściowo uporządkowanym każdy łańcuch ma ograniczenie górne, to w zbiorze tym istnieje co najmniej jeden element maksymalny*.

Nie podamy dowodu tego twierdzenia, gdyż wymaga to skorzystania z dość zaawansowanych środków teorii mnogości. Zainteresowani słuchacze zechcą sięgnąć np. do pracy Guzicki, Zakrzewski 2005.
PRZYKŁADY.

1. Niektóre twierdzenia równoważne Lematowi Kuratowskiego-Zorna:

   (a) *Aksjomat wyboru*. Aksjomat ten głosi, że dla każdej rodziny niepustych, parami rozłącznych zbiorów istnieje zbiór, który tworzymy, wybierając dokładnie jeden element z każdego zbioru rozważanej rodziny. Podkreślić należy, że aksjomat ten nie precyzuje, *w jaki sposób* dokonujemy tych wyborów, a więc ma on charakter niekonstruktywny.

   (b) *Twierdzenie o możliwości dobrego uporządkowania każdego zbioru*. Udowodnione przez Ernsta Zermela twierdzenie głosi, że dla każdego zbioru można znaleźć relację, która dobrze porządkuje ten zbiór.

   (c) *Zasada maksymalności Hausdorffa*. Każdy liniowo uporządkowany podzbiór zbioru częściowo uporządkowanego jest zawarty w maksymalnym zbiorze liniowo uporządkowanym.

   (d) *Lemat Tukeya*. Dowolna niepusta rodzina zbiorów charakteru skończonego posiada element maksymalny. Przez rodzinę *charakteru skończonego* rozumie się każdą rodzinę zbiorów $\mathcal{A}$ taką, że:

      i. dla dowolnego $A \in \mathcal{A}$, jeśli $B \subseteq A$, to $B \in \mathcal{A}$,

      ii. jeśli dowolny skończony podzbiór zbioru A należy do $\mathcal{A}$, to $A \in \mathcal{A}$.

(e) *Zasada antyłańcucha*. W każdym zbiorze częściowo uporządkowanym istnieje antyłańcuch maksymalny.

2. Niektóre zastosowania Lematu Kuratowskiego-Zorna:

   (a) *Istnienie bazy w przestrzeni wektorowej*. W każdej przestrzeni wektorowej istnieje co najmniej jedna baza (czyli maksymalny układ wzajem niezależnych wektorów, których kombinacjami liniowymi są wszystkie wektory rozważanej przestrzeni).

   (b) *Twierdzenie o pełności dla logiki pierwszego rzędu*. Tezy logiki pierwszego rzędu pokrywają się z tautologiami tej logiki.

   (c) *Lemat Lindenbauma*. Każdy niesprzeczny zbiór formuł języka logiki pierwszego rzędu jest zawarty w pewnym niesprzecznym i zupełnym zbiorze formuł.

8 Dodatek: informacja o liczbach porządkowych i kardynalnych

Nie ma możliwości (a może nie ma też potrzeby), aby w tym usługowym wykładzie przedstawiać bardziej zaawansowane konstrukcje teorii mnogości. Zainteresowani słuchacze z pewnością potrafią trafić do nich samodzielnie, bo przecież nikt ani nic nie może powstrzymać młodego dociekliwego umysłu przed zaspokajaniem swojej ciekawości poznawczej.

W tym dodatku zamieszczamy jedynie kilka informacji dotyczących typów porządkowych zbiorów nieskończonych oraz kwestii ustalania liczebności zbiorów nieskończonych.

8.1 Konstrukcja von Neumanna

Dla dowolnego zbioru X, niech $X^* = X \cup \{X\}$. Iteracje operacji * określamy indukcyjnie:

1. $X^0 = X$
2. $X^1 = X^*$
3. $X^{n+1} = (X^n)^*$.

Iterujmy operację *, wychodząc od zbioru pustego $\emptyset$:

1. $(\emptyset)^* = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$,

2. $((\emptyset)^*)^* = (\{\emptyset\})^* = \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$,

3. $(((\emptyset)^*)^*)^* = (\{\emptyset, \{\emptyset\}\})^* = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \cup \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$,

4. $\ldots$

Każdy element tego ciągu jest zbiorem, którego elementami są wszystkie poprzednie wyrazy tego ciągu. Wprowadźmy *oznaczenia*:

- $0 = \emptyset$,
- $1 = 0^* = (\emptyset)^*$,
- $2 = 1^* = ((\emptyset)^*)^*$,
- $3 = 2^* = (((\emptyset)^*)^*)^*$,
- $\ldots$

Wtedy: $0 = \emptyset$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$, $3 = \{0, 1, 2\}$, $\ldots$

Otrzymujemy rodzinę zbiorów $\omega = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, które możemy identyfikować z *liczbami naturalnymi*. Nadto, rodzina ta jest *dobrze uporządkowana* przez relację $\in$. Tak więc, zbiór uporządkowany $(\omega, \in)$ jest izomorficzny ze zbiorem uporządkowanym $(\mathbb{N}, <)$, który słuchacze znają (?) ze szkoły.

Zbiór A nazywamy *liczbą porządkową w sensie von Neumanna*, gdy:

- Każdy element zbioru A jest zbiorem.
- Jeśli $X \in A$, to $X \subseteq A$.
- Jeśli $X, Y \in A$, to: $X = Y$ lub $X \in Y$ lub $Y \in X$.
- Jeśli $B \neq \emptyset$ i $B \subseteq A$, to istnieje $X \in B$ taki, że $X \cap B = \emptyset$.

Liczbami porządkowymi w sensie von Neumanna są, m.in: wszystkie elementy zbioru ω, sam zbiór ω, zbiór $\omega^* = \omega \cup \{\omega\}$, itd.

Skończone (w sensie von Neumanna) liczby porządkowe to elementy zbioru ω. Pozostałe liczby porządkowe von Neumanna są *nieskończone*.

Konstrukcja von Neumanna pokazuje, jak całość uniwersum matematycznego zbudować ze zbioru pustego. Oczywiście stwierdzenie to jest grubym uproszczeniem, bo nic nie mówimy o wykorzystywanych przy tym środkach teorii mnogości.

8.2 Definicja Tarskiego zbiorów nieskończonych

Zbiór jest *skończony* (w sensie Tarskiego), gdy każdy $\subseteq$-łańcuch w rodzinie jego podzbiorów jest domknięty na kres górny. W przeciwnym przypadku jest *nieskończony*.

Proszę zauważyć, że np. ciąg zbiorów:

$$\{\{k\ :\ k \leqslant n\}\ :\ n \geqslant 0\}$$

nie jest domknięty na kres górny; kresem górnym (względem porządku $\subseteq$) tego ciągu jest jego teoriomnogościowa suma, a nie jest ona jednym z elementów tego ciągu.

Pojęcia użyte w definicji Tarskiego są już znane słuchaczom, ale przypomnijmy je w tym miejscu:

1. Rodzina $\mathbf{X}$ jest $\subseteq$-*łańcuchem*, gdy dla dowolnych $X, Y \in \mathbf{X}$ zachodzi: albo $X \subseteq Y$ albo $Y \subseteq X$.

2. *Kresem górnym* rodziny zbiorów $\mathbf{X}$ (ze względu na inkluzję $\subseteq$) jest suma $\bigcup \mathbf{X}$.

3. Rodzina zbiorów $\mathbf{X}$ jest *domknięta ze względu na kres górny*, gdy suma $\bigcup \mathbf{X}$ jest elementem rodziny $\mathbf{X}$.

Definicja Tarskiego jest ładna m.in. dlatego, że charakteryzuje pojęcie nieskończoności w terminach porządku. Nie chcemy przez to powiedzieć, że definicja Dedekinda, którą słuchacze już znają jest brzydka. Krótko mówiąc, też jest ładna.

8.3 Liczby porządkowe i kardynalne

Przypominamy, że na wykładzie trzecim podaliśmy następujące definicje:

1. Dwa zbiory nazywamy *równolicznymi*, jeśli istnieje bijekcja jednego z nich na drugi.

2. Zbiór jest *nieskończony* (w sensie Dedekinda), jeśli jest równoliczny z jakimś swoim podzbiorem właściwym.

3. Zbiór jest *przeliczalny*, jeśli jest równoliczny ze zbiorem $\mathbb{N}$ wszystkich liczb naturalnych.

4. Zbiór jest *nieprzeliczalny*, jeśli jest nieskończony, ale nie jest przeliczalny.

Dociekliwi słuchacze poczuli być może pewne napięcie intelektualne, dowiadując się na wykładzie trzecim, iż nie wszystkie zbiory nieskończone są równoliczne. Dla tych niespokojnych, żądnych wiedzy umysłów podamy teraz kilka pojęć i faktów, które – być może – skłonią je do dalszych samodzielnych poszukiwań.

Będziemy stosować *oznaczenia*:

1. Jeśli zbiory X i Y są równoliczne (czyli gdy istnieje bijekcja z X na Y), to piszemy: $|X| = |Y|$.

2. Jeśli istnieje iniekcja z X w Y, to piszemy $|X| \leqslant |Y|$.

3. Jeśli $|X| \leqslant |Y|$ oraz nie zachodzi $|X| = |Y|$, to piszemy $|X| < |Y|$.

Mówimy, że:

1. zbiory X i Y są *tej samej mocy*, gdy są równoliczne, czyli gdy $|X| = |Y|$.

2. zbiór X jest *mocy niewiększej niż* zbiór Y, gdy $|X| \leqslant |Y|$.

3. zbiór X jest *mocy mniejszej niż* zbiór Y, gdy $|X| < |Y|$.

UWAGA. To tylko *sposób mówienia*. Nie zdefiniowaliśmy jeszcze, czym są *moce* zbiorów.

TWIERDZENIE CANTORA-BERNSTEINA-SCHRÖDERA. *Jeśli A jest równoliczny z podzbiorem zbioru B oraz B jest równoliczny z podzbiorem zbioru A, to A i B są równoliczne*.

Waga tego twierdzenia polega na tym, że pozwala ono na wykazanie, że skala mocy zbiorów nie zawiera elementów nieporównywalnych.

Jeśli $|A| = |\mathbb{N}|$, to mówimy, że A jest *przeliczalny* i piszemy $|A| = \aleph_0$.

Jeśli $|A| = |\mathbb{R}|$, to mówimy, że A *jest mocy kontinuum* i piszemy $|A| = \mathfrak{c}$.

Istnieją też zbiory nieprzeliczalne, które nie są mocy kontinuum: np. zbiór $\wp(\mathbb{R})$. Ten zbiór ma tyle samo elementów, ile jest funkcji z $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}$.

Mówimy, że zbiór X jest:

1. *przechodni*, gdy każdy element X jest podzbiorem X;

2. *liczbą porządkową*, gdy X jest zbiorem przechodnim i dla wszystkich różnych elementów $Y, Z \in X$ zachodzi alternatywa: $Y \in Z$ lub $Z \in Y$;

3. *liczbą kardynalną*, gdy jest liczbą porządkową i $|Y| < |X|$ dla wszystkich $Y \in X$.

Liczby porządkowe oznaczamy tu literami α, β, γ, itd. Dla dowolnych liczb porządkowych definiujemy: $\alpha \prec \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \in \beta$. Niech $\alpha \preceq \beta$ oznacza, że $\alpha \prec \beta$ lub $\alpha = \beta$. Wtedy:

1. Dla każdej liczby porządkowej α, relacja $\preceq$ dobrze porządkuje α.
2. Jeśli α jest liczbą porządkową, to $\alpha \cup \{\alpha\}$ jest liczbą porządkową.
3. Jeśli A jest zbiorem liczb porządkowych, to $\bigcup A$ jest liczbą porządkową.
4. Nie istnieje *zbiór wszystkich* liczb porządkowych.

Mówimy, że liczba porządkowa α jest:

1. *liczbą następnikową*, gdy $\alpha = \emptyset$ lub $\alpha = \beta \cup \{\beta\}$ dla pewnej liczby porządkowej β;
2. *liczbą graniczną*, gdy α nie jest liczbą następnikową.

Zdefiniowana wyżej liczba porządkowa ω jest liczbą graniczną, a każdy jej element jest liczbą następnikową.

Słuchacze zechcą zastanowić się, jakie zbiory otrzymamy, gdy będziemy iterować zdefiniowaną uprzednio operację $*$ oraz operację sumowania (teoriomnogościowego) otrzymanych liczb porządkowych.

Na liczbach porządkowych i kardynalnych można określić operacje: dodawania, mnożenia, potęgowania. W przypadku skończonych liczb porządkowych pokrywają się one, odpowiednio, ze znanymi ze szkoły operacjami na liczbach naturalnych. W przypadku nieskończonych liczb porządkowych i kardynalnych ich własności są oczywiście inne.

Słuchacze domyślają się już zapewne, że – dysponując pojęciem liczby kardynalnej – możemy zmierzyć się z problemem *zdefiniowania*, czym są *moce* (liczby elementów) dowolnych zbiorów. Precyzyjna definicja tego pojęcia wymaga jednak kilku dalszych konstrukcji, wykraczających poza ramy tego wykładu. Prowadzący wykład chętnie udzieli ewentualnie zainteresowanym słuchaczom wskazówek, gdzie można o tym przeczytać.

9 Dodatek: Hotel Hilberta

Wyobrażamy sobie hotel, który ma nieskończoną liczbę pokoi, powiedzmy, ponumerowanych kolejnymi dodatnimi liczbami całkowitymi. Wszystkie pokoje w hotelu są zajęte – w każdym mieszka jeden gość. Rozważymy teraz kilka przypadków, w których chytry właściciel hotelu będzie chciał zakwaterować pewną liczbę nowych gości, jednak bez pozbywania się kogokolwiek już mieszkającego w hotelu:

1. Jeden dodatkowy gość.
2. Milion dodatkowych gości.
3. Nieskończenie wielu dodatkowych gości.
4. Kilka nieskończonych grup dodatkowych gości.
5. Nieskończenie wiele nieskończonych grup dodatkowych gości.
6. Tylu nowych gości, ile jest wszystkich liczb rzeczywistych.

W których z tych przypadków właściciel hotelu może umieścić w nim podaną liczbę nowych gości bez pozbywania się gości już zamieszkujących hotel?

Rozważymy po kolei podane przypadki.

9.1 Jeden dodatkowy gość

Czy można umieścić dodatkowego gościa w naszym hotelu, bez usuwania zeń kogokolwiek? To nietrudne – wystarczy tylko zwolnić którykolwiek z pokoi: pierwszy, dziesiąty, setny. Wtedy jednak trzeba przenieść dotychczasowego jego lokatora do innego pokoju, a lokatora z tamtego innego pokoju przenieść do jeszcze innego pokoju, itd. Istotnie, bez przemieszczenia *nieskończonej* liczby starych lokatorów do innych pokoi zakwaterowanie nowego lokatora jest niemożliwe. Powiedzmy zatem, że opróżniamy pokój pierwszy. Gość z pokoju o numerze 1 przenosi się do pokoju o numerze 2, ten z pokoju o numerze 2 do pokoju o numerze 3, itd. Ogólnie, gość z pokoju o numerze n przenosi się do pokoju o numerze $n + 1$ i w ten sposób pokój o numerze 1 może przyjąć nowego lokatora. Operację tę opisuje zatem funkcja $f(n) = n + 1$.

9.2 Milion dodatkowych gości

Jeśli rozwiązałaś poprzednią zagadkę, to również obecny problem staje się łatwy. Jeśli na przyjęcie czeka milion nowych gości, to wystarczy przenieść każdego ze starych gości do pokoju o numerze o milion większym od numeru ich dotychczasowego pokoju i w ten sposób otrzymujemy milion pustych pokoi, do których wprowadza się milion nowych gości. Operację tę opisuje zatem funkcja $f(n) = n + 1000000$.

9.3 Nieskończenie wielu dodatkowych gości

Sława naszego hotelu rośnie, tłoczą się coraz to nowi goście. Wreszcie pewnego dnia przed hotelem (w którym, przypominamy, wszystkie pokoje są zajęte, a wszystkich pokoi jest nieskończenie wiele) staje nieskończona kolejka nowych gości. Damysobie z łatwością radę także z tym przypadkiem. Wystarczy bowiem przenieść lokatora z pokoju o numerze n do pokoju o numerze $2n$: wtedy zajęte są wszystkie pokoje o numerach parzystych, a wszystkie pokoje o numerach nieparzystych stają się wolne i można w nich zakwaterować wszystkich gości z nowej nieskończonej ich grupy. Operację tę opisuje zatem funkcja $f(n) = 2n$.

9.4 Kilka nieskończonych grup dodatkowych gości

Nie będzie też wielkiego kłopotu, jeśli takich nieskończonych grup gości przyjdzie kilka, kilkadziesiąt, milion, itd. Powiedzmy, że przyszło n nieskończonych grupy gości. Najpierw należy ich jakoś ustawić w *jeden* nieskończony ciąg. Można to zrobić na wiele sposobów. Przypuśćmy bowiem, że goście g_i^j są ponumerowani wedle grup (indeks dolny; zakładamy, że $1 \leqslant i \leqslant n$) oraz wedle kolejności w grupie (indeks górny). Można ustawić ich wszystkich w jeden ciąg wykorzystując następujący porządek: $g_{i_1}^{j_1} \prec g_{i_2}^{j_2}$ wtedy i tylko wtedy, gdy albo $i_1 < i_2$, albo $i_1 = i_2$ oraz $j_1 < j_2$. Oznacza to, że:

1. Pierwszych n gości to: $g_1^1, g_2^1, g_3^1, \ldots, g_n^1$
2. Kolejnych n gości to: $g_1^2, g_2^2, g_3^2, \ldots, g_n^2$
3. Kolejnych n gości to: $g_1^3, g_2^3, g_3^3, \ldots, g_n^3$
4. itd.

Gdy już nowi goście zostaną ustawieni w jeden ciąg nieskończony, wystarczy zastosować znane już rozwiązanie, czyli przenieść każdego starego gościa z pokoju o numerze n do pokoju o numerze $2n$. Zwalniają się wszystkie pokoje o numerach nieparzystych i możemy w nich zakwaterować wszystkich nowych gości.

9.5 Nieskończenie wiele nieskończonych grup dodatkowych gości

Teraz przed naszym hotelem zrobił się prawdziwy tłok: noclegu szuka w nim nieskończona liczba nieskończonych grup gości. Czy uda się ich wszystkich pomieścić, nie usuwając starych gości? Ułatwieniem w rozwiązaniu tej zagadki może być jakaś zgrabna graficzna reprezentacja tej sytuacji. Powiedzmy, że nasze nieskończone grupy gości tworzą nieskończoną listę, na której każdy gość g_i^j występuje oznakowany dwoma indeksami: dolnym (wskazującym numer grupy) oraz górnym (wskazującym jego miejsce w grupie). Początek tej listy wygląda zatem tak:

1. $g_1^1, g_1^2, g_1^3, \ldots$
2. $g_2^1, g_2^2, g_2^3, \ldots$
3. $g_3^1, g_3^2, g_3^3, \ldots$
4. itd.

Nasze zadanie zostanie rozwiązane, jeśli uda nam się ustawić wszystkich gości w *jeden* ciąg nieskończony – wtedy bowiem możemy skorzystać z rozwiązań podanych uprzednio.

Lista powyższa jest więc nieskończona w obu kierunkach: w prawo oraz w dół. Wystarczy teraz zauważyć, że *punkty kratowe* każdej ćwiartki płaszczyzny też tworzą takie listy, przy odpowiednim skierowaniu: porządku grup oraz kolejności gości w każdej grupie. Z przyzwyczajenia, rozważmy pierwszą ćwiartkę płaszczyzny. Wtedy:

1. indeks dolny niech odpowiada rzędnej y punktu kratowego (x, y)
2. indeks górny niech odpowiada odciętej x punktu kratowego (x, y).

Zadanie sprowadza się teraz do znalezienia bijekcji między zbiorem wszystkich par dodatnich liczb całkowitych a zbiorem wszystkich dodatnich liczb całkowitych. Intuicja podpowiada ci, że z pewnością można „przejść" przez wszystkie punkty kratowe ćwiartki płaszczyzny – być może nawet masz już gotowy nieformalny przepis, jak to zrobić. A może masz już pomysł, jak precyzyjnie zdefiniować taką bijekcję? Jeśli nie, to zajrzyj do wykładu trzeciego, w którym omawialiśmy *funkcję pary Cantora* – to właśnie przykład szukanej bijekcji. A zatem również w tym przypadku nasz hotel pomieści wszystkich nowych gości, nie tracąc starych.

9.6 Tylu nowych gości, ile jest wszystkich liczb rzeczywistych

Czyżby ten hotel mógł pomieścić dowolną liczbę dodatkowych gości? Sytuacja staje się poważna, nie tylko z powodu zainteresowania urzędu podatkowego dochodami właściciela hotelu. Nasz hotel – w literaturze nazywany często *Hotelem Hilberta* – zdaje się być kandydatem na monopolistę na rynku hotelowym. Czyżby mógł pomieścić całkiem dowolny zbiór gości? W matematycznej stylizacji pytamy zatem: czy wszystkie zbiory nieskończone są równoliczne?

W szkole mówiono ci o zbiorach, podając jakieś w miarę proste przykłady zbiorów. Zaczynano zapewne od zbiorów jabłuszek, orzeszków, zajączków, itp. To były przykłady zbiorów *skończonych*. Potem mówiono też o zbiorach liczb – zbiorze wszystkich liczb naturalnych, całkowitych, wymiernych, rzeczywistych. Te cztery zbiory są, jak wiesz, nieskończone. Powiedziano także, że dla dowolnego zbioru można utworzyć zbiór wszystkich jego podzbiorów. Poznałaś prosty fakt, że skończony zbiór złożony z n elementów ma 2^n podzbiorów. Ponieważ szkoła milczy na temat ogólnej definicji czym jest *moc* (liczba elementów) zbioru, więc – o ile byłaś dociekliwa – stanęłaś przed zagadką: ile elementów ma zbiór wszystkich podzbiorów zbioru nieskończonego, np. zbioru wszystkich liczb naturalnych? Czy da się o tym coś rozsądnego powiedzieć, *bez* podawania definicji mocy zbioru, a więc odwołując się jedynie do pojęcia równoliczności zbiorów?

Z dotąd rozważonych przypadków wiesz, że zarówno zbiór wszystkich liczb całkowitych, jak i zbiór wszystkich liczb wymiernych zmieszczą się w Hotelu Hilberta. Liczby całkowite definiujemy bowiem jako klasy pewnej relacji równoważności (związanej z dodawaniem liczb naturalnych) określonej na zbiorze par liczb naturalnych, a liczby wymierne jako klasy innej relacji równoważności (związanej z mnożeniem liczb naturalnych) określonej na zbiorze par liczb całkowitych. A jak to będzie ze zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych? Szkoła ma kilka możliwości, jeśli chodzi o podanie definicji liczb rzeczywistych. Którąkolwiek wybierze, to i tak dorosły obywatel zapamięta przede wszystkim, że liczby rzeczywiste reprezentować można jako nieskończone ułamki dziesiętne. Będzie też oczywiście pamiętał o sławnej *osi liczbowej* i bezrefleksyjnie utożsamiał liczby rzeczywiste (twory arytmetyczne) z punktami na tej osi (tworami geometrycznymi).

Może jednak liczby rzeczywiste zmieszczą się w Hotelu Hilberta? Skoro każda reprezentowana jest przez nieskończony ułamek dziesiętny, to można rozumować tak:

1. ***Przypuśćmy***, że ustawimy wszystkie liczby rzeczywiste w jeden ciąg nieskończony (czyli wyczerpiemy ich ogół numerując je liczbami naturalnymi).

2. Każdej liczbie rzeczywistej odpowiada ciąg nieskończony – jej nieskończone rozwinięcie dziesiętne.

3. W rozwinięciach dziesiętnych używamy jedynie skończonej liczby cyfr.

4. Problem zmieszczenia w Hotelu Hilberta nieskończonego ciągu nieskończonych ciągów już rozwiązaliśmy – można to uczynić.

5. A zatem wszystkie liczby rzeczywiste można umieścić w Hotelu Hilberta.

Jest to ***błędne*** rozumowanie. Błąd pojawia się już w pierwszym kroku – w przypuszczeniu, że wszystkie liczby rzeczywiste można wyczerpująco ponumerować liczbami naturalnymi. Szczegółowy dowód tego faktu można uzyskać wykorzystywaną uprzednio *metodą przekątniową* Cantora, rozważając drzewo, którego gałęzie reprezentują rozwinięcia np. dziesiętne liczb rzeczywistych z przedziału $[0, 1]$, a potem skorzystać z faktu (wykład trzeci), że przedział $[0, 1]$ jest równoliczny z całym zbiorem $\mathbb{R}$.

Widzimy więc, że Hotel Hilberta nie jest nieograniczenie pojemny – istnieją zbiory, które w nim nie zmieszczą się w całości: np. zbiór wszystkich liczb rzeczywistych nie mieści się cały w Hotelu Hilberta. Podobnie można pokazać, że zbiór wszystkich podzbiorów zbioru wszystkich liczb naturalnych nie mieści się cały w Hotelu Hilberta.

Tak więc, nie wszystkie zbiory nieskończone są równoliczne. Oznacza to, że istnieją nieskończoności mniejsze i większe, nieformalnie mówiąc.

10 Dodatek: drzewo Sterna-Brocota

Czy zdarzyło ci się w zamierzchłej niewinnej młodości wykonać „głupie” dodawanie: $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$? Jeśli tak, jeśli zostałaś za to (słusznie!) skarcona, to teraz będziesz miała okazję ujrzeć, że ta „głupia” operacja prowadzi do ciekawych wyników.

Opiszemy mianowicie konstrukcję drzewa *Sterna-Brocota*, podaną niezależnie przez Moritza Sterna (Stern 1858) oraz Achillesa Brocota (Brocot 1861). Będzie ona podobna do rozważanej wyżej konstrukcji drzewa Calkina-Wilfa.

Często podaje się następujący nieformalny opis tworzenia tego drzewa, wykorzystujący dwa elementy pomocnicze o postaci $\frac{0}{1}$ oraz $\frac{1}{0}$:

1. Korzeniem drzewa jest ułamek $\frac{1}{1}$.
2. Każdy wierzchołek drzewa ma dwóch bezpośrednich potomków.
3. Rozpoczynamy od elementów pomocniczych $\frac{0}{1}$ oraz $\frac{1}{0}$, umieszczonych, odpowiednio, z lewej i prawej strony.
4. Korzeń $\frac{1}{1}$ otrzymujemy z elementów pomocniczych, dodając je w sensie operacji $\oplus$: $\frac{1}{1} = \frac{0}{1} \oplus \frac{1}{0} = \frac{0+1}{1+0}$.
5. Podobnie, dla każdego poziomu drzewa zawierającego ułamki $\frac{a}{b}$ oraz $\frac{c}{d}$ włączamy ułamek $\frac{a+c}{b+d}$ do poziomu bezpośrednio niższego, pomiędzy ułamki $\frac{a}{b}$ oraz $\frac{c}{d}$.

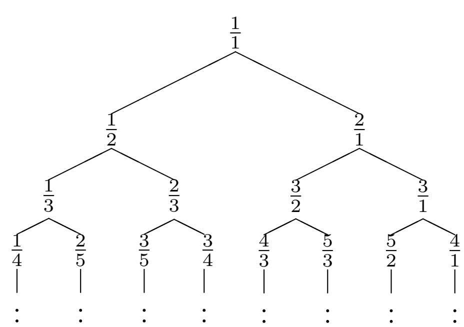
6. W przypadku najbardziej lewych oraz najbardziej prawych wierzchołków drzewa korzystamy z obiektów pomocniczych $\frac{0}{1}$ oraz $\frac{1}{0}$, odpowiednio, wykonując na nich oraz owych najbardziej skrajnych wierzchołkach operację $\oplus$.

Przedstawimy graficznie opisaną wyżej nieformalnie konstrukcję i powiemy parę słów o jej matematycznych własnościach.

W opisany wyżej sposób otrzymujemy następujące ciągi ułamków (z włączeniem elementów pomocniczych na każdym poziomie):

1. $\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{0}$
2. $\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{0}$
3. $\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{1}{0}$
4. itd.

Usuwamy teraz elementy pomocnicze oraz wszystkie wystąpienia każdego ułamka $\frac{a}{b}$ oprócz jego *pierwszego* wystąpienia. W ten sposób otrzymujemy drzewo dwójkowe, którego początkowy fragment wygląda następująco:



To jest właśnie drzewo Sterna-Brocota. Słuchacze zechcą porównać to drzewo z omawianym poprzednio drzewem Calkina-Wilfa. Tutaj również każda dodatnia liczba wymierna występuje dokładnie raz, przy tym w postaci ułamka nieskracalnego.

Powyższa konstrukcja drzewa Sterna-Brocota była opisana nieformalnie. Podamy teraz dwa formalne opisy tego drzewa. Pierwszy wykorzystuje *ułamki łańcuchowe*, a drugi wykorzystuje *macierze* liczbowe. W szkole nie mówi się już o ułamkach łańcuchowych – powszechnie przyjęte zostało przedstawianie liczb wymiernych i rzeczywistych w postaci rozwinięć dziesiętnych. Ułamki łańcuchowe to ładne konstrukcje, ukazują pewne ważne aspekty systemów liczb wymiernych i rzeczywistych. Ich niewielka popularność wiąże się m.in. z tym, że opisy działań arytmetycznych na takich ułamkach są trochę skomplikowane.

Przypomnijmy, na prostym przykładzie, jak wygląda przejście od „zwykłego” ułamka do odpowiadającego mu ułamka łańcuchowego (oraz, oczywiście, przejście odwrotne):

$\frac{153}{53} = 2 + \frac{47}{53} = 2 + \frac{1}{\frac{53}{47}} = 2 + \frac{1}{1+\frac{6}{47}} = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{47}{6}}} =$

$2 + \frac{1}{1+\frac{1}{7+\frac{5}{6}}} = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{7+\frac{1}{\frac{6}{5}}}} = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{7+\frac{1}{1+\frac{1}{5}}}} = [2; 1, 7, 1, 5]$

Każda liczba wymierna może zostać zapisana w postaci skończonego ułamka łańcuchowego. Liczby niewymierne mają nieskończone ułamki łańcuchowe, przy czym pierwiastki kwadratowe mają okresowe ułamki łańcuchowe, np.:

$\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, \ldots]$

$\sqrt{3} = [1; 1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots] = [1; \overline{1, 2}]$

$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = [1; 1, 1, 1, 1, 1, \ldots]$

$$\pi = \cfrac{4}{1 + \cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cfrac{7^2}{2+\ddots}}}}} = \cfrac{4}{1 + \cfrac{1^2}{3+\cfrac{2^2}{5+\cfrac{3^2}{7+\cfrac{4^2}{9+\ddots}}}}} = 3 + \cfrac{1^2}{6 + \cfrac{3^2}{6+\cfrac{5^2}{6+\cfrac{7^2}{6+\ddots}}}}$$

$$e = 2 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{3}{3+\cfrac{4}{4+\cfrac{5}{5+\ddots}}}}$$

Zauważmy, że w powyższych reprezentacjach liczb π oraz e wyraźnie widoczne są pewne *regularności* liczbowe. Słuchacze zechcą skonfrontować tę obserwację z faktem, że w rozwinięciach *dziesiętnych* tych liczb tego typu regularności nie są widoczne.

W ogólności, każda dodatnia liczba wymierna q może zostać przedstawiona jako ułamek łańcuchowy:

$$q = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{\ddots+\frac{1}{a_k}}}}} = [a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k]$$

Ta reprezentacja nie jest jednoznaczna, ponieważ mamy:

$$[a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{k-1}, 1] = [a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{k-1} + 1].$$

Pomijając pewne szczegóły techniczne zauważmy, że jeśli liczba q jest postaci:

$$q = [a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k] = [a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k - 1, 1],$$

to jej bezpośrednimi potomkami w drzewie Sterna-Brocota są:

$$[a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k + 1] \qquad [a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k - 1, 2].$$

Dalej, jeśli $q \neq 1$ jest postaci:

$$q = [a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k],$$

to jej bezpośrednim przodkiem w drzewie Sterna-Brocota jest liczba:

$$[a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k - 1].$$

Jak trafić do wybranego ułamka w drzewie Sterna-Brocota? Zauważmy, że:

1. Do każdego ułamka prowadzi (dokładnie jeden!) ciąg skrętów (od korzenia $\frac{1}{1}$) w lewo L oraz w prawo P. Dla przykładu: $\frac{4}{7}$ to $LPLL$.

2. Przy interpretacji $L = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ oraz $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ każdy ułamek $\frac{a+c}{b+d}$ reprezentowany jest macierzą $\begin{bmatrix} b & d \\ a & c \end{bmatrix}$, a macierz tę otrzymujemy mnożąc macierze reprezentujące drogę od korzenia drzewa do ułamka $\frac{a+c}{b+d}$.

   Np.: $LPPL = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \mapsto \frac{5}{7}$.

Przypominamy, że mnożenie macierzy określone jest wzorem:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

W tej macierzowej interpretacji jasna staje się rola elementów pomocniczych, które wykorzystywaliśmy w nieformalnym opisie drzewa Sterna-Brocota.

Nieskończone gałęzie drzewa Sterna-Brocota odpowiadają ciągom przybliżeń liczb rzeczywistych. W szczególności, liczbie e odpowiada następująca nieskończona gałąź:

$$RL^0RLR^2LRL^4RLR^6LRL^8RLR^{10}LRL^{12}\ldots$$

Wiele interesujących informacji na temat drzewa Sterna-Brocota zawiera książka Graham, Knuth, Patashnik 1994. Jest pewien związek między drzewem Sterna-Brocota a geometrią, a dokładniej tzw. *okręgami Forda*. Są to okręgi o środkach w punktach $(\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2})$ oraz promieniach $\frac{1}{2b^2}$. Tak więc, okręgi Forda dostarczają jeszcze innej *reprezentacji* liczb wymiernych.

Drzewo Sterna-Brocota ma związki także z tzw. ciągami Fareya. Przez *n-ty ciąg Fareya* rozumiemy rosnący ciąg liczb wymiernych z przedziału $[0, 1]$, których mianowniki nie są większe od n.

11 Zachęta do refleksji

1. Czy można uporządkować liniowo wszystkie gałęzie nieskończonego drzewa dwójkowego?

2. Czy w zbiorach $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ jakiś porządek jest wyróżniony (np. przez własności arytmetyczne)?

3. Czy gęstość porządku może być stopniowalna?

4. Czy jest sensowne mówienie o porządku *kołowym*?

5. Przypuśćmy, że – w jakiejś świadomie aktywnej formie – byłbyś istotą trwającą wiecznie. W jaki sposób uporządkowałbyś tę wieczność? Zauważ, że jeśli poświęcisz np. pierwsze sto miliardów lat na śpiewanie pieśni religijnych, a następne sto miliardów lat na picie piwa, to po owych dwustu miliardach lat znów jesteś w punkcie wyjścia: masz przed sobą nieskończoność trwania. Możesz powtórzyć dwa poprzednie wybory. I jeszcze raz. I jeszcze raz. Na pewno masz ciekawsze pomysły na wieczność trwania – podziel się nimi.

12 Podsumowanie

To, co należy zapamiętać z niniejszego wykładu:

1. Porządki częściowe i liniowe (ostre i nieostre).

2. Porządki: dyskretne, gęste, ciągłe.

3. Elementy: największy, najmniejszy, maksymalne, minimalne.

4. Łańcuchy i antyłańcuchy.

5. Ograniczenia (górne i dolne) zbioru, kres dolny, kres górny.
6. Drzewa: reprezentacje graficzne i lemat Königa.
7. Dobre porządki.

13 Wybrane pozycje bibliograficzne

Brocot, A. 1861. Calcul des rouages par approximation, nouvelle méthode. *Revue Chronométrique* **3**, 186–194.

Calkin, N., Wilf, H. 2000. Recounting the rationals. *American Mathematical Monthly* (Mathematical Association of America) **107** (4), 360—363.

Graham, R.L., Knuth, D.E., Patashnik, O. 1996. *Matematyka konkretna*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Guzicki, W., Zakrzewski, P. 2005. *Wykłady ze wstępu do matematyki. Wprowadzenie do teorii mnogości.* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Ławrow, A.I., Maksimowa, L.L. 2004. *Zadania z teorii mnogości, logiki matematycznej i teorii algorytmów.* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Marek, W., Onyszkiewicz, J. 2004. *Elementy logiki i teorii mnogości w zadaniach.* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Murawski, R. 2000. *Funkcje rekurencyjne i elementy metamatematyki. Problemy zupełności, rozstrzygalności, twierdzenia Gödla*. Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań.

Smullyan, R. 2009. *Logical Labyrinths*. A K Peters, Ltd. Wellesley, Massachusetts. Istnieje przekład polski (JP), ale nie ma dlań na razie wydawcy.

Stern, M. A. 1858. Ueber eine zahlentheoretische Funktion. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **55**, 193–220.