Funkcje rekurencyjne (11) (JiNoI III)

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl
pogon@amu.edu.pl

30 maja 2007

Plan na dziś

Plan na dziś:

- Przypomnienie: konstrukcja zdania Gödla;
- Twierdzenie Rossera;
- Szkic dowodu Twierdzenia Gödla o Niezupełności PA;
- Informacja o Twierdzeniu o Nieudowadnialności Niesprzeczności PA w PA;
- Twierdzenie Tarskiego;
- Informacja o teoriach rozstrzygalnych i nierozstrzygalnych;
- Refleksja: umysł, intuicja, dowód, prawda.

Odnośniki bibliograficzne

Precyzyjne przedstawienie omawianej dziś problematyki wykracza poza możliwości (czasowe) tego wykładu. Zainteresowanym polecam np. lekturę bardziej zaawansowanych pozycji:

- Hofstaedter, D.: *Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid.*
- Hunter, G.: *Metalogika.*
- Krajewski, S.: *Twierdzenie Gödla i jego interpretacje filozoficzne.*
- Murawski, R. *Funkcje rekurencyjne i elementy metamatematyki.*

Odnośniki bibliograficzne

Polecam także znakomite książki z zagadkami logicznymi, w których popularyzuje się wiedzę na temat metalogiki i jej zastosowań:

- Smullyan, R.: *Jaki jest tytuł tej książki?*
- Smullyan, R.: *Dama czy tygrys?*
- Smullyan, R.: *Szatan, Cantor i nieskończoność.*
- Smullyan, R.: *Przedrzeźniać przedrzeźniacza.*
- Smullyan, R.: *Na zawsze nierozstrzygnięte.*

Zdanie Gödla

Przypominamy, że można pokazać, że formuły $\underline{dow}(x, y)$ oraz $\underline{podst}(x, y) = z$ dają się precyzyjnie określić w PA tak, aby:

- $\underline{dow}(\overline{m}, \overline{n})$ wyrażała fakt, że ciąg formuł o numerze m jest dowodem formuły o numerze n;
- w konsekwencji, $\exists x \ \underline{dow}(x, \overline{n})$ stwierdzała, że formuła o numerze n jest twierdzeniem PA;
- $\underline{podst}(\overline{m}, \overline{n}) = \overline{r}$ stwierdzała, że r jest numerem formuły otrzymanej z formuły (o jednej zmiennej wolnej) o numerze n przez podstawienie w miejsce tej zmiennej liczebnika $\overline{m}$.

Nieważne, jak skomplikowane są formuły $\underline{dow}(x, y)$ oraz $\underline{podst}(x, y) = z$; ważne, że wyrażane przez nie pojęcia są obliczalne.

Twierdzenie Rossera

Niech T będzie dowolną teorią (pierwszego rzędu) o rekurencyjnym zbiorze aksjomatów zawierającą Arytmetykę Peana PA.

Twierdzenie Rossera. Jeśli T jest niesprzeczna, to:

1. Istnieje zdanie A języka teorii T, takie, że:
    1. A jest niedowodliwe w T.
    2. $\neg A$ jest niedowodliwe w T.
2. T jest nierozstrzygalna.
3. T jest niezupełna.

Twierdzenie Rossera

Dowód Twierdzenia Rossera.

Niech $\underline{god}(y)$ będzie skrótem dla formuły $\neg\exists x \;\; \underline{dow}(x, \underline{podst}(y, y))$ oraz niech n będzie numerem formuły $\underline{god}(y)$.

Wtedy: formuła $\underline{god}(\overline{n})$ stwierdza, że formuła o numerze $podst(n, n)$ nie ma dowodu.

Ale $podst(n, n)$ jest właśnie numerem formuły $\underline{god}(\overline{n})$.

Widać więc, że formuła $\underline{god}(\overline{n})$ stwierdza o sobie samej, że nie jest twierdzeniem.

Twierdzenie Rossera

Zatem: formuła $\underline{god}(\overline{n})$ jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy $podst(n, n)$ jest numerem formuły nie mającej dowodu, tzn. wtedy i tylko wtedy, gdy $\underline{god}(\overline{n})$ nie ma dowodu.

Gdyby więc $\underline{god}(\overline{n})$ miała dowód, to byłaby nieprawdziwa, a więc w teorii T dałoby się udowodnić formułę nieprawdziwą, co jest sprzeczne z założeniem, że T jest niesprzeczna.

Stąd: formuła $\underline{god}(\overline{n})$ jest prawdziwa, lecz nie posiada dowodu.

Z prawdziwości $\underline{god}(\overline{n})$ wynika, ż $\neg\underline{god}(\overline{n})$ jest fałszywa.

Stąd i z niesprzeczności T otrzymujemy, że również $\neg\underline{god}(\overline{n})$ nie ma dowodu.

ω-niesprzeczność

Niech teoria T zawiera w swoim języku nazwy dla wszystkich liczb naturalnych (np. liczebniki, określone powyżej).

Teoria T jest ω-niesprzeczna, gdy dla dowolnej formuły $\varphi(x)$ jej języka:

- jeśli $T \vdash \varphi(0)$, $T \vdash \varphi(\bar{1})$, $T \vdash \varphi(\bar{2})$, ...
- to T non$\vdash \exists x \neg\varphi(x)$.

Własność ω-niesprzeczności jest silniejsza od zwykłej niesprzeczności: każda ω-niesprzeczna teoria jest także niesprzeczna (ale nie na odwrót).

Teorie, które nie są ω-niesprzeczne nazywamy ω-sprzecznymi.

I Twierdzenie Gödla

I Twierdzenie Gödla. Jeśli Arytmetyka Peana PA jest ω-niesprzeczna, to:

1. Istnieje zdanie A języka PA, takie, że:
   1. A jest niedowodliwe w PA.
   2. $\neg A$ jest niedowodliwe w PA.
2. PA jest nierozstrzygalna.
3. PA jest niezupełna.

Uwaga. Założenie ω-niesprzeczności potrzebne jest jedynie dla dowodu punktu 1.2.

Dowód I Twierdzenia Gödla

Szkic dowodu. Dowód przebiega tak samo, jak dowód Twierdzenia Rossera, z wyjątkiem punktu 1.2.

Pokazaliśmy już, że $\underline{god}(\overline{n})$ nie jest twierdzeniem PA.
Zatem żadna liczba naturalna m nie jest numerem dowodu formuły $\underline{god}(\overline{n})$.
Dla żadnej liczby naturalnej m nie zachodzi zatem $dow(m,n)$. Ponieważ formuła $\underline{dow}(x,y)$ mocno reprezentuje w PA relację dow, więc dla każdej liczby naturalnej m zachodzi:
PA $\vdash \neg\underline{dow}(\overline{m},\overline{n})$.
Z ω-niesprzeczności PA mamy wtedy:
PA non$\vdash \exists x\ \neg\neg\underline{dow}(x,\overline{n})$, czyli PA non$\vdash \exists x\ \underline{dow}(x,\overline{n})$.
Ponieważ $\neg\underline{god}(\overline{n})$ jest formułą $\neg\neg\exists x\ \underline{dow}(x,\overline{n})$, więc oznacza to, że:
PA non$\vdash \neg\underline{god}(\overline{n})$.

II Twierdzenie Gödla

Przypomnijmy, że Con_{PA} oznacza formułę: $\neg\underline{tw}(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$, wyrażającą fakt niesprzeczności PA.

II Twierdzenie Gödla. Jeśli PA jest niesprzeczna, to PA non$\vdash$ Con_{PA}.

Twierdzenie to mówi zatem, że jeśli Arytmetyka Peana PA jest niesprzeczna, to faktu tego nie można dowieść w PA.

Nie możemy w tym kursie przedstawić dowodu tego twierdzenia, ze względu na jego skomplikowanie. Zainteresowanych odsyłam do cytowanej literatury przedmiotu.

Uwaga. Można udowodnić, że zdanie Con_{PA} (wyrażające niesprzeczność PA) jest równoważne na gruncie PA ze zdaniem Gödla (wyrażającym swoją własną niedowodliwość).

Twierdzenie Tarskiego

- **Twierdzenie Tarskiego.** Prawdziwość formuł teorii T **nie jest** definiowalna w T.

Uwaga: definicja prawdy (autorstwa Alfreda Tarskiego), którą poznaliście na kursie logiki, była sformułowana w metajęzyku — języku istotnie silniejszym od języka przedmiotowego.

Twierdzenie Tarskiego

Dowód Twierdzenia Tarskiego.

Przypuśćmy, że język teorii T zawiera formułę $\underline{pr}(x)$ wyrażającą własność prawdziwości formuł tej teorii, tj. taką, że:

$\underline{pr}(\overline{m})$ jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy m jest numerem formuły prawdziwej języka teorii T.

Pokażemy, że przypuszczenie to prowadzi do sprzeczności, a więc musi być odrzucone (w konsekwencji, dostajemy tezę Twierdzenia Tarskiego).

Niech $\underline{alf}(x)$ będzie formułą: $\neg\underline{pr}(\underline{podst}(x, x))$ oraz niech r będzie numerem formuły $\underline{alf}(x)$.

Twierdzenie Tarskiego

Wtedy $podst(r, r)$ jest numerem formuły $\underline{alf}(\overline{r})$.

Ale formuła $\underline{alf}(\overline{r})$ jest tożsama z formułą $\neg\underline{pr}(\underline{podst}(\overline{r}, \overline{r}))$.

Formuła $\underline{alf}(\overline{r})$ stwierdza, że formuła o numerze $podst(r, r)$ jest fałszywa. Zatem $\underline{alf}(\overline{r})$ stwierdza o sobie samej, że jest fałszywa.

Zatem formuła $\underline{alf}(\overline{r})$ jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy formuła o numerze $podst(r, r)$ jest nieprawdziwa.

Ale liczba $podst(r, r)$ jest właśnie numerem formuły $\underline{alf}(\overline{r})$.

Stąd: $\underline{alf}(\overline{r})$ prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy $\underline{alf}(\overline{r})$ fałszywa. SPRZECZNOŚĆ.

Uwagi historyczne

Uwagi.

- Twierdzenie udowodnione w 1930 roku przez Gödla zakładało ω-niesprzeczność teorii T. Założenie to osłabił (do niesprzeczności T) Rosser.
- Oba powyższe dowody wykorzystywały rozumowanie przekątniowe.
- Możliwe jest uprawianie metalogiki (metamatematyki) bez arytmetyzacji składni. Pokazał to niedawno Pan Profesor Andrzej Grzegorczyk, rozwijając oryginalne pomysły Alfreda Tarskiego dot. teorii konkatenacji.
- Ciekawostka prowincjonalna: Uniwersytet Poznański nie był zainteresowany zatrudnieniem Alfreda Tarskiego, jednego z największych logików wszystkich czasów.

Rozstrzygalność i nierozstrzygalność

Teorie rozstrzygalne.

Teoria jest rozstrzygalna, gdy zbiór ng jej twierdzeń jest rekurencyjny.

Przykłady:

- Teoria struktury $\langle N, S, +, 0\rangle$ (Presburger).
- Teoria struktury $\langle N, S, \cdot, 0\rangle$ (Skolem).
- Teoria struktury $\langle N, S, 0\rangle$ (Herbrand).
- Teoria algebr Boole'a (Tarski).
- Teoria liczb rzeczywistych, tj. teoria struktury $\langle \Re, 0, 1, S, +, \cdot, \leqslant\rangle$ (Tarski).
- Teoria grup abelowych (Szmielew).
- Klasyczny monadyczny rachunek predykatów (Löwenheim, Skolem, Behmann).

Rozstrzygalność i nierozstrzygalność

Teorie nierozstrzygalne.

Teoria jest nierozstrzygalna, gdy zbiór ng jej twierdzeń nie jest rekurencyjny. Przykłady:

- Arytmetyka PA (Gödel).
- Teoria mnogości ZF (Tarski).
- Klasyczny Rachunek Predykatów (Church).
- Teoria krat (Tarski).
- Teoria struktury $\langle Q, +, \cdot \rangle$, gdzie Q jest zbiorem wszystkich liczb wymiernych (J. Robinson).

Jak bardzo nierozstrzygalna jest PA?

Zadajmy naiwne pytanie: czy dodanie do PA jako aksjomatu (prawdziwego!) zdania Gödla $\underline{god}(\overline{n})$ da w wyniku teorię rozstrzygalną? Odpowiedź jest negatywna: dla tak rozszerzonej teorii można zbudować kolejne zdanie Gödlowskie, w niej nierozstrzygalne, itd.

Ogólniej, każda (niesprzeczna) teoria, w której są mocno reprezentowalne wszystkie zbiory rekurencyjne jest **istotnie** nierozstrzygalna, tzn. jest nierozstrzygalna i każde jej (tzw. proste) niesprzeczne rozszerzenie również jest nierozstrzygalne. W szczególności, PA jest istotnie nierozstrzygalna.

Uzyskano wiele dalszych twierdzeń dotyczących aspektów nierozstrzygalności PA. Przytoczmy jeszcze jeden wynik natury semantycznej:

PA ma $2^{\aleph_0}$ modeli przeliczalnych wzajemnie elementarnie nierównoważnych.

Umysł, intuicja, dowód, prawda

Oprócz treści (meta)matematycznej, przytoczone wyżej twierdzenia (a także liczne inne) mają także pewne implikacje natury filozoficznej. Tu ograniczymy się jedynie do kilku uwag, dotyczących następujących spraw:

- ω-reguła.
- Dowodliwość a prawdziwość.
- Praktyka matematyczna.
- Umysł a maszyna.

I to już naprawdę koniec.

Oczywiście, była to tylko garstka propedeutycznie traktowanych informacji. Na tyle nam pozwolono.

Wspomnijcie kiedyś, że uczono Was o matematycznych reprezentacjach pojęcia obliczalności oraz o Wielkich Metatwierdzeniach Logicznych.

Następne pokolenia studentek w Instytucie Językoznawstwa UAM prawdopodobnie nie będą mogły tego o sobie powiedzieć.

Ale mamy też dobrą wiadomość.

Zamiast tego kursu planujemy kurs Algorytmy i obliczanie.