ZAGADKI

WYKŁAD MONOGRAFICZNY, SEMESTR LETNI 2013–2014

JERZY POGONOWSKI

Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl
pogon@amu.edu.pl

1 O czym będzie ten wykład?

Jak w tytule: będzie o *zagadkach*. Każda zagadka zawiera pytanie. Każda zagadka jest żądaniem podania jej rozwiązania. Czasami ważniejszy od samego rozwiązania jest sposób dochodzenia do niego. Istotne są zatem pomysły, metody, techniki, itp. stosowane w rozwiązywaniu zagadek. Będziemy przyglądać się w jaki sposób *myśl poczęta* przez postawienie zagadki rozwija się w kierunku podania jej rozwiązania. Możesz więc traktować ten wykład jako intelektualny odpowiednik przebywania na basenie, w siłowni, na bieżni, itp. Krótko mówiąc: możesz uważać uczestnictwo w tym wykładzie za *trening intelektualny* w rozwiązywaniu problemów. Ponadto interesować nas będzie również to, jak *poprawnie* (pod względem formalnym i merytorycznym) *formułować* problemy.

1.1 Rodzaje zagadek

Czym właściwie są zagadki? Jakie są podstawowe typy zagadek? Które zagadki są ważne, a które płoche? Przede wszystkim, wyróżnimy dwa typy zagadek:

1. *Zagadki typu analitycznego*. Wszystkie informacje potrzebne do rozwiązania tego typu zagadki są zawarte w jej sformułowaniu (oraz w teorii, która jest zakładana, niejako „w tle”).

2. *Zagadki typu syntetycznego*. Aby rozwiązać tego typu zagadkę, musisz przywołać jakieś hipotezy, założenia, domysły, które nie wynikają bezpośrednio z treści samej zagadki.

Będziemy zajmować się głównie zagadkami typu analitycznego. Tak więc, w omawianych przez nas zagadkach sama ich treść będzie stanowiła wskazówki do ich rozwiązania. Rozważmy przykład. Niech ciotka Matylda lubi dokładnie wszystkich niesamolubów oraz nie lubi dokładnie żadnego samoluba. *Samolub* to ktoś, kto lubi siebie, a *niesamolub* to ktoś, kto nie jest samolubem. Zagadka polega na ustaleniu, czy w jakiejś suterenie na Rynku Łazarskim w Poznaniu mieszka ciotka Matylda. Aby to ustalić, nie musisz włóczyć się po suterenach na Rynku Łazarskim, wystarczy *pomyśleć*. Dane podane w treści zagadki przesądzają, że ciotka Matylda *nie istnieje*, a to za sprawą *logiki*. Potrafisz podać stosowną argumentację?

Rozważane w wykładzie zagadki będą dotyczyły *analizy pojęć*. Pochylimy się zatem nad zagadnieniami: *rozumienia* pojęć, właściwego nimi *operowania*, rozpoznawania i unikania *błędów* w sformułowaniach i argumentacjach. Krótko mówiąc, wykład kierujemy do Humanistek pragnących doskonalić się w samodzielnym *myśleniu krytycznym*. Wykluczamy jako słuchaczy *papużki*, które potrafią skrzekliwie *powtórzyć* to, co usłyszały, bez jakiegokolwiek zaangażowania intelektualnego. Do dziś z podziwem i uznaniem wspominam pewnego studenta, który na zajęciach z logiki podał płynną mową żądaną definicję, po czym dodał: *Ale ja nie rozumiem tego, co mówię*. To był szczery, odważny facet, z taką postawą na pewno odniósł później sukces, a co najmniej uniknął przykrości związanych z samooszukiwaniem siebie i oszukiwaniem innych.

Nie będziemy zajmować się *wszelkiego* typu zagadkami. Ludzka inwencja w tworzeniu zagadek, łamigłówek, paradoksów, tajemnic, itd. zdaje się nieograniczona. Lubimy się tym bawić, po prostu. Dla celów tego wykładu dokonano świadomego *wyboru* pewnych zagadek, pomijając wiele rodzajów innych. Nie będziemy zajmować się np.: rebusami, sztuczkami karcianymi, układankami figur, itp. Nie będziemy też analizować różnego rodzaju gier. Nie przewidujemy omawiania zagadek kryminalnych. Możemy natomiast obiecać, że postaramy się nie przesadzać z powagą i formułować zagadki w taki sposób, aby ich analiza dostarczała również wartości estetycznych i zabawowych.

1.2 Co to jest metagrobologia?

Ponury w brzmieniu termin *metagrobologia* oznacza naukę o zagadkach. Termin *metagrobology* w powyższym znaczeniu wprowadził (według Wikipedii) Rick Irby około 40 lat temu. Francuskiego słowa *metagraboliser* użył w 1534 roku François Rabelais w jednej ze swoich opowieści o przygodach Gargantui. Angielski termin *metagrobolise* wprowadził Peter Motteux w 1693 roku przy okazji opublikowania tłumaczenia Thomasa Urquharta słów Rabelais: *I have been these eighteen days in metagrabolising this brave speech*. Następował tu przypis, wyjaśniający że *metagrobolise* to: *a word forged at pleasure, which signifies the studying and writing of vain things*. W innym miejscu znaczenie tego słowa określano jako: *to give a lot of trouble for nothing, to bore and annoy others*. Słowo użyte pierwotnie przez Rabelais ma pochodzenie grecko-łacińskie. Przypomnijmy, że łacińskie *cribrum* oznacza *sito*. Francuskie *grabeler* oznacza *przesiewać*; w czasach Rabelais oznaczało *badać coś dokładnie*. Na marginesie dodajmy, że angielskie *to garble* oznacza *przekręcać* (słowa, fakty, informacje, wersje, cytaty), natomiast *garbology* oznacza *badania socjologiczne oparte na analizie domowych odpadków*. Wszystkie te informacje podajemy jedynie dla uciechy filolożek. Nie zamierzamy w tym wykładzie rozwodzić się nad *ogólnymi* problemami metagrobologii. Będziemy natomiast omawiać wybrane zagadki i sposoby ich rozwiązywania. Będą to głównie zagadki w istocie logiczne i matematyczne, często podawane jednak w takiej formie, aby ukazać ułudę naszych przekonań *zdroworozsądkowych*, odnoszących się do doświadczenia potocznego. Stwierdzamy dogmatycznie: *Potoczność jest obmierzła!* I pełni optymizmu dodajemy:

- ***Logic is fun!***
- ***Math is sexy!***

1.3 Humanistki i Matematyka

Celem wykładu jest m.in. próba przekonania Humanistek, że w gruncie rzeczy lubią Matematykę. Za dziwaczny, obłudny i pełen hipokryzji uważam głoszony przez niektóre studentki pogląd: *Nie lubię (nie umiem, boję się, itd.) Matematyki, ponieważ jestem Humanistką*. To bzdura, trudno twierdzić coś bardziej głupiego. Po pierwsze, uprawianie Matematyki jest właśnie tym, co odróżnia nas, ludzi (z włączeniem Humanistek), od naszych Braci Mniejszych, jak np. osły, małpy, ślimaki, pierwotniaki, nie mówiąc już o niższych jeszcze w Wielkim Łańcuchu Bytów kaktusów. To działalność specyficznie ludzka, głęboko zatem Humanistyczna. Po drugie, jak głosi niegłupie powiedzenie, *Tyle jest w każdym poznaniu nauki, ile jest w nim matematyki (Immanuel Kant)*. Po trzecie, jak głosi inne również niegłupie powiedzenie, *Księga Natury napisana jest w języku matematyki (Galileusz)*. Po czwarte, żadna z Humanistek nie potrafiłaby dłużej utrzymać się na szczycie Wielkiego Łańcucha Pokarmowego planety bez znajomości pewnych rudymentów matematyki – spróbuj bez niej np.: zrobić zakupy, ustalić prostą drogę z imprezy do domu, dokonać wyboru partnera porównując go z innymi kandydatami, itd. Jeśli sądzisz, że nie ma w takich działaniach i decyzjach żadnej ingerencji Matematyki, to mylisz się głęboko. Możesz jej nie dostrzegać świadomą uwagą, ale ona tam jest! I jej wydobycie zawsze pozwala na lepsze rozumienie zarówno tego, co dzieje się dookoła ciebie, jak i tego co dzieje się między twoimi uszami, w twoim prywatnym siedlisku Rozumu. Po piąte, obecna postać świata, jego szata technologiczna nie mogłaby powstać bez istotnego udziału Matematyki. Dotyczy to praktycznie każdego wynalazku, każdego odkrycia, każdej innowacji. Matematyka rządzi też w ostatecznym rozrachunku wartościami i ocenami, jest obecna w sztuce i filozofii, jest obecna *wszędzie*. Często nie jest łatwo dostrzegalna, ale Dobra Księga przecież tego nie obiecywała. Twierdzi się, że *niewiarygodna (i tajemnicza) użyteczność matematyki w nauce* jest podarunkiem, na który nie zasłużyliśmy. Pognębimy jeszcze na koniec te Humanistki głoszące durny slogan z początku tego punktu, które są wierzące, które uznają Wszechświat za rezultat twórczego aktu Bóstwa, które sympatyzują z *teorią inteligentnego projektu*. Gdyby bycie Humanistką implikowało nieznajomość Matematyki (lub brzydzenie się nią), to Bóstwo kreujące Wszechświat rządzony Matematyką z pewnością nie mogłoby być Humanistką. Sądzę, że powoduje to dyskomfort w poglądach wierzących co najmniej tej rangi co np. niesmaczny i okrutny (w moim odczuciu) żart zawarty w nawoływaniu Abrahama do poświęcenia własnego syna, dla kaprysu Bóstwa.

1.4 „Nic nie jest takie, jakim się wydaje"

Szczególną uwagę poświęcimy zagadkom, których rozwiązanie pozwala na skorygowanie niektórych naszych pochopnych poglądów, żywionych na podstawie mniej lub bardziej precyzyjnie określonych intuicji. Jesteśmy np. przekonani, że potrafimy bezrefleksyjnie oceniać szanse zajścia pewnych zdarzeń. Eksperymenty wyraźnie pokazują, że jest całkiem inaczej. Zabawny przykład to *Monty Hall Problem*. Mam trzy pudełka, dokładnie w jednym z nich jest nagroda, pozostałe są puste. Ja wiem, w którym jest nagroda, ty nie. Chcesz dostać tę nagrodę. Gra odbywa się w dwóch ruchach. W pierwszym masz wybrać pudełko. Gdy to uczynisz, pokazuję ci, że jedno z pozostałych pudełek jest puste. W drugim ruchu masz podjąć decyzję co jest bardziej korzystne w celu uzyskania nagrody:

1. Pozostać przy pierwotnym wyborze.
2. Zmienić swój pierwszy wybór.

Część osób wybiera 1), zwykle mamrocząc coś o konsekwencji w działaniu. Inni wybierają 2), podając za uzasadnienie, że czynią to z przekory. Znakomita większość twierdzi jednak, że 1) i 2) dają *równe prawdopodobieństwa* otrzymania nagrody. I ci obywatele głęboko się mylą – *zmiana* pierwotnego wyboru skutkuje prawdopodobieństwem otrzymania nagrody równym $\frac{2}{3}$, a nie $\frac{1}{2}$. Wystarczy uważnie policzyć, aby się o tym przekonać.

Nasz obraz świata wypaczamy na najprzeróżniejsze sposoby. *Mylimy* czasem wielkości wektorowe (np. ciężar) z wielkościami skalarnymi (np. masa). *Wierzymy* w różne rzeczy, ponieważ *wszyscy tak sądzą*, ksiądz, rabin, pastor, pop tak mówią, „tak mówili w telewizji", itp. Ulegamy *stereotypom* myślenia, łatwo i bezwiednie. Niektórzy budują swój obraz świata na „mądrościach" zawartych w *przysło-*

wiach, porzekadłach, aforyzmach. Sądzą więc, że *od przybytku głowa nie boli*, ale jednocześnie *co za dużo, to niezdrowo*. Jak pisał Kornel Makuszyński: *Jeśli na św. Prota jest pogoda albo słota, to na św. Hieronima jest deszcz, albo go ni ma*. Hołubimy *przesądy*. Wychwalamy tzw. *zdrowy rozsądek* jako probierz trafności przekonań. Kierujemy się *myśleniem życzeniowym* w refleksji i działaniu, jak mieszkańcy akwarium: *Jeśli Boga nie ma, to kto zmienia wodę w akwarium?* Jesteśmy *nieobiektywni* w ocenach: *Jeśli mnie coś się udało, to dlatego, że mam zalety, jeśli udało się tobie, to dlatego, że okoliczności ci sprzyjały. I na odwrót: jeśli mnie coś się nie powiodło, to z powodu niesprzyjających okoliczności, a jeśli nie udało się tobie, to dlatego, żeś cymbał*. Pozostajemy (najczęściej nieświadomie) pod działaniem różnych mechanizmów *wpływu społecznego*, wykształconych w sposób naturalny, ewolucyjnie. I tak dalej, ludzkie skłonności do błądzenia ugruntowane bywają rozmaicie i są wszechobecne. Przesądy, stereotypy, myślenie życzeniowe, myślenie stadne, itd. zwalniają od strat energetycznych związanych z *krytycznym myśleniem*, dają poczucie bezpieczeństwa. Poczucie to jest złudne. Wartością nadrzędną dla człowieka (z włączeniem Humanistek) jest Racjonalność. Wybitny matematyk i filozof William Kingdon Clifford pisał: *it is wrong always, everywhere, and for anyone, to believe anything upon insufficient evidence*. (*The Ethics of Belief*, 1877).

Sądzimy, że wykład może – choćby w niewielkim stopniu – przysłużyć się słuchaczom w nabieraniu wprawy w samodzielnym świadomym myśleniu krytycznym. To właśnie traktujemy jako główny cel powierzonej nam uniwersyteckiej posługi dydaktycznej.

Być może niektórzy z tych słuchaczy, których okrutny Los skazał na uczestniczenie w moich konwersatoriach z *Logiki Matematycznej* na pierwszym roku studiów pamiętają, że – w szczególnie uzasadnionych przypadkach – błędne rozwiązania zadań opatrywane były komentarzem *Nominacja do Nagrody Darwina*. Można to było uważać za złośliwość z mojej strony, podkreślę jednak, że kierowała mną chęć zwrócenia uwagi nieszczęsnej ofierze nominacji, iż w takich właśnie przypadkach jej *słowo wyprzedziło myśl*, a nie godzi się przecież Humanistce tak postępować. W tym wykładzie *Nominacje do Nagrody Darwina* nie będą rozdawane. Wręcz przeciwnie, będziemy zachęcać do ujawniania najbardziej nawet szalonych, spontanicznych spekulacji. Dopiero krytyczne przyjrzenie się im pozwoli na pełniejsze rozumienie dyskutowanych problemów.

1.5 Prowizoryczny spis tematów

Doświadczenie dydaktyczne poucza, że prawdopodobnie nie uda się omówić tego wszystkiego, co zaplanowano, ale nie ma się czym martwić. Postanawiamy, że *zrobimy dokładnie tyle, ile zrobimy – ani odrobiny mniej i ani odrobiny więcej*.

1. *Omówienie planu wykładu oraz przykłady zagadek*. Na końcu niniejszego tekstu podano parę przykładów zagadek.

2. *Zagadki logiczne*. Tego typu zagadki polegają przede wszystkim na analizie *wnioskowań*. Traktujemy wnioskowania jako konstrukcje językowe (a nie np. procesy psychiczne), złożone z przyjmowanych *przesłanek* oraz z otrzymywanego z nich *wniosku*. Istotny jest charakter związku między przesłankami a wnioskiem: wyróżniamy jako *poprawne* te wnioskowania, w których prawdziwość przesłanek gwarantuje prawdziwość wniosku. Mówimy wtedy, że wniosek *wynika logicznie* z przesłanek. Stosowne precyzyjne definicje tych pojęć znasz z wykładu logiki z pierwszego roku studiów. W wykładzie wykorzystamy głównie przykłady zagadek logicznych podanych w książkach Raymonda Smullyana, mistrza w tworzeniu logicznych łamigłówek. Uwzględnimy zagadki dotyczące analizy żywionych *przekonań*. Dla przykładu: pokażemy, że jeśli jesteś tzw. *szczęściarzem epistemicznym*, mniemasz, iż masz niesprzeczny system przekonań i wierzysz w zdanie *Bóg istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy nigdy nie przekonam się o jego istnieniu* (z punktu widzenia Boga to całkiem rozumny, dyskretny i wygodny sposób bycia), to cały twój system przekonań stanie się sprzeczny. Pokażemy też, co wystarcza, aby wiara w zajście jakiegoś zdarzenia implikowała, że zdarzenie to z pewnością zajdzie.

3. *Paradoksy*. Za paradoksalne uważamy – z grubsza rzecz ujmując – to, co mając pozory fałszu jest jednak prawdą, lub – inaczej rzecz ujmując – to, co kłóci się z naszymi (jak sądzimy, dobrze ugruntowanymi) przekonaniami o naturze w istocie intuicyjnej. Za paradoksalny możesz np. uważać fakt istnienia powierzchni, które mają *tylko jedną* stronę (jak *wstęga Möbiusa*). Z punktu widzenia doświadczenia potocznego paradoksalny jest fakt, że *przed* otwarciem pudełka *Kot Schrödingera* jest jednocześnie żywy i martwy (upraszczam). Niewątpliwie uznasz za paradoksalne *twierdzenie Banacha-Tarskiego*: kulę podzielić można na pięć części, a następnie złożyć z tych części *dwie* kule, z których każda ma objętość równą kuli wyjściowej. W literaturze anglojęzycznej często terminem *paradox* określa się także *sprzeczności logiczne*. Zalecamy jednak odróżniać sprzeczności logiczne od paradoksów. Gdy znajdujemy w jakiejś teorii sprzeczność, to staramy się ją natychmiast usunąć, gdyż inaczej teoria pozostaje bezwartościowa: w teorii sprzecznej można udowodnić wszystko (łącznie z tym, że teoria owa jest niesprzeczna). Natomiast napotkanie paradoksu zmusza nas do dokładniejszego przemyślenia żywionych dotąd przekonań intuicyjnych, które są z nim sprzeczne. W konsekwencji, zwykle modyfikujemy owe intuicyjne przeko-

nania, wskazujemy wyraźniej na zakres ich stosowalności. Nie ma żadnej gwarancji, że *wszystkie* odkrycia i pomysły naukowe dają się wyrazić w terminach potocznych.

4. *Sofizmaty*. Gdy wnioskujemy niepoprawnie, to możemy czynić to bezwiednie, bądź celowo. W pierwszym przypadku mamy do czynienia z *paralogizmem* – błędem logicznym. W przypadku drugim, gdy usiłujemy przedstawić niepoprawny wniosek z intencją oszukania, mówimy o *sofizmatach*. Można – na różne sposoby – kodyfikować poprawne metody rozumowania, jednak jakaś trafna i w miarę wyczerpująca klasyfikacja bądź typologia błędów i sofizmatów nie wydaje się wykonalna. Wyniki każdego sprawdzianu z logiki dobitnie przekonują, że ludzka inwencja w błądzeniu jest niewyczerpana. Podobnie, nieograniczona w swojej różnorodności wydaje się ludzka pomysłowość w oszukiwaniu.

5. *Iluzje*. Na pewno pokazywano ci rysunki, które przedstawiały różne niemożliwe figury (np. *trójkąt Penrose'a* lub *sześcian Neckera*). Oglądałaś grafiki Mauritsa Cornelisa Eschera, na których woda płynie wbrew wszelkim zasadom hydrauliki lub schody prowadzące w dół nagle okazują się schodami prowadzącymi w górę? Czułaś dyskomfort poznawczy, gdy oglądałaś rysunek przedstawiający – przy jednym sposobie patrzenia starą kobietę, a przy innym całkiem młodą? Czy po takich doświadczeniach nie stałaś się odrobinę podejrzliwa wobec świadectw dostarczanych przez zmysły? Co jest złudzeniem, a co nie? Może – zgroza – *wszystko* jest złudzeniem? Jak mawiała pewna dama: *Jestem solipsystką i dziwię się, że inni nimi nie są*. Jakim innym jeszcze (oprócz optycznych) złudzeniom podlegamy? W jaki sposób przekonujemy się, że coś jest złudzeniem?

6. *Nieskończoność*. To jedno z najważniejszych pojęć matematycznych. Zawsze było ono też źródłem wielu problemów filozoficznych. Budziło i budzi emocje: strach, podziw, itd. Żongluje się nim dość swobodnie w systemach religijnych. Czy potrafimy porządnie zdefiniować *nieskończoność*? Zastanów się przez chwilę, czy widzisz możliwość precyzyjnego określenia, że czegoś jest nieskończenie wiele, bez odwoływania się do np.: czasu, przestrzeni, uporządkowania. Prawdopodobnie w miarę łatwo przychodzi ci obcowanie z *nieskończonością potencjalną* – z przypadkiem, gdy można bez ograniczeń stale *powiększać* jakąś kolekcję obiektów. Możesz natomiast z pewnym-takim-wahaniem być skłonna do uznania, że istnieje również *nieskończoność aktualna* – oraz że możemy wykonywać pewne operacje na ujmowanych w całość obiektach nieskończonych. Z pewnością zaczniesz się buntować, gdy dowiesz się o istnieniu całej skali różnych nieskończoności.

7. *Liczby i wielkości*. W szkole *przemocą* nauczono cię tabliczek: dodawania i mnożenia. Zmuszono cię również do poznania algorytmicznych *przepisów*, ustalających jak (całkowicie bezmyślnie) dodawać, mnożyć, odejmować i dzielić liczby. Potem jeszcze były potęgi, pierwiastki, logarytmy. Do dzisiaj jednak nie wiesz, ani *czym* właściwie są liczby (naturalne, całkowite, wymierne, rzeczywiste, zespolone), ani *czym* właściwie jest ich dodawanie, mnożenie, itd. Czy istnieją inne rodzaje liczb niż te, o których mówiono w szkole? Jakie jeszcze rozważa się operacje na liczbach i po co? Czy istnieją wielkości nieskończenie wielkie lub nieskończenie małe? Czy o liczbach (prędzej czy później) dowiemy się wszystkiego czy też istnieją *prawdy* o liczbach, które *dowodem* matematycznym nie są osiągalne? Czy *każdy* zbiór liczb naturalnych możemy w jakiś efektywny sposób opisać?

8. *Ruch i zmiana*. Czym są: ruch i zmiana? Niektórzy twierdzili, że to co jest, jest niezmienne – bo gdyby było zmienne, to musiałoby przejść od tego czym jest, do tego czym nie jest; ale tego czym nie jest przecież nie ma, a więc zmiana jest niemożliwa. *Ruchu nie ma* – powiedział Parmenides i odszedł. *Strzała wypuszczona z łuku nie porusza się* – twierdził Zenon: w każdym momencie pozostaje bowiem nieruchoma, a suma bezruchu przecież ruchu dać nie może. Nie są to tylko czcze igraszki słowne – wiążą się z nimi podstawowe pytania o naturę rzeczywistości oraz możliwości jej poznania. Z pobytu w dyskotece wiesz, że ludzie wykonują różne – czasem dziwne – ruchy. Pełno jest także ruchu w Przyrodzie – tu coś pełznie, tam coś fruwa, a tam dalej coś się kołysze, itp. W jaki sposób opisujemy tę olbrzymią różnorodność ruchów? Czy *każdy* rodzaj ruchu (powiedzmy: turbulentne przepływy cieczy) potrafimy opisać matematycznie? Jedną z największych zagadek Natury jest to, że obiekty fizyczne zachowują się zgodnie z pewnymi prawami *minimalizującymi* wybrane parametry. Skąd, u licha, mała-głupia-cząstka *wie*, która z nieskończenie wielu dróg między dwoma punktami jest najkrótsza?

9. *Kształt i przestrzeń*. Ile *wymiarów* ma przestrzeń, w której żyjemy? Czy można *zobaczyć* czwarty wymiar? Jakie reguły obowiązują w świecie Płaszczaków (istot dwuwymiarowych)? W szkole zmuszono cię do poznania kilku, może kilkunastu kształtów, powierzchni, brył. Łatwo jednak wyobrazić sobie całe mnóstwo bardzo złożonych kształtów, powierzchni, itp. Czy można je wszystkie jakoś rozumnie poklasyfikować? Jakie w tym celu wykorzystać środki – geometryczne, algebraiczne czy jeszcze jakieś inne? Jesteś przyzwyczajona do kilku sposobów mierzenia *odległości* między dwoma punktami – np. na płaszczyźnie będzie to długość odcinka łączącego te punkty, na

sferze długość stosownego łuku koła wielkiego. W centrum miasta, gdzie poruszać się można jedynie po prostokątnej sieci ulic odległość między punktami wyznaczona będzie przez długość pewnej łamanej, łączącej te punkty. Snuje ci się po głowie intuicyjne określenie: *odległość* między dwoma punktami to długość najkrótszej drogi łączącej te punkty. Jak nadać tej intuicji precyzyjną formę? Czy zawsze, w każdej przestrzeni o ustalonej strukturze można poprawnie zdefiniować odległość? Zapewne słyszałaś, że oprócz geometrii euklidesowej nauczanej w skromnym wymiarze w szkole są jeszcze geometrie *nieeuklidesowe*. Czym różnią się od tej szkolnej? A może istnieją jeszcze inne geometrie?

10. *Uporządkowania*. Starsi obywatele dobrze rozumieją pojęcie porządku liniowego: tak właśnie uporządkowana powinna być kolejka ludzi oczekujących przed sklepem. Z kolei pojęcie uporządkowania hierarchicznego (*porządku częściowego*) jest chyba znane wszystkim: taki typ porządku obserwujemy w drzewach genealogicznych lub w hierarchii wojskowej czy też kościelnej. Naturalne jest pojęcie *dobrego uporządkowania*: takiego, w którym każdy niepusty podzbiór rozważanego uniwersum ma element najmniejszy. Dość dobrze radzimy sobie z tzw. naturalnym porządkiem w zbiorach liczbowych. Potrafimy też uchwycić różnicę między porządkami *dyskretnymi* (jak $<$ w zbiorze wszystkich liczb całkowitych) oraz *gęstymi* (jak $<$ w zbiorze wszystkich liczb wymiernych). Nieco trudniej jest przeciętnemu obywatelowi odróżnić porządki gęste od *ciągłych* (jak $<$ w zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych).

11. *Prawdopodobieństwo*. Pojęcia: *regularności* oraz *przypadkowości* (*losowości*) są niezwykle trudne do ogólnego zdefiniowania. Czy istnieją procesy, zdarzenia, itp., które są *czysto losowe*, w których nie ma *żadnych* regularności? W szkole obchodzono się z tobą bardzo łagodnie, oswajając cię z najprostszymi sytuacjami, w których szacować trzeba prawdopodobieństwa (jakieś kulki w urnach, rzuty kostką, itp.). Stąd jeszcze bardzo daleko to naprawdę trudnych zagadnień probabilistycznych. Warto w tym miejscu wspomnieć, że obecnie pewne aspekty świata opisywane być *muszą* właśnie w terminach prawdopodobieństwa (mechanika kwantowa).

12. *Obliczalność*. Wyobrażasz sobie świat *bez* komputerów, internetu, telewizji? Oraz *bez* wszelakich dalszych gadżetów elektronicznych, którymi się zabawiasz lub które służą ci do ochrony zdrowia, zapewnienia bezpieczeństwa, itd.? Cóż, taki *był* kiedyś świat. Natomiast obecna jego postać, naszpikowana elektronicznymi urządzeniami przetwarzającymi informację nigdy by nie powstała, gdyby matematycy nie zajęli się tym, czym jest informacja,

jak ją przetwarzać, na czym polegają obliczenia, itd. Aby powstał pracujący komputer, potrzebna była wprzódy matematyczna wizja tego, czym jest obliczanie. Czy potrafisz – choćby intuicyjnie – powiedzieć, w pełnej ogólności, co to znaczy, iż coś *można obliczyć*? Czy *wszystko* można obliczyć, czy też istnieje *Nieobliczalne*? Z bolesnych doświadczeń szkolnych wiesz, że łatwiej jest dodawać niż mnożyć, łatwiej mnożyć niż dzielić. Cóż miałoby znaczyć, że coś jest *trudno* obliczalne?

13. *Zagadki Humanistyczne*. W refleksji teoretycznej w takich dziedzinach, jak np. psychologia, socjologia, ekonomia musimy uwzględniać czynnik, którego dotąd dobrze nie rozumiemy – ludzkie działania i przekonania. Ekonomiści budują skomplikowane matematyczne modele gospodarki, a tu nagle – krach, wszystko się wali, niezgodnie z przewidywaniami teorii. Ludziska mniemają, że możliwe są demokratyczne wybory, spełniające rozsądne, naturalne warunki, a tu masz – *twierdzenie Arrowa* ustala, że nie jest możliwe znalezienie *globalnej preferencji społecznej*, spełniającej wszystkie te warunki. Obywatele sądzą, że ich system preferencji jest spójny, a wyniki eksperymentów pokazują, że wcale tak nie jest. Staramy się opisać *racjonalne* ludzkie działania, ludzie jednak nie zawsze postępują racjonalnie, a trafny opis działań nieracjonalnych jest niezwykle trudny, o ile w ogóle możliwy. Zaiste, mało co jest w stanie dostarczyć nam złośliwej uciechy większej niż przyglądanie się ludzkiej irracjonalności.

14. *Zagadki naukowe*. Z Przyrodą jest może uczciwiej niż z ludźmi – Przyroda *nie oszukuje*. To oczywiście nie oznacza, że Przyroda jest nam jakoś przyjazna, że ułatwia nam badanie siebie. Możemy uznać, że to my sami ustalamy zasady tej *gry poznawczej*, jaką jest badanie Przyrody, nie możemy jednak tych zasad ustalać całkiem dowolnie, jeśli chcemy odnieść sukces w owej grze. Największą zagadką naukową jest być może właśnie to, że Przyrodę w ogóle *możemy* badać. W szczególności, że – jak już wspomniano – to Matematyka dostarcza podstawowej aparatury pojęciowej w naukach przyrodniczych. Ostateczne (czytaj: tymczasowo ostateczne) odpowiedzi na pytania w rodzaju: czym jest *materia, siła, życie, energia, informacja?* oraz pytania: *jak to wszystko działa? dlaczego jest tak-a-nie-inaczej?* okazują się zawierać coraz więcej treści matematycznej, a coraz mniej treści czysto jakościowych. Czyżby więc świat u samej swojej ontycznej podstawy *był* po prostu Matematyką?

15. *Zagadki filozoficzne*. Filozofia, mówią, wyrasta ze zdziwienia. Oraz z podejrzliwości, dodajmy. *Dlaczego istnieje raczej coś niż nic? Co było na początku? Co naprawdę istnieje? Jak odróżnić wiedzę od mniemania? Czym*

są: dobro, piękno, prawda? Co warto robić, a czego robić się nie godzi? Jaki jest sens życia? Filozofia polega właśnie na stawianiu pytań (formułowaniu zagadek), analizie pojęć zawartych w tych pytaniach, rozważaniu czym jest wiedza i jakimi sposobami można ją osiągać, itd. Praktycznie żadne pytanie filozoficzne nie ma definitywnej odpowiedzi. Całkiem nowych pytań filozoficznych jest stosunkowo niewiele, często to właśnie stare pytania filozoficzne pojawiają się w coraz to innych odsłonach.

16. *Zagadki za milion dolarów: Problemy Milenijne*. W roku 2000 ustalono siedem tzw. *Problemów Milenijnych* – ważnych nierozwiązanych problemów matematycznych. Jak dotąd, rozwiązano jeden z nich (hipoteza Poincaré). Za rozwiązanie każdego z tych problemów Clay Mathematics Institute oferuje nagrodę miliona dolarów. Nie twierdzimy rzecz jasna, że uczestnictwo w tym wykładzie przybliży cię do zgarnięcia owej nagrody. Postaramy się natomiast opowiedzieć o Problemach Milenijnych w taki sposób, aby słuchacze mogli docenić ich ważkość. Dla porządku, podajmy listę tych problemów (w nawiasach podano datę postawienia problemu):

    (a) *Problem* $P = NP$ (1971).
    (b) *Hipoteza Poincaré* (1904).
    (c) *Hipoteza Riemanna* (1859).
    (d) *Hipoteza Hodge'a* (1950).
    (e) *Hipoteza Bircha i Swinnertona-Dyera* (1960).
    (f) *Teoria Yanga-Millsa* (1954).
    (g) *Równania Naviera-Stokesa* (1822).

2 Dla kogo wykład jest przeznaczony?

Wykład przeznaczony jest przede wszystkim dla studentów specjalności nauczanych w Instytucie Językoznawstwa UAM. Uczestniczyć w wykładzie mogą też studenci innych kierunków, nie ma zakazu. Dla pełnego rozumienia wykładu przydatna jest znajomość materiału z przedmiotów: *Logika matematyczna* oraz *Wstęp do matematyki*, wykładanych na I roku *Językoznawstwa i Nauk o Informacji*.

3 Zasady zaliczenia

Ponieważ każdy wykład kończyć się ma oceną, musimy coś z tym zrobić. Masz do wyboru:

- Napisanie eseju (6–8 stron) na temat związany z wykładem, uzgodniony wcześniej ze mną. Tematy esejów zaliczeniowych z roku akademickiego 2012–2013 podane są na stronie internetowej przedmiotu.
- Zdanie egzaminu pisemnego z materiału podanego na wykładzie.

4 Termin i miejsce

- Czas: czwartek, 15:15–16:45.
- Miejsce: CN 322B.

5 Przykładowe zagadki „na rozgrzewkę"

Rozważmy przykłady zagadek różnego typu, pokazujące czego można się spodziewać na dalszych wykładach.

1. *Dylematy pakowania*. Zastanówmy się nad sposobami *całkowitego wypełnienia* przestrzeni trójwymiarowej $\mathbb{R}^3$. Pamiętajmy, że jest to obiekt *nieskończony*, a więc nie taki jak np. sala wykładowa. Jakimi obiektami można całkowicie (i bez nakładania się na siebie) wypełnić przestrzeń trójwymiarową? Oczywiście *punktami*, mało zabawne. Twój następny pomysł: *sześcianami*. Zgoda, ale co trzeba o tych sześcianach założyć? Czy *kule* są dobre, aby w żądany sposób wypełnić $\mathbb{R}^3$? Powiesz: *Nigdy w życiu!* Ale czy potrafisz to *udowodnić*? Przy okazji, osobno możesz zastanowić się nad *problemem Keplera*: jak najciaśniej upakować kule w przestrzeni trójwymiarowej? Rozważmy dalsze pomysły:

   (a) Czy $\mathbb{R}^3$ można całkowicie wypełnić *okręgami* i *jedną prostą*? Tak, to łatwe. *Widzisz* to?

   (b) Czy $\mathbb{R}^3$ można całkowicie wypełnić *okręgami* i *jedną prostą* w taki sposób, aby prosta ta przechodziła *wewnątrz* każdego z tych okręgów, a ponadto *każde* dwa z tych okręgów były względem siebie usytuowane jak ogniwa łańcucha? Tak, to trudniejsze. Poczytaj o *wiązce Hopfa*.

   (c) Czy $\mathbb{R}^3$ można całkowicie wypełnić *prostopadłościanami z wyciętą wewnątrz prostopadłościenną dziurą*? Tak, to niezbyt trudne. Zastanów się, *jak* myślisz o tym problemie, *co robisz*, próbując go rozwiązać. Podaj warunki, które muszą spełniać te prostopadłościany.

2. *Łapówki*. Wyobraź sobie, że ktoś zamierza ofiarować ci *nieskończoną* liczbę kopert: pierwsza zawiera złotówkę, druga dwa złote, trzecia trzy złote, itd. – n-ta koperta zawiera n złotych. Pomijamy oczywiście czysto fizyczne aspekty darowizny, czyli zakładamy, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje koperta, która pomieści n złotych. Taka darowizna urządza cię do końca życia (i długo potem). Powiedzmy jednak, że darczyńca daje ci wybór: albo pozostajesz przy obecnej wersji podarunku, albo przyjmujesz od niego *nieskończoną* liczbę kopert, z których pierwsza zawiera dwa złote, druga cztery złote, trzecia sześć złotych, itd. – n-ta koperta zawiera $2n$ złotych. Co opłaca się wybrać? Z jednej strony, w drugim przypadku dostajesz w sumie *dwa razy więcej* pieniędzy niż w pierwszym. Z drugiej natomiast strony, w drugim przypadku dostajesz w sumie *tylko połowę* tego, co dostałbyś w pierwszym przypadku (bo znikają wszystkie koperty zawierające *nieparzystą* liczbę złotówek). Co wybierasz? Która z propozycji jest *obiektywnie* korzystniejsza?

3. *Precz z Pitagorasem!* Każdy potrafi wyklepać: *Pitagoras? Aha,* $a^2+b^2=c^2$*, to było w szkole*. Dokładniej: w trójkącie prostokątnym suma kwadratów długości przyprostokątnych równa jest kwadratowi długości przeciwprostokątnej. Przyjrzyj się teraz następującemu rozumowaniu. Niech a, b będą długościami przyprostokątnych, zaś c długością przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego. Pokażemy, że $a+b=c$. Wyobraźmy sobie zatem trójkąt prostokątny ABC: niech odcinek AB o długości a leży na osi odciętych, odcinek AC o długości b leży na osi rzędnych (czyli kąt prosty tego trójkąta to kąt między osiami współrzędnych; początek układu współrzędnych jest punktem A), wreszcie, odcinek AC o długości c (przeciwprostokątna) niech leży tam, gdzie powinien, czyli niech łączy te końce przyprostokątnych, które nie są początkiem układu współrzędnych. Narysujmy prostokąt $ABCD$ – punkt D to oczywiście punkt wspólny prostych równoległych do, odpowiednio, AB oraz AC. Bok CD ma długość a, bok BD ma długość a. Teraz narysujemy łamaną: od C do połowy CD (niech ten punkt nazywa się E_1), potem równolegle do osi rzędnych aż do odpowiedniego punktu na CB (niech ten punkt nazywa się F_1), potem równolegle do osi odciętych aż do odpowiedniego punktu na BD (niech ten punkt nazywa się G_1), a stąd do punktu B. Suma długości odcinków tej łamanej to oczywiście $a+b$, bo suma jej odcinków równoległych do osi odciętych równa jest a, a tych równoległych do osi rzędnych równa jest b. Teraz budujemy następną łamaną: od C do połowy odcinka CE_1 (niech ten punkt nazywa się E_2), potem równolegle do osi rzędnych aż do odpowiedniego punktu na CB, potem równolegle do osi odciętych aż do odpowiedniego punktu na E_1F_1, potem równolegle

do osi rzędnych aż do odpowiedniego punktu na CB, potem równolegle do osi odciętych aż do połowy odcinka F_1G_1, wreszcie równolegle do osi rzędnych aż do B. Suma długości odcinków tej łamanej to oczywiście także $a + b$, bo suma jej odcinków równoległych do osi odciętych równa jest a, a tych równoległych do osi rzędnych równa jest b. I tak dalej – iterujemy tę procedurę, otrzymując w rezultacie nieskończony ciąg łamanych (schodków o coraz niższej wysokości i długości stopnia), przy czym długość każdej z tych łamanych to $a + b$. Granica tego ciągu to odcinek BC. W granicy zachodzi zatem równość $a + b = c$. Pitagoras pomylił się. Zagadka: jak jest *naprawdę*? Domyślasz się, że jeśli nie pozostajemy pod wpływem liczącej parę tysięcy lat zmowy matematyków, to powyższe rozumowanie musi być błędne. Na czym polega błąd?

4. *Śmierć hydrze!* Jedna z prac Heraklesa polegała na uśmierceniu *hydry lernejskiej*, potwora o wielu głowach, przy tym o tyle trudnym do zabicia, że w miejsce odciętej głowy wyrastały natychmiast następne. Jak pamiętamy, Herakles *praktycznie* rozwiązał ten problem, znany był zresztą z wielu *praktycznych* rozwiązań trudnych problemów. Z matematycznego punktu widzenia hydra jest *drzewem*: *korzeniem* tego drzewa jest jej kadłubek, *liśćmi* poszczególne głowy, pozostałe *wierzchołki* drzewa odpowiadają segmentom szyi, (które same mogą stać się głowami, po odcięciu innych głów). Zabicie hydry polega na takim jej okaleczeniu, iż pozostaje z niej jedynie tułów-kadłubek (korzeń drzewa). Odcinamy głowy hydry (czyli liście drzewa) w pojedynczych krokach (cięciach mieczem). Odcięcie głowy w n-tym kroku pociąga za sobą następujące konsekwencje:

   (a) Znika krawędź drzewa prowadząca do tej głowy, pozostawiając zatem wierzchołek, który nazwiemy, powiedzmy, *krwawiącym kikutem*.

   (b) W wierzchołku będącym bezpośrednim poprzednikiem krwawiącego kikuta wyrasta hydrze dodatkowo n kopii tej części hydry, która po odcięciu głowy znajduje się powyżej węzła poprzedzającego krwawiący kikut.

   (c) Jeśli krwawiącym kikutem właśnie odciętej głowy jest kadłub hydry, to żadna nowa głowa nie wyrasta.

   Proponujemy wykonać rysunek średnio skomplikowanej hydry i przekonać się, jak wygląda jej utarczka z Heraklesem. Zdawać by się mogło, że uśmiercenie hydry robi się coraz trudniejszym zadaniem, w miarę stopniowego ucinania jej głów (wszak z każdym cięciem odrasta nie jedna głowa, ale wiele kopii całego fragmentu hydry, a liczba dodawanych kopii rośnie wraz z liczbą kolejnych cięć). Mamy jednak złe wiadomości dla hydry, a dobre dla Heraklesa. Otóż *niezależnie* od tego, jaką przyjmie on strategię (czyli niezależnie od tego, które kolejne głowy hydry będzie odcinał), to po *skończonej* liczbie cięć z biednej hydry zostanie jedynie bezgłowy kadłubek, czyli zostanie ona uśmiercona. Zagadka polega właśnie na udowodnieniu tego faktu. Nie jest to przy tym problem banalny: okazuje się, że twierdzenie gwarantujące zwycięstwo Heraklesa jest *prawdziwe* w standardowej dziedzinie liczb naturalnych, lecz *nie jest dowodliwe* w arytmetyce. Jego dowód wykorzystuje środki *infinitarne*, niedostępne w zwykłej arytmetyce.

5. *Przepis na nieśmiertelność*. Gdy zastanowić się głębiej, trudno orzec, dlaczego nieśmiertelność uważana jest za wartość pozytywną. Mniejsza z tym, niech każdy trudzi się nad problemem nieśmiertelności we własnym sumieniu. Dla tych, którzy jej pożądają podajemy (za Raymondem Smullyanem) prosty przepis na to, aby stać się nieśmiertelnym. Wystarczy, że spełnisz następujące dwa warunki:

   (a) Będziesz zawsze mówiła prawdę.

   (b) Wypowiesz (teraz) zdanie: *Powtórzę to zdanie jutro*.

   Skoro to takie proste, to dlaczego (żądni nieśmiertelności) ludzie nie postępują wedle tego przepisu? A może przepis jest zły? Co sądzisz?

6. *Zagadka dla kreatywnych księgowych*. Raymond Smullyan podaje w *Labiryntach logicznych* następującą ciekawą zagadkę:

   > *Problem 14.21*. Załóżmy, że ty i ja jesteśmy nieśmiertelni. Mam nieskończoną liczbę banknotów dolarowych do mojej dyspozycji, a ty na początku nie masz żadnego. Dzisiaj daję ci dziesięć banknotów, a ty oddajesz mi jeden. Jutro dam ci kolejne dziesięć, a ty wtedy z dziewiętnastu banknotów, które masz, oddasz mi jeden. I tak we wszystkie następne dni, ja daję ci dziesięć każdego dnia, a ty oddajesz mi jeden. Czynimy tak przez całą wieczność. A teraz pytaniem jest: ile na stałe pozostanie ci banknotów? Nieskończona liczba? Zero? Jakaś dodatnia liczba skończona? (Jestem przekonany, że odpowiedź wprawi w szok wielu z was!)

   Odpowiedź zależy od tego, *które* ze swoich banknotów mi oddajesz! Potrafisz to uzasadnić?

6 Zagadki do poszczególnych wykładów

Tu wyliczamy przykładowe zagadki należące do działów, odpowiadających tematom poszczególnych wykładów.

1. *Wprowadzenie*.

   (a) Kat pracujący starą metodą wykona całą pracę w 15 dni, natomiast kat pracujący nową metodą wykona taką samą pracę w 10 dni. Ile dni potrzeba im na wykonanie tej pracy wspólnie (każdy pracuje swoją metodą)?

   (b) Sześć zboczenic otacza małego niewinnego chłopca w ten sposób, że chłopiec stoi w środku koła, a zboczenice stoją początkowo na okręgu tego koła, w równych odległościach między sąsiednimi z nich. Chłopiec potrafi biec z prędkością 25 kilometrów na godzinę, a każda ze zboczenic z prędkością 20 kilometrów na godzinę. Chłopiec wie, że każda chcąca go dopaść zboczenica biegnie zawsze kierując się prosto na niego. Czy chłopiec ma szansę uciec zboczenicom? Niech początkowa odległość chłopca od każdej ze zboczenic wynosi, powiedzmy, 100 metrów, niech się trochę pogonią.

2. *Zagadki logiczne*. Wybierzmy parę zagadek z naszego tłumaczenia książki Raymonda Smullyana *Logical Labyrinths*:

   (a) PROBLEM 12.15. Powiada się, że pewnego razu bóg zstąpił z niebios i zaklasyfikował każdego mieszkańca Ziemi jako albo *szczególnego*, albo *nieszczególnego*. Jak się okazało, dla każdej osoby x, x była szczególna wtedy i tylko wtedy, gdy było tak, że albo każdy był szczególny, albo nikt nie był szczególny. Które z następujących trzech stwierdzeń wynika z tego logicznie?

   (1) Nikt nie jest szczególny.

   (2) Niektórzy są szczególni, a niektórzy nie są.

   (3) Każdy jest szczególny.

   PROBLEM 12.16. Zgodnie z *inną* wersją powyższej historii, okazało się, że dla każdej osoby x, x była szczególna wtedy i tylko wtedy, gdy niektórzy ludzie byli szczególni, a niektórzy nie byli. Jeśli ta wersja jest poprawna, to które z powyższych stwierdzeń (1), (2), (3) logicznie z niej wynikają?

(b) PROBLEM 12.17. Na pewnej planecie każdy z mieszkańców był klasyfikowany jako albo *dobry*, albo *zły*. Statystyk z naszej planety przybył na tamtą planetę i doszedł do trafnego wniosku, że dla każdego mieszkańca x, x był dobry wtedy i tylko wtedy, gdy było tak, że wszyscy dobrzy mieszkańcy mieli zielone włosy. Które z następujących trzech stwierdzeń wynika z tego logicznie?

(1) Wszyscy z nich są dobrzy.
(2) Żaden z nich nie jest dobry.
(3) Niektórzy z nich sa dobrzy, a niektórzy nie są.

Ponadto, które z następujących trzech stwierdzeń wynika z tego logicznie?

(4) Wszyscy z nich mają zielone włosy.
(5) Żaden z nich nie ma zielonych włosów.
(6) Niektórzy z nich mają zielone włosy, a niektórzy nie mają.

PROBLEM 12.18. Na innej planecie, znowu każdy mieszkaniec jest klasyfikowany jako albo *dobry*, albo *zły*. Okazuje się, że dla każdego mieszkańca x, x jest dobry wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje co najmniej jeden zły mieszkaniec o zielonych włosach. Które z (1)–(6) powyżej wynikają z tego logicznie?

Podkreślamy, że są to zagadki czysto logiczne. Wszelkie analogie z którąkolwiek z religii cieszących tę lub inną społeczność są przypadkowe.

3. *Paradoksy*.

(a) Czy można w przestrzeni trójwymiarowej przenicować sferę dwuwymiarową, bez jej rozrywania i tworzenia „ostrych” krawędzi? Powiedzmy, masz balonik na zewnątrz pomalowany na czerwono, wewnątrz na niebiesko. Czy możesz go przenicować na drugą stronę (przy zachowaniu podanych warunków) tak, aby na zewnątrz był niebieski, a wewnątrz czerwony?

(b) Co stanie się, gdy Pinokio powie: *Mój nos się wydłuża*?

4. *Sofizmaty*.

(a) Ustal, jakie usterki logiczne zawierają dowody poniższych lematów:

LEMAT WROCŁAWSKI. *Istnieje zbiór pusty.* Dowód. Rozważmy zbiór W wszystkich zbiorów pustych. Zachodzi dokładnie jedna z następujących możliwości:

a) Zbiór W jest zbiorem pustym.

b) Zbiór W jest zbiorem niepustym.

W przypadku a) zbiór W jest zbiorem spełniającym tezę Lematu Wrocławskiego. W przypadku b), skoro W jest zbiorem niepustym, to zawiera jakieś elementy. Ale, z definicji W, każdy element zbioru W jest zbiorem pustym. A zatem *dowolny* element zbioru W spełnia tezę Lematu Wrocławskiego.

LEMAT KRAKOWSKI. *Nic nie istnieje.* Dowód. Uczyńmy założenie optyczno-liryczne, że *brak cienia jest dowodem nieistnienia*. Cienie nie rzucają cienia. Zatem cienie nie istnieją. Stąd, nic nie posiada cienia. Dowodzi to, że nic nie istnieje.

(b) Co ma zrobić ateistka, poproszona o odmówienie modlitwy: odmówić i nie odmówić, czy też nie odmówić i odmówić?

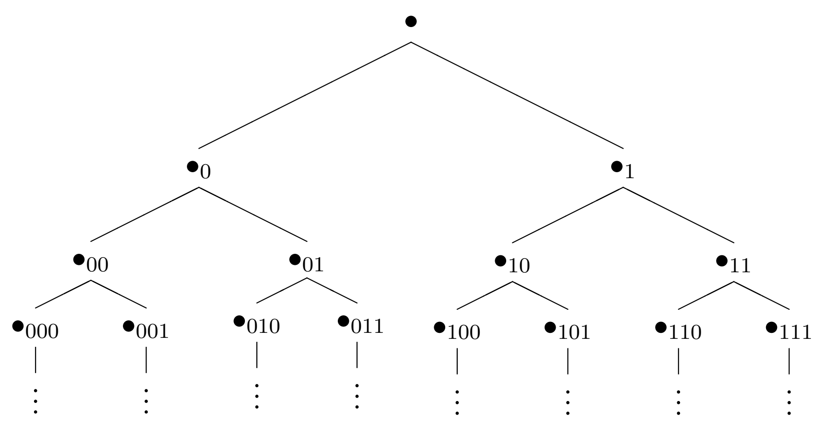
5. *Iluzje*.

(a) Dlaczego lustro zmienia stronę prawą na lewą, a nie zmienia góry na dół?

(b) Wyobraź sobie, że twoje widzenie nie podlega prawom perspektywy i spróbuj opisać, jak mogłoby ono wtedy (*nomen omen*) wyglądać. Jaką geometrię wybrałaś?

6. *Nieskończoność*.

(a) Nieskończone drzewo dwójkowe to drzewo o postaci rozpoczynającej się następująco:



Każdy z kolejnych wierzchołków ma dwóch bezpośrednich potomków. Wierzchołki (oprócz korzenia) kodujemy ciągami zer i jedynek. Tak więc, jeśli jakiś wierzchołek ma kod s, to jego bezpośrednimi potomkami są wierzchołki o kodach: $s0$ oraz $s1$. *Gałęzią* nazwiemy każdy *nieskończony* ciąg złożony z zer i jedynek. Pokaż, że nie jest możliwe ponumerowanie (liczbami naturalnymi: 0, 1, 2, 3, 4, 5,...) wszystkich gałęzi.

(b) Narysujmy półokrąg o promieniu r, o środku w początku układu współrzędnych na płaszczyźnie (powiedzmy w górnej półpłaszczyźnie). Teraz narysujmy półokrąg (o promieniu $\frac{r}{2}$) w dolnej półpłaszczyźnie, którego końce umieszczone są na osi odciętych w punktach o współrzędnych $(0, 0)$ oraz $(r, 0)$. W kolejnym kroku rysujemy półokrąg (o promieniu $\frac{r}{4}$) w górnej półpłaszczyźnie, którego końce znajdują się na osi odciętych w punktach o współrzędnych $(0, 0)$ oraz $(\frac{r}{2}, 0)$. Operacje te powtarzać możemy w nieskończoność – powstaje w ten sposób spirala o *nieskończenie wielu* zwojach, otaczających „coraz ciaśniej” pewien punkt na osi odciętych. Jaka jest długość tej spirali?

7. *Liczby i wielkości.*

(a) Wyobraź sobie następujący dialog:
– Ile lat mają twoje dzieci?
– Mam trójkę dzieci, iloczyn ich lat wynosi 36.
– To nie wystarcza dla ustalenia wieku każdego z nich!
– Suma ich lat równa jest liczbie okien w kamienicy naprzeciwko.
– To też nie wystarcza!
– Najstarsze ma zeza.
– No, wreszcie! Teraz już wiem, ile lat ma każde z trójki.
Ile lat ma każde z dzieci?

(b) Co zarzucisz następującemu „dowodowi”, że złotówka równa się groszowi:

$$1\text{zł} = 100\text{gr} = (10\text{gr})^2 = (0.10\text{zł})^2 = 0.01\text{zł} = 1\text{gr}$$

8. *Ruch i zmiana.*

(a) Odległość z A do B wynosi 300 kilometrów. Z obu tych miejscowości wyjeżdżają jednocześnie dwa pociągi PKP Intercity i pędzą ku sobie z prędkością 50 kilometrów na godzinę. Jednocześnie mucha wylatuje z A, dolatuje do pociągu, który wyruszył z B, zawraca, dolatuje do pociągu, który wyruszył z A, i tak dalej. Mucha leci cały czas z prędkością 100 kilometrów na godzinę. Mucha powtarza swój lot do momentu, w którym pociągi się spotkają (tzn. zaczną się mijać, PKP Intercity nie przewiduje w rozkładzie jazdy zderzeń pociągów). Ile kilometrów przeleci mucha? Porównaj matematyczną treść zagadki z jej interpretacją fizyczną.

(b) Mafia wysyła zabójcę z miasta A do miasta B statkiem płynącym w dół rzeki przez dwa dni. Zabójcy nie udaje się wykonać w B zlecenia, wraca do A statkiem płynącym w górę tejże rzeki trzy dni. Nieudolnego zabójcę czeka wiadomy koniec: nogi w miskę z zastygającym betonem i chlup do rzeki. Kapelusz niedoszłego zabójcy ląduje w rzece w A. Po ilu dniach dopłynie on rzeką do B (zakładamy, że nie zatonie, nikt go nie ukradnie, na rzece nie ma tamy, itd.)?

9. *Kształt i przestrzeń.*

   (a) W jaki sposób posadzić można cztery drzewa tak, aby wszystkie odległości między punktami posadzeń były równe?

   (b) Czy można (bez rozrywania i sklejania) przekształcić precelek (powiedzmy, z plasteliny) w kształcie ósemki w precelek, w którym jedno z kółek tworzących ową ósemkę przewleczone będzie przez drugie?

10. *Uporządkowania.*

    (a) Czy potrafisz ustawić wszystkie ułamki w ciąg uporządkowany dokładnie tak samo, jak ciąg wszystkich liczb naturalnych?

    (b) Kazimierz jest wujem Stanisława, a Stanisław jest wujem Kazimierza. Czy to możliwe, bez zawierania związków kazirodczych?

11. *Obliczenia.*

    (a) Która z liczb: 1 oraz $0.99999\ldots = 0.(9)$ jest większa?

    (b) Wprowadźmy oznaczenia:

    $\triangle n$ oznacza n^n

    $\square n$ oznacza iterowanie n razy operacji $\triangle$ dla argumentu n

    $\bigstar n$ oznacza iterowanie n razy operacji $\square$ dla argumentu n.

    Czy potrafisz obliczyć $\bigstar 2$?

12. *Prawdopodobieństwo*.

(a) Upuszczamy igłę o długości l na papier poliniowany prostymi równoległymi odległymi od siebie o L, przy czym $l < L$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że igła upadnie tak, iż pod nią będzie co najmniej jeden punkt którejś z tych linii? Przyjmujemy, że igła zawsze pada płasko na papier, bez wbijania się weń. Zauważ, że rozwiązanie tego zadania pozwala na podanie przybliżonej wartości liczby π, czyli stosunku długości okręgu do długości jego średnicy. Oczywiście czynimy też założenia idealizujące: igła oraz linie na papierze nie mają *grubości* (nie rzucamy parówek na tory kolejowe).

(b) Pewien matematyk podróżował samolotem zawsze nosząc przy sobie bombę, gdyż twierdził, iż prawdopodobieństwo, że w samolocie są dwie bomby jest o wiele mniejsze od tego, że jest tylko jedna przypadkowa bomba. Czy wchodzenie na pokład samolotu z własną bombą zwiększa, czy też zmniejsza prawdopodobieństwo tego, że wśród pozostałych pasażerów również ktoś ma bombę?

13. *Zagadki z nauk społecznych*.

(a) Aleph, Beth i Gimmel wędrują wspólnie przez pustynię. Każdy ma manierkę z wodą do swojej wyłącznej dyspozycji. Pewnego wieczoru, gdy Gimmel już śpi, Aleph (który bardzo nie lubi Gimmela) wlewa do jego manierki truciznę. Przed świtem, gdy Gimmel jeszcze śpi, Beth (który także nie lubi Gimmela) dziurawi jego manierkę, cała woda wycieka. Będąc pozbawionym wody, Gimmel po paru dniach umiera. Kto winien jest jego śmierci: Aleph czy Beth?

(b) Rozważmy wybory, w których jest trzech głosujących X, Y, Z i trzech kandydatów A, B, C. Niech preferencje poszczególnych wyborców wyglądają następująco (piszemy $P > Q$ w znaczeniu: wybór P jest preferowany względem wyboru Q; preferencje każdego wyborcy są *przechodnie*):

X: $A > B > C$
Y: $B > C > A$
Z: $C > A > B$.

Czy możliwe jest liniowe uporządkowanie kandydatów zgodne z preferencjami większości wyborców? Ta zagadka (*paradoks Condorceta*) może zostać zaszufladkowana także do działu dotyczącego uporządkowań.

14. *Zagadki naukowe*.

   (a) Lampa Thomsona działa w sposób następujący. Świeci, gdy jest włączona, nie świeci, gdy jest wyłączona. W momencie $t = 0$ jest włączona, w momencie $t = 1$ jest wyłączona, w momencie $t = \frac{3}{2}$ jest włączona, w momencie $t = \frac{7}{4}$ jest wyłączona, itd. Nie jest istotne, w jakich jednostkach mierzymy czas – powiedzmy, że będą to minuty. Tak więc, lampa świeci przez minutę, potem przez pół minuty nie świeci, potem przez ćwierć minuty świeci, potem przez jedną ósmą minuty nie świeci, itd. Czy w czasie $t = 2$ lampa świeci czy nie?

   (b) Nazwijmy *tarczą Abla* tarczę, której nic nie może przebić, a *włócznią Kaina* włócznię, która przebija wszystko. Co stanie się, gdy włócznia Kaina uderzy w tarczę Abla?

15. *Zagadki filozoficzne*.

   (a) Czy można trafnie twierdzić: *Byłem wczoraj w kościele, ale w to nie wierzę*?

   (b) Jak pogodzić bożą wszechwiedzę z istnieniem wolnej woli, przy niewinnym założeniu, że jesteśmy stworzeni przez Boga?

16. *Przykłady nierozwiązanych problemów matematycznych*. Ograniczmy się do kilku, które można sformułować w sposób zrozumiały dla gimnazjalisty:

   (a) *Hipoteza Goldbacha*. Każda liczba parzysta większa od 2 jest sumą dwóch liczb pierwszych. Udowodniono, że hipoteza Goldbacha zachodzi dla wszystkich liczb parzystych mniejszych od $4 \cdot 10^{17}$.

   (b) *Problem Collatza-Ulama*. Rozważmy całkiem dowolną liczbę naturalną $c_0 > 0$. Zdefiniujmy: $c_1 = \frac{c_0}{2}$, jeśli c_0 jest parzysta, a $c_1 = 3c_0 + 1$, jeśli c_0 jest nieparzysta. Ogólnie, niech: $c_{n+1} = \frac{c_n}{2}$, jeśli c_n jest parzysta, a $c_{n+1} = 3c_n + 1$, jeśli c_n jest nieparzysta. Hipoteza Collatza (rozważana także przez Ulama) głosi, że niezależnie od tego, jak początkowo wybierzemy liczbę c_0, to dla pewnego n otrzymamy $c_n = 1$. W konsekwencji, wszystkie dalsze wyrazy ciągu będą miały postać: 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1,... Udowodniono, że hipoteza Collatza zachodzi dla wszystkich liczb mniejszych od $20 \cdot 2^{58}$.

   (c) *Stała Eulera-Mascheroniego*. Zdefiniujmy:

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n).$$

Nie wiadomo, czy γ jest liczbą wymierną, czy niewymierną. Gdyby była wymierna, to przedstawiający ją (nieskracalny) ułamek musiałby mieć mianownik zapisany w notacji dziesiętnej przez ponad 10^{242080} cyfr.

(d) *Cegiełka Eulera*. Przez *cegiełkę Eulera* rozumiemy prostopadłościan, w którym długości wszystkich krawędzi oraz wszystkich przekątnych ścian wyrażają się liczbami naturalnymi. Najmniejsza cegiełka Eulera ma krawędzie o długościach krawędzi 44, 117, 240 oraz długościach przekątnych ścian 125, 244, 267. *Doskonała cegiełka Eulera*, to taka cegiełka Eulera, w której również długość wewnętrznej przekątnej prostopadłościanu jest liczbą naturalną. Dotychczas nie wiadomo, czy istnieją doskonałe cegiełki Eulera.

(e) *Liczby doskonałe*. Mówimy, że liczba naturalna jest *doskonała*, gdy jest ona sumą wszystkich jej dzielników od niej mniejszych. Najmniejszą liczbą doskonałą jest $6 = 1 + 2 + 3$, następną $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$. Jeśli $2^p - 1$ jest liczbą pierwszą, to $2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$ jest (oczywiście parzystą) liczbą doskonałą, to udowodnił już Euklides. Z kolei Leonhard Euler pokazał w XVIII wieku, że *każda* parzysta liczba doskonała jest postaci $2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$. Nie wiadomo obecnie, czy istnieją *nieparzyste* liczby doskonałe – gdyby taka liczba istniała, to musiałaby być większa od 10^{1500}. Ze wspomnianego wyniku Eulera wynika, że zapis każdej parzystej liczby doskonałej w notacji dwójkowej to układ jedynek, po którym następuje układ zer, np.:

$6_{10} = 110_2$

$28_{10} = 11100_2$

$496_{10} = 111110000_2$

$8128_{10} = 1111111000000_2$

$33550336_{10} = 1111111111111000000000000_2$.

$* * *$

Rozwiązania zagadek omawianych na wykładzie podawać będziemy podczas wykładu. Na stronie internetowej tych wykładów zamieszczamy szereg dodatków uzupełniających omawiany materiał. Są to prezentacje odczytów o zagadkach, odnośniki do stron zawierających zagadki matematyczne, itp.

7 Wybrana literatura

Jest wielkie mnóstwo książek z zagadkami i ciekawostkami matematycznymi i logicznymi, a także książek popularnych o matematyce. Podana niżej lista zawiera te pozycje, w których szukaliśmy pomysłów zagadek (będziemy uzupełniać tę listę).

Abbot, E.A. 1952. *Flatland. A Romance of Many Dimensions*. Dover Publications, Inc., New York.

Barrow, J.D. 1996. π *razy drzwi. Szkice o liczeniu, myśleniu i istnieniu.* Prószyński i S-ka, Warszawa.

Barrow, J.D. 2005?. *Kres możliwości? Granice poznania i poznanie granic*. Prószyński i S-ka, Warszawa.

Barrow, J.D. 2008. *Księga nieskończoności. Krótki przewodnik po tym, co nieograniczone, ponadczasowe i bez końca*. Prószyński i S-ka, Warszawa.

Barrow, J.D. 2011. *Jak wygrać na loterii? Czyli z matematyką na co dzień*. Wydawnictwo Literackie, Kraków.

Berlekamp, E.R., Conway, J.H., Guy, R.K. 1982. *Winning Ways for your Mathematical Plays* volume **2** *Games in Particular*. Academic Press.

Bollobás, B., Leader, I., Walters, M. 2009. Lion and Man – Can Both Win? Accessible at:

http://arxiv.org/pdf/0909.2524v1.pdf

Brocot, A. 1861. Calcul des rouages par approximation, nouvelle méthode. *Revue Chronométrique* **3**, 186–194.

Brian H. Bowditch, B.H. 2007. The angel game in the plane. *Combinatorics, Probability and Computing* **16** (3), 345–362.

Calkin, N., Wilf, H. 2000. Recounting the rationals. *American Mathematical Monthly* (Mathematical Association of America) **107** (4), 360—363.

Carroll, L. 1958. *Symbolic Logic and the Game of Logic*. Dover Publications.

Carroll, L. 2003. *The Mathematical Recreations of Lewis Carroll. Pillow Problems and a Tangled Tale*. Dover Publications, Inc., Mineola, New York.

Ciesielski, K., Pogoda, Z. 3023. *Królowa bez nobla. Rozmowy o matematyce*. Demart, Warszawa.

Conway, J.H. 1996. The angel problem. In: Richard Nowakowski (ed.) *Games of no chance*, MSRI Publications **29**, 3–12.

Conway, J.H., Guy, R.K. 1999. *Księga liczb*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa.

Dambeck, H. 2012. *Im więcej dziur, tym mniej sera. Matematyka zdumiewająco prosta*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Davis, J.P., Hersh, R. 1994. *Świat Matematyki*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Drösser, C. 2011. *Matematyka daj się uwieść*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Dunham, W. 2001. *Matematyczny Wszechświat*. Zysk i S-ka, Poznań.

Encyklopedia Szkolna. 1990. *Matematyka*. Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa.

Fried, E. 1978. *O algebrze abstrakcyjnej*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Fuchs, W.R. 1972. *Matematyka popularna*. Wiedza Powszechna, Warszawa.

Gandhi, S., Efthimiou, C. 2005. The Ascending double cone: a closer look at a familiar demonstration. *European Physics Journal* **26**, 681–694.

Gardner, M. 1982. *Aha! Gotcha: paradoxes to puzzle and delight*. W.H. Freeman and Company.

Gardner, M. 1994. *My best mathematical puzzles*. Dover Publications, Inc., New York.

Gardner, M. 1996. The ball that rolls up. *Physics Teaching* **34**, 461.

Gardner, M. 1997. *The Last Recreations. Hydras, Eggs, and Other Mathematical Mystifications.* Springer-Verlag, New York. Tłumaczenie polskie (bez daty wydania): *Ostatnie rozrywki. Hydry, jajka i inne mistyfikacje matematyczne*. Prószyński i S-ka.

Gårding, L. 1993. *Spotkanie z matematyką*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Gelbaum, B.R., Olmsted, J.M.H. 1990. *Theorems and Counterexamples in Mathematics*. Springer-Verlag, New York.

Gelbaum, B.R., Olmsted, J.M.H. 2003. *Counterexamples in Analysis*. Dover Publications, Inc., Mineola, New York.

Grabowski, M. 2009. *Podziw i zdumienie w matematyce i fizyce*. Prószyński i S-ka, Warszawa.

Graham, R.L., Knuth, D.E., Patashnik, O. 1996. *Matematyka konkretna*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Haddon, M. 2004. *Dziwny przypadek psa nocną porą*. Świat Książki, Warszawa.

Havil, J. 2003. *Gamma. Exploring Euler's constant.* Princeton University Press, Princeton and Oxford.

Havil, J. 2007. *Nonplussed! Mathematical Proof of Implausible Ideas*. Princeton University Press, Princeton and Oxford.

Havil, J. 2008. *Impossible? Surprising Solutions to Counterintuitive Conundrums*. Princeton University Press, Princeton and Oxford.

R. Isaacs, R. 1965. *Differential Games: A Mathematical Theory with Applications to Warfare and Pursuit, Control and Optimization*. John Wiley & Sons, New York.

Jeleński, S. 1956. *Lilavati. Rozrywki matematyczne*. Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, Warszawa.

Jeleński, S. 1974. *Śladami Pitagorasa. Rozrywki matematyczne*. Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa.

Juszkiewicz, A.P. 1975–1977. *Historia matematyki. Od czasów najdawniejszych do początku XIX stulecia.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa. Tom **1**: *Od czasów najdawniejszych do początku czasów nowożytnych* (1975). Tom **2**: *Matematyka XVII stulecia* (1976). Tom **3**: *Matematyka XVIII stulecia* (1977).

Kline, M. 1972. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Oxford University Press, New York Oxford.

O. Kloster, O. 2007. A solution to the angel problem. *Theoretical Computer Science* vol. **389**, no. 1–2, 152–161.

Kordemsky, B. 1992. *The Moscow Puzzles. 359 Mathematical Recreations*. Dover Publications, Inc., New York.

Kordiemski, B. 1956. *Rozrywki matematyczne*. Wiedza Powszechna, Warszawa.

Kordos, M. 2005. *Wykłady z historii matematyki*. SCRIPT, Warszawa.

Kordos, M., Włodarski, L. 1981. *O geometrii dla postronnych*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Krusemeyer, M.I., Gilbert, G.T., Larson, L.C. 2012. *A Mathematical Orchard. Problems and Solutions*. Mathematical Association of America.

Leybourn, W. 1694. *Pleasure with Profit Consisting in Recreations of Diverse Kinds*. R. Baldwin and J. Dunto, London.

Lietzmann, W. 1958. *Gdzie tkwi błąd? Sofizmaty matematyczne i sygnały ostrzegawcze.* Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, Warszawa.

Máthé, A. 2007. The angel of power 2 wins. *Combinatorics, Probability and Computing* **16** (3), 363–374.

Paulos, J.A. 2012. *Innumeracy. Matematyczna ignorancja i jej konsekwencje w dobie nowoczesnej technologii*. CeDeWu, Warszawa.

Perelman, J. 1951. *Matematyka na wesoło*. Wydawnictwo Ministerstwa Obrony Narodowej, Warszawa.

Perelman, J. 1957. *Ciekawa geometria.*, Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, Warszawa.

Péter, R. 1962. *Gra z nieskończonością*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Piegat, E. (opr.) 2000. *Jeszcze 105 zadań Hugona Steinhausa*. Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław.

Piegat, E. (opr.) 2005. *Zadania Hugona Steinhausa znane i nieznane*. Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław.

Polya, G. 1964. *Jak to rozwiązać? Nowy aspekt metody matematycznej.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Rauszer, C. 1979. *Rozmaitości matematyczne*. Instytut Wydawniczy „Nasza Księgarnia", Warszawa.

Ribenboim, P. 1997. *Mała księga wielkich liczb pierwszych*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa.

Rooney, A. 2011. *Fascynująca matematyka*. Bellona, Warszawa.

Sadowski, W. 2000. *Femme fatale. Trzy opowieści o królowej nauk.* Prószyński i S-ka, Warszawa.

du Sautoy, M. 2012. *Poker z Pitagorasem*. carta blanca, Warszawa.

Sawyer, W.W. 1970. *Ścieżki wiodące do matematyki*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Sierpiński, W. 1987. 250 *zadań z elementarnej teorii liczb*. Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa.

Smullyan, R. 1982. *Alice in Puzzle-Land. A Carrollian Tale for Children Under Eighty*. Morrow, New York. Gotowy jest przekład polski.

Smullyan, R. 1993. *Jaki jest tytuł tej książki? Tajemnica Drakuli, zabawy i łamigłówki logiczne*. Książka i Wiedza, Warszawa.

Smullyan, R. 1995. *Dama czy tygrys oraz inne zagadki logiczne*. Książka i Wiedza, Warszawa.

Smullyan, R. 1998. *Szatan, Cantor i nieskończoność oraz inne łamigłówki logiczne*. Książka i Wiedza, Warszawa.

Smullyan, R. 2004. *Zagadki Szeherezady i inne zdumiewające łamigłówki, dawne i współczesne*. Książka i Wiedza, Warszawa.

Smullyan, R. 2007a. *Przedrzeźniać przedrzeźniacza oraz inne zagadki logiczne łącznie z zadziwiającą przygodą w krainie logiki kombinatorycznej*. Książka i Wiedza, Warszawa.

Smullyan, R. 2007b. *Na zawsze nierozstrzygnięte. Zagadkowy przewodnik po twierdzeniach Gödla*. Książka i Wiedza, Warszawa.

Smullyan, R. 2007c. *The Magic Garden of George B. And Other Logic Puzzles*. Polimetrica, Milano. Gotowy jest przekład polski.

Smullyan, R. 2009d. *Logical labyrinths*. A K Peters, Wellesley, Massachusetts. Gotowy jest przekład polski.

Smullyan, R. 2013. *The Gödelian Puzzle Book. Puzzles, Paradoxes, and Proofs*. Dover Publications, Mineola, New York. Gotowy jest przekład polski.

Steinhaus, H. 1989. *Kalejdoskop matematyczny*. Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa.

Stern, M. A. 1858. Ueber eine zahlentheoretische Funktion. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **55**, 193–220.

Stewart, I. 2009. *Oswajanie nieskończoności. Historia matematyki*. Prószyński i S-ka, Warszawa.

Stewart, I. 2011a. *Krowy w labiryncie i inne eksploracje matematyczne*. Prószyński i S-ka, Warszawa.

Stewart, I. 2011b. *Gabinet matematycznych zagadek. Część I*. Wydawnictwo Literackie, Kraków.

Stewart, I. 2012a. *Dlaczego prawda jest piękna. O symetrii w matematyce i fizyce.* Prószyński i S-ka, Warszawa.

Stewart, I. 2012b. *Stąd do nieskończoności. Przewodnik po krainie dzisiejszej matematyki.* Prószyński i S-ka, Warszawa.

Stewart, I. 2012c. *Jak pokroić tort i inne zagadki matematyczne*. Prószyński i S-ka, Warszawa.

Stewart, I. 2012d. *Gabinet matematycznych zagadek. Część II*. Wydawnictwo Literackie, Kraków.

Struik, D.J. 1960. *Krótki zarys historii matematyki*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Szurek, M. 2000. *Matematyka dla humanistów*. Wydawnictwo RTW, Warszawa.

Szurek, M. 2013. *Gawędy matematyczne na każdy dzień miesiąca*. Wydawnictwo BTC.

Szurek, M. 2008. *Matematyka przy kominku*. Wydawnictwo btc, Warszawa.

Tanton, J. 2012. *Mathematics Galore! The First Five Years of the St. Mark's Institute of Mathematics*. Mathematical Association of America.

Wajszczyk, J. 2003. *Jestem więc myślę. Łamigłówki logiczne*. Książka i Wiedza, Warszawa.

Weber, K. 2009. *Zagadki kryminalne. 40 przypadków do rozwiązania*. KdC, Warszawa.

Wells, D. 2000. *I ty zostaniesz matematykiem*. Zysk i S-ka Wydawnictwo, Poznań.

Wells, D. 2002. *Cudowne i interesujące łamigłówki matematyczne*. Zysk i S-ka Wydawnictwo, Poznań.

Wells, D. 2012. *Games and Mathematics. Subtle Connections*. Cambridge University Press, Cambridge.

Więsław, W. 1997. *Matematyka i jej historia*. Wydawnictwo NOWIK, Opole.

Więsław, W. 2000. *Stare polskie zadania z matematyki*. Wydawnictwo NOWIK, Opole.

Winkler, P. 2004. *Mathematical Puzzles. A Connoisseur's Collection*. A K Peters, Natick, Massachusetts.

Wise, G.L., Hall, E.B. 1993. *Counterexamples in Probability and Real Analysis*. Oxford University Press, New York.