MATEMATYCZNE PODSTAWY KOGNITYWISTYKI

ZALICZENIE WYKŁADU: 30.I.2019

KOGNITYWISTYKA UAM, 2018–2019

Imię i nazwisko:.......... POGROMCY PTAKÓW STYMFALIJSKICH

1. [2 punkty] Podaj definicję warunku łączności działania dwuargumentowego (operacji dwuargumentowej) oraz przykład działania, które nie jest łączne w stosownym zbiorze.

2. [2 punkty] Niech $\preceq$ będzie relacją częściowo porządkującą niepusty zbiór X. Podaj definicje: elementu najmniejszego oraz elementu minimalnego względem tej relacji w zbiorze X.

3. [3 punkty] Pokaż, podając kontrprzykład, że nie jest prawem rachunku zbiorów:

$$(A - B) \cap (B - A) = (C \cap A) \cup (C \cap B)$$

4. [3 punkty] Oblicz pochodną funkcji:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}$$

5. [5 punktów] Udowodnij LEMAT KÖNIGA: jeśli drzewo $D = (X, R, x_0)$ rzędu skończonego jest nieskończone, to ma gałąź nieskończoną.

JERZY POGONOWSKI
Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
pogon@amu.edu.pl

MATEMATYCZNE PODSTAWY KOGNITYWISTYKI

ZALICZENIE WYKŁADU: 30.I.2019

KOGNITYWISTYKA UAM, 2018–2019

Imię i nazwisko:. . . . . ZDOBYWCY PASA HIPOLITY

1. [2 punkty] Podaj definicję warunku przemienności działania dwuargumentowego (operacji dwuargumentowej) oraz przykład działania, które nie jest przemienne w stosownym zbiorze.

2. [2 punkty] Niech $\preceq$ będzie relacją częściowo porządkującą niepusty zbiór X. Podaj definicje: elementu największego oraz elementu maksymalnego względem tej relacji w zbiorze X.

3. [3 punkty] Pokaż, podając kontrprzykład, że nie jest prawem rachunku zbiorów:

$$(A - B) \cap (B - A) = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

4. [3 punkty] Oblicz pochodną funkcji:

$$f(x) = \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$$

5. [5 punktów] Udowodnij TWIERDZENIE CANTORA: żaden zbiór nie jest równoliczny z rodziną wszystkich swoich podzbiorów.

JERZY POGONOWSKI
Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
pogon@amu.edu.pl

Rozwiązania

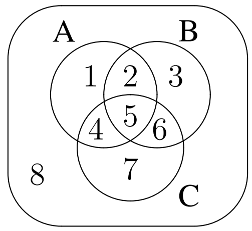
Pogromcy Ptaków Stymfalijskich

1. Operacja (działanie dwuargumentowe) $\circ$ na zbiorze X jest łączna wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $x \in X$, $y \in X$ oraz $z \in X$: $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$. Operacje dodawania i mnożenia liczb rzeczywistych są łączne. Łączne są operacje sumy oraz iloczynu zbiorów. Nie jest łączna np. operacja odejmowania liczb rzeczywistych, ponieważ mamy np. $(2-3)-5=-6$, natomiast $2-(3-5)=4$. Nie jest łączna operacja potęgowania liczb rzeczywistych, ponieważ mamy np. $(2^3)^2 = 64$, natomiast $2^{(3^2)} = 512$. Nie jest łączna operacja średniej arytmetycznej dwóch liczb rzeczywistych, o czym mówiono na wykładzie. Nie jest łączna operacja różnicy zbiorów, ponieważ w ogólnym przypadku $A-(B-C)$ nie jest równe $(A-B)-C$. Nie jest też łączna operacja produktu kartezjańskiego zbiorów, ponieważ w ogólnym przypadku $A \times (B \times C)$ nie jest równe $(A \times B) \times C$.

2. Element $x \in X$ jest elementem najmniejszym w zbiorze X częściowo uporządkowanym przez relację $\preceq$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \preceq y$ dla wszystkich $y \in X$. Element $x \in X$ jest elementem minimalnym w zbiorze X częściowo uporządkowanym przez relację $\preceq$ wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje element $y \in X$ taki, że $x \neq y$ oraz $y \preceq x$. Jeśli zdefiniujemy relację ostrego częściowego porządku $\prec$ następująco: $x \prec y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \preceq y$ oraz $x \neq y$, to definicję elementu minimalnego można też podać z użyciem tej relacji. Mianowicie element $x \in X$ jest elementem minimalnym w zbiorze X ostro częściowo uporządkowanym przez relację $\prec$ wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje element $y \in X$ taki, że $y \prec x$.

3. Można zauważyć, że dla dowolnych zbiorów A oraz B iloczyn $(A-B)\cap(B-A)$ jest zbiorem pustym (ponieważ elementami tego zbioru są te elementy, które są w A oraz poza B a jednocześnie w B poza A, co jest niemożliwe). Wystarczy zatem podać przykład dowolnych niepustych zbiorów A, B oraz C takich, że jakiś element x zbioru C należy do A lub do B. Wtedy bowiem: $(A-B)\cap(B-A) = \emptyset$ natomiast $x \in (C \cap A) \cup (C \cap B)$, ponieważ $x \in C \cap A$ lub $x \in C \cap B$, a więc $(C \cap A) \cup (C \cap B) \neq \emptyset$, czyli podana równość nie jest prawem rachunku zbiorów.

Można też narysować diagram Venna dla trzech zbiorów, umieszczając jakieś elementy w każdej składowej i policzyć, czemu równa jest lewa i prawa strona rozważanej równości.



W oznaczeniach tego diagramu mamy zatem:
$A - B = \{1, 4\}$
$B - A = \{3, 6\}$
$(A - B) \cap (B - A) = \emptyset$
$C \cap A = \{4, 5\}$
$C \cap B = \{5, 6\}$
$(C \cap A) \cup (C \cap B) = \{4, 5, 6\}$
Widać zatem, że $(A - B) \cap (B - A) \neq (C \cap A) \cup (C \cap B)$.

4. Pochodną funkcji $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$ obliczamy, stosując wzór na pochodną ilorazu funkcji. Mamy:

$$f'(x) = (\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1})' = \frac{(\sqrt{x}-1)' \cdot (\sqrt{x}+1) - (\sqrt{x}-1) \cdot (\sqrt{x}+1)'}{(\sqrt{x}+1)^2} = \frac{\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} \cdot (\sqrt{x}+1) - (\sqrt{x}-1) \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+1)^2} =$$
$$= \frac{\sqrt{x}+1-\sqrt{x}+1}{2 \cdot \sqrt{x} \cdot (\sqrt{x}+1)^2} = \frac{2}{2 \cdot \sqrt{x} \cdot (\sqrt{x}+1)^2} = \frac{1}{\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x}+1)^2}$$

5. LEMAT KÖNIGA. *Jeśli drzewo $D = (X, R, x_0)$ rzędu skończonego jest nieskończone, to ma gałąź nieskończoną.*
DOWÓD. Przypuśćmy, że D jest nieskończone. Zdefiniujemy gałąź nieskończoną $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ w D przez indukcję matematyczną.

Element x_0 (czyli korzeń drzewa D) jest pierwszym elementem konstruowanej gałęzi. Ponieważ D jest nieskończone, więc x_0 ma nieskończenie wiele R-następników. Element x_0 należy do zerowego poziomu drzewa D. Ponieważ D jest drzewem rzędu skończonego, więc x_0 ma jedynie skończenie wiele bezpośrednich R-następników, a zatem któryś z nich (możliwe, że kilka z nich) ma nieskończenie wiele R-następników. Za x_1 wybieramy więc jeden z owych bezpośrednich następników elementu x_0, który sam ma nieskończenie wiele R-następników. Wtedy oczywiście x_1 należy do pierwszego poziomu drzewa D.

Przypuśćmy, że $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ zostały zdefiniowane tak, że x_i należy do i-tego poziomu drzewa D oraz x_i ma nieskończenie wiele R-następników. Z założenia, x_{n-1} ma tylko skończenie wiele *bezpośrednich* R-następników. Ponieważ x_{n-1} ma nieskończenie wiele R-następników, więc co najmniej jeden z jego bezpośrednich R-następników także ma nieskończenie wiele R-następników. Wybieramy więc element x_n z n-tego poziomu drzewa D o tej właśnie własności. Wtedy x_n ma nieskończenie wiele R-następników. Ponieważ jest tak dla każdego n, pokazaliśmy istnienie nieskończonej gałęzi $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ w drzewie D.

ROZWIĄZANIA

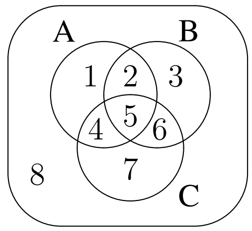
ZDOBYWCY PASA HIPOLITY

1. Operacja (działanie dwuargumentowe) $\circ$ na zbiorze X jest przemienna wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $x \in X$ oraz $y \in X$ mamy: $x \circ y = y \circ x$. Operacje dodawania i mnożenia liczb rzeczywistych są przemienne. Przemienne są operacje sumy oraz iloczynu zbiorów. Nie jest przemienna operacja odejmowania liczb rzeczywistych, ponieważ mamy np. $2 - 3 = -1$, natomiast $3 - 2 = 1$. Nie jest przemienna operacja potęgowania liczb rzeczywistych, ponieważ mamy np. $2^3 = 8$, natomiast $3^2 = 9$. Nie jest przemienna operacja różnicy zbiorów ponieważ w ogólnym przypadku $A - B$ nie jest równe $B - A$. Nie jest też przemienna operacja produktu kartezjańskiego zbiorów, ponieważ w ogólnym przypadku $A \times B$ nie jest równe $B \times A$.

2. Element $x \in X$ jest elementem największym w zbiorze X częściowo uporządkowanym przez relację $\preceq$ wtedy i tylko wtedy, gdy $y \preceq x$ dla wszystkich $y \in X$. Element $x \in X$ jest elementem maksymalnym w zbiorze X częściowo uporządkowanym przez relację $\preceq$ wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje element $y \in X$ taki, że $x \neq y$ oraz $x \preceq y$. Jeśli zdefiniujemy relację ostrego częściowego porządku $\prec$ następująco: $x \prec y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \preceq y$ oraz $x \neq y$, to definicję elementu maksymalnego można też podać z użyciem tej relacji. Mianowicie element $x \in X$ jest elementem maksymalnym w zbiorze X ostro częściowo uporządkowanym przez relację $\prec$ wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje element $y \in X$ taki, że $x \prec y$.

3. Można zauważyć, że dla dowolnych zbiorów A oraz B iloczyn $(A-B) \cap (B-A)$ jest zbiorem pustym (ponieważ elementami tego zbioru są te elementy, które są w A oraz poza B a jednocześnie w B poza A, co jest niemożliwe). Wystarczy zatem podać przykład dowolnych niepustych zbiorów A, B oraz C takich, że jakiś element x zbioru C należy do A lub do B. Wtedy bowiem: $(A-B) \cap (B-A) = \emptyset$ natomiast $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$, ponieważ $x \in A \cap C$ lub $x \in B \cap C$, a więc $(A \cap C) \cup (B \cap C) \neq \emptyset$, czyli podana równość nie jest prawem rachunku zbiorów.

Można też narysować diagram Venna dla trzech zbiorów, umieszczając jakieś elementy w każdej składowej i policzyć, czemu równa jest lewa i prawa strona rozważanej równości.



W oznaczeniach tego diagramu mamy zatem:
$A - B = \{1, 4\}$
$B - A = \{3, 6\}$
$(A - B) \cap (B - A) = \emptyset$
$A \cap C = \{4, 5\}$
$B \cap C = \{5, 6\}$
$(A \cap C) \cup (B \cap C) = \{4, 5, 6\}$
Widać zatem, że $(A - B) \cap (B - A) \neq (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

4. Pochodną funkcji $f(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ obliczamy, stosując wzór na pochodną ilorazu funkcji. Mamy:

$f'(x) = (\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}})' = \frac{(1-\sqrt{x})'\cdot(1+\sqrt{x})-(1-\sqrt{x})\cdot(1+\sqrt{x})'}{(1+\sqrt{x})^2} = \frac{-\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}\cdot(1+\sqrt{x})-(1-\sqrt{x})\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}}{(1+\sqrt{x})^2} = \frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}\cdot\frac{-1-\sqrt{x}-1+\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})^2} = \frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}\cdot\frac{-2}{(1+\sqrt{x})^2} = -\frac{1}{\sqrt{x}\cdot(1+\sqrt{x})^2}$

5. TWIERDZENIE CANTORA. *Żaden zbiór nie jest równoliczny z rodziną wszystkich swoich podzbiorów*.

DOWÓD. Przeprowadzimy dowód nie wprost. Weźmy dowolny zbiór X i przypuśćmy, że X jest równoliczny z rodziną wszystkich swoich podzbiorów $\wp(X)$. Oznacza to, iż istnieje bijekcja f ze zbioru X na zbiór $\wp(X)$. Określmy następujący element rodziny $\wp(X)$:

$$X_f = \{x \in X \ : \ x \notin f(x)\}.$$

Wtedy dla pewnego $x_f \in X$ musiałoby być: $f(x_f) = X_f$. Zapytajmy teraz: czy $x_f \in X_f$?

1. Jeśli $x_f \in X_f$, to $x_f \in \{x \in X \ : \ x \notin f(x)\}$, czyli $x_f \notin X_f$.

2. Jeśli $x_f \notin X_f$, to $x_f \notin \{x \in X \ : \ x \notin f(x)\}$, czyli $x_f \in \{x \in X \ :$ nieprawda, że $x \notin f(x)\} = \{x \in X \ : \ x \in f(x)\}$, a zatem $x_f \in X_f$.

Otrzymujemy zatem, iż: $x_f \in X_f$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_f \notin X_f$, a to jest *sprzeczność*. Musimy zatem odrzucić przypuszczenie o istnieniu funkcji f. W konsekwencji, nie istnieje bijekcja między X oraz $\wp(X)$, czyli X oraz $\wp(X)$ nie są równoliczne.