Zajęcia Dodatkowe

z Logiki Matematycznej

oraz Zadania Egzaminacyjne, 2007

I Rok Językoznawstwa i Informacji Naukowej UAM

Jerzy Pogonowski
Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl

Zajęcia te w całości poświęcone są przygotowaniom do egzaminu.

Ważne. Odpowiedzi na pytania egzaminacyjne powinny być:

- poprawne;
- opatrzone odpowiednimi komentarzami (np. co jest założeniem dowodu nie wprost) oraz uzasadnieniami;
- starannie sformułowane;
- wyraźnie zapisane.

Zalecam uważne zapoznanie się z poniżej rozwiązanymi zadaniami. Tak właśnie należy odpowiadać na egzaminie.

- Łącznie na egzaminie możesz uzyskać najwyżej 1700 punktów.
- Za rozwiązanie każdego z zadań: 1, 2, 3 otrzymujesz najwyżej 300 punktów.
- Za rozwiązanie każdego z zadań: 4, 5 otrzymujesz najwyżej 400 punktów.
- Za prawidłowe rozwiązanie trzech zadań uzyskujesz ocenę dostateczną.
- Za prawidłowe rozwiązanie czterech zadań uzyskujesz ocenę dobrą.
- Za prawidłowe rozwiązanie pięciu zadań uzyskujesz ocenę bardzo dobrą.

Ponieważ jesteśmy tylko ludźmi, więc kierować się będziemy ***zasadą tolerancji***:

- Uzyskanie co najmniej 851 punktów wystarcza do otrzymania oceny dostatecznej.
- Uzyskanie co najmniej 1051 punktów wystarcza do otrzymania oceny dostatecznej plus.
- Uzyskanie co najmniej 1251 punktów wystarcza do otrzymania oceny dobrej.
- Uzyskanie co najmniej 1451 punktów wystarcza do otrzymania oceny dobrej plus.
- Uzyskanie co najmniej 1651 punktów wystarcza do otrzymania oceny bardzo dobrej.

O tym, jaką liczbę punktów otrzymujesz za częściowe rozwiązanie zadania, decyduję ja.

Kieruję się przy tym:

- moją wiedzą;
- złożoną ponad trzydzieści lat temu przysięgą doktorską.

Dzień pierwszy: 4 czerwca 2007

Oto prototypowy zestaw zadań egzaminacyjnych:

Zadanie 1. Używając dowolnej poprawnej metody ustal, czy następujący zbiór formuł języka klasycznego rachunku zdań jest semantycznie niesprzeczny:

$$\{p \wedge \neg r, p \rightarrow q, q \rightarrow r\}.$$

Zadanie 2. Używając dowolnej poprawnej metody ustal, czy formuła $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$ języka klasycznego rachunku zdań wynika logicznie z formuły $p \rightarrow (q \wedge r)$.

Zadanie 3. Używając dowolnej poprawnej metody ustal, czy jest tautologią, czy też kontrtautologią klasycznego rachunku zdań następująca formuła:

$$(p \rightarrow q) \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg q).$$

Zadanie 4. Używając metody ***dowodów założeniowych***, ustal czy jest prawdą logiczną następująca równoważność:

> Pogonowski oślepnie, jeśli wydłubiemy mu oczy i utniemy uszy wtedy i tylko wtedy, gdy nie utniemy mu uszu, o ile nie oślepnie, choć wydłubiemy mu oczy.

Zadanie 5. Ustal za pomocą metody drzew semantycznych, czy następujące wnioskowanie jest dedukcyjne:

> *Każdy kogoś lubi.*
>
> *Niektórzy (to mają pecha): kogokolwiek lubią, to bez wzajemności.*
>
> *Zatem ktoś jest lubiany przez niesamoluba.*

Rozwiązania

Zadanie 1.

Zbiór $\{p \wedge \neg r, p \rightarrow q, q \rightarrow r\}$ jest semantycznie niesprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje co najmniej jedno wartościowanie zmiennych zdaniowych dla którego wszystkie formuły należące do tego zbioru są prawdziwe.

1.1. Odpowiedź metodą siłową.

Sprawdzamy, jakie są te formuły dla wszystkich wartościowań:

p	q	r	$\neg r$	$p \wedge \neg r$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow r$
1	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0
1	0	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0
0	0	1	0	0	1	1
0	0	0	1	0	1	1

Widać, że w ostatnich trzech kolumnach tabeli nie ma wiersza złożonego z samych 1. Zatem nie istnieje wartościowanie, przy którym wszystkie rozważane formuły byłyby prawdziwe. Badany zbiór formuł nie jest semantycznie niesprzeczny. Jest semantycznie sprzeczny.

1.2. Odpowiedź metodą nie wprost.

Przypuśćmy, że istnieje wartościowanie zmiennych, przy którym wszystkie rozważane formuły są prawdziwe. Wtedy:

1. Przypuszczamy, że $p \wedge \neg r$, $p \to q$ oraz $q \to r$ są prawdziwe przy jakimś wartościowaniu zmiennych zdaniowych.

2. Ponieważ $p \wedge \neg r$ prawdziwe (z 1.), więc p prawdziwe oraz $\neg r$ prawdziwe, czyli r fałszywe.

3. Ponieważ p prawdziwe (z 2.) i $p \to q$ prawdziwe (z 1.), więc q prawdziwe.

4. Ponieważ $q \to r$ prawdziwe (z 1.) oraz q prawdziwe (z 3.), więc r prawdziwe.

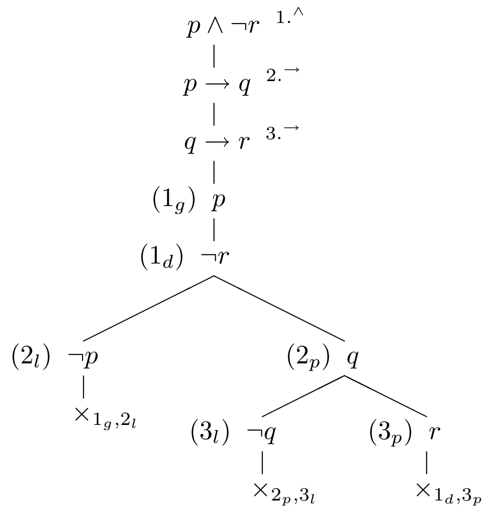
5. Otrzymujemy sprzeczność: r fałszywe (z 2.) oraz r prawdziwe (z 4.).

6. Nie istnieje zatem wartościowanie zmiennych, przy którym formuły $p \wedge \neg r$, $p \to q$ oraz $q \to r$ są prawdziwe.

7. Zbiór $\{p \wedge \neg r, p \to q, q \to r\}$ nie jest semantycznie niesprzeczny, jest semantycznie sprzeczny.

1.3. Odpowiedź metodą drzew semantycznych.

Przypuszczamy, że formuły $p \wedge \neg r$, $p \to q, q \to r$ są przy pewnym wartościowaniu wszystkie prawdziwe. Budujemy drzewo semantyczne, w którego pniu umieszczamy te formuły:



Wszystkie gałęzie tego drzewa są zamknięte. Nie istnieje więc wartościowanie, przy którym wszystkie formuły z pnia tego drzewa byłyby prawdziwe. Zbiór $\{p \wedge \neg r, p \to q, q \to r\}$ nie jest semantycznie niesprzeczny, jest semantycznie sprzeczny.

Zadanie 2.

2.1. Odpowiedź metodą siłową.

Na mocy Twierdzenia o Dedukcji, formuła B wynika logicznie z formuły A wtedy i tylko wtedy, gdy implikacja $A \to B$ jest tautologią KRZ.

Trzeba więc sprawdzić, czy przy każdym z ośmiu wartościowań zmiennych implikacja:

$$(p \to (q \wedge r)) \to ((p \to r) \wedge (q \to r))$$

jest prawdziwa. Po żmudnych rachunkach przekonujesz się, że dla pewnych wartościowań zmiennych p, q oraz r powyższa implikacja nie jest prawdziwa:

p	q	r	$p \to r$	$q \to r$	$q \wedge r$	$p \to (q \wedge r)$	$(p \to r) \wedge (q \to r)$	$p \to (q \wedge r) \to (p \to r) \wedge (q \to r)$
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	1
1	0	1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	0	1	1	1
0	0	0	1	1	0	1	1	1

Zatem formuła $(p \to r) \wedge (q \to r)$ nie wynika logicznie z formuły $p \to (q \wedge r)$.

2.2. Odpowiedź metodą nie wprost.

Przypuśćmy, że istnieje wartościowanie zmiennych zdaniowych, dla którego formuła $p \to (q \wedge r)$ jest prawdziwa, a formuła $(p \to r) \wedge (q \to r)$ jest fałszywa. Wtedy:

1. $p \to (q \wedge r)$ jest prawdą, z założenia.
2. $(p \to r) \wedge (q \to r)$ jest fałszem, z przypuszczenia dowodu nie wprost.
3. Z 2., albo:

3.1. $(p \to r)$ jest fałszem, albo

3.2. $(q \to r)$ jest fałszem.

3.1.1. Jeśli $(p \to r)$ jest fałszem, to p jest prawdą, a r jest fałszem.

3.1.2. Wstawiamy do 1. wartości otrzymane w 3.1.1. i otrzymujemy: $1 \to (q \wedge 0)$.

3.1.3. $q \wedge 0$ jest 0, niezależnie od tego, jakie jest q.

3.1.4. Z 3.1.2. oraz 3.1.3. mamy implikację $1 \to 0$, a to jest 0.

3.1.5. Sprzeczność: 1, 3.1.4.

3.2.1. Jeśli $(q \to r)$ jest fałszem, to q jest prawdą, a r jest fałszem.

3.2.2. Wstawiamy do 1. wartości otrzymane w 3.2.1. i otrzymujemy: $p \to (1 \wedge 0)$.

3.2.3. $1 \wedge 0$ jest 0.

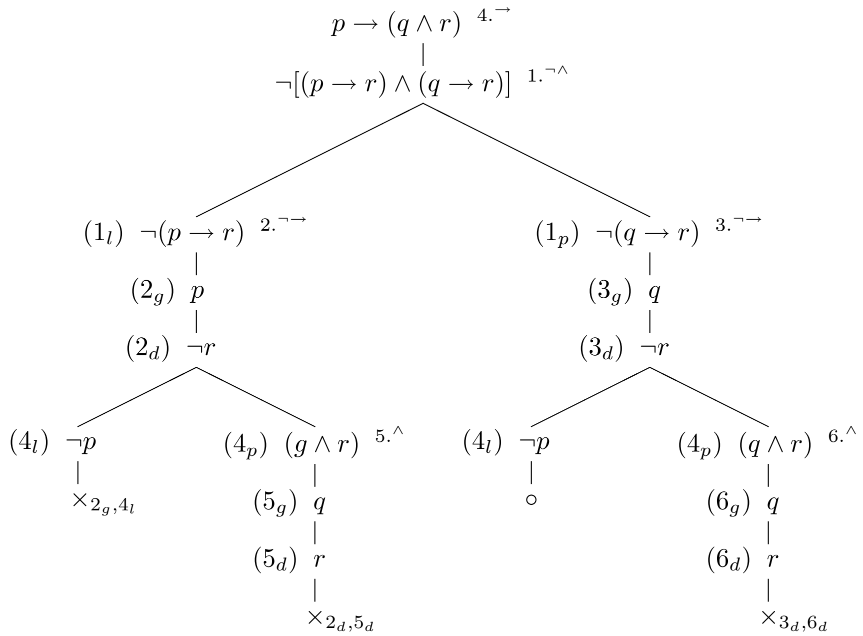
3.2.4. Z 3.1.2. oraz 3.1.3. mamy implikację $p \to 0$.

3.2.5. Implikacja $p \to 0$ jest prawdziwa dla p równego 0.

3.2.6. Otrzymujemy zatem wartościowanie: $p = 0$, $q = 1$, $r = 0$, dla którego formuła $p \to (q \wedge r)$ jest prawdziwa, a formuła $(p \to r) \wedge (q \to r)$ jest fałszywa. Zatem formuła $(p \to r) \wedge (q \to r)$ nie wynika logicznie z formuły $p \to (q \wedge r)$.

2.3. Odpowiedź metodą drzew semantycznych.

Budujemy drzewo semantyczne, w którego pniu umieszczamy przesłankę oraz zaprzeczony wniosek:



Otrzymane drzewo ma jedną gałąź otwartą, na której znajdują się literały: $\neg p$, q, $\neg r$. Zatem dla wartościowania:

p	q	r
0	1	0

formuła $p \to (q \wedge r)$ jest prawdziwa a formuła $(p \to r) \wedge (q \to r)$ fałszywa. Widzimy zatem, że formuła $(p \to r) \wedge (q \to r)$ nie wynika logicznie z formuły $p \to (q \wedge r)$.

Zadanie 3.

3.1. Odpowiedź metodą siłową.

Sprawdzamy wartość logiczną formuły $(p \to q) \to \neg(p \to \neg q)$ przy wszystkich wartościowaniach:

p	q	$\neg q$	$p \to q$	$p \to \neg q$	$\neg(p \to \neg q)$	$(p \to q) \to \neg(p \to \neg q)$
0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	0	0
1	0	1	0	1	0	0
1	1	0	1	0	1	1

Z tabeli tej widać, że dla wartościowania $p = 1$, $q = 1$ badana formuła ma wartość 1, natomiast dla wszystkich pozostałych wartościowań badana formuła ma wartość 0. Formuła ta nie jest zatem ani tautologią, ani kontrtautologią KRZ.

3.2. Odpowiedź metodą nie wprost.

3.2.1. Przypuśćmy, że $(p \to q) \to \neg(p \to \neg q)$ jest fałszywa przy pewnym wartościowaniu zmiennych zdaniowych.

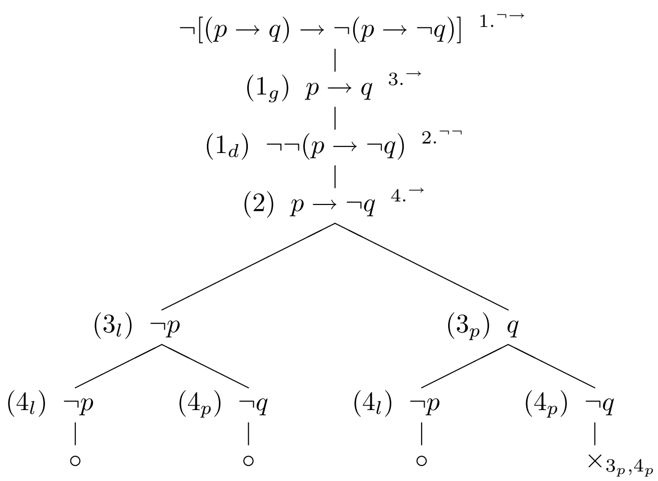
Wtedy:

1. $p \to q$ jest prawdą.
2. $\neg(p \to \neg q)$ jest fałszem.
3. Zatem $p \to \neg q$ jest prawdą.
4. Z 1. oraz 3. widać, że p musi mieć wartość 0.
5. q może mieć zarówno wartość 0, jak i wartość 1.
6. Zatem dla wartościowania $p = 0$, $q = 0$ oraz dla wartościowania $p = 1$, $q = 1$ badana formuła ma wartość 0.
7. Nie jest więc tautologią.

3.2.2. To, że badana formuła nie jest kontrtautologią można *odgadnąć*. Przypuśćmy mianowicie, że następnik tej implikacji jest prawdziwy przy jakimś wartościowaniu zmiennych zdaniowych (wtedy cała implikacja byłaby prawdziwa, a więc nie byłaby kontrtautologią). Zatem formuła $p \to \neg q$ jest fałszywa. Stąd p jest prawdziwe, a $\neg q$ fałszywe, czyli q prawdziwe. Dla p oraz q prawdziwych poprzednik badanej implikacji, czyli formuła $p \to q$ jest oczywiście prawdziwy. Tak więc, dla $p = 1$ oraz $q = 1$ formuła $(p \to q) \to \neg(p \to \neg q)$ jest prawdziwa, czyli nie jest kontrtautologią.

3.3. Odpowiedź metodą drzew semantycznych.

3.3.1. Rozpoczynamy od sprawdzenia czy formuła ta jest tautologią KRZ. Konstruujemy zatem drzewo, aby sprawdzić czy negacja tej formuły przyjmuje wartość 1 dla jakiegoś wartościowania:

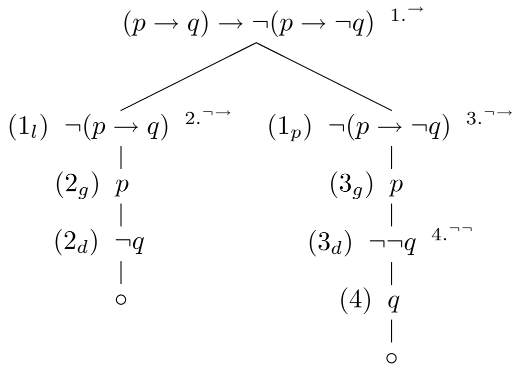


Z istnienia gałęzi otwartej w powyższym drzewie wynika, że istnieją wartościowania zmiennych, dla których negacja badanej formuły jest prawdziwa, czyli sama badana formuła $(p \to q) \to \neg(p \to \neg q)$ jest fałszywa.

Nie wykluczono zatem możliwości, że $(p \to q) \to \neg(p \to \neg q)$ jest fałszywa.

Stąd formuła $(p \to q) \to \neg(p \to \neg q)$ nie jest tautologią.

3.3.2. Sprawdzimy czy jest kontrtautologią, budując drzewo, w którego korzeniu umieszczamy badaną formułę.



Ponieważ drzewo ma gałąź otwartą, więc istnieją wartościowania zmiennych zdaniowych, dla których badana formuła jest prawdziwa. Nie jest zatem tak, iż jest ona fałszywa przy wszystkich wartościowaniach.

Zatem formuła ta nie jest również kontrtautologią KRZ.

Odpowiedź: formuła $(p \to q) \to \neg(p \to \neg q)$ nie jest ani tautologią, ani kontrtautologią KRZ.

Zadanie 4.

Znajdujemy zdania proste w podanym tekście i przypisujemy im zmienne zdaniowe:

- p — Wydłubiemy Pogonowskiemu oczy.
- q — Utniemy Pogonowskiemu uszy.
- r — Pogonowski oślepnie.

Budujemy schemat zdaniowy dla rozważanego zdania:

$$((p \wedge q) \to r) \equiv ((p \wedge \neg r) \to \neg q).$$

Aby metodą założeniową dowieść równoważności $A \equiv B$, wystarczy dowieść implikacji prostej $A \to B$ i odwrotnej $B \to A$.

4.1. Dowód implikacji $((p \wedge q) \to r) \to ((p \wedge \neg r) \to \neg q)$.

Dowód prowadzimy metodą nie wprost.

1.	$(p \wedge q) \to r$	zał.
2.	$p \wedge \neg r$	zał.
3.	$\neg\neg q$	z.d.n.
4.	$\neg\neg q \to q$	PPN
5.	q	RO 4,3
6.	p	OK 2
7.	$\neg r$	OK 2
8.	$p \wedge q$	DK 6,5
9.	r	RO 1,8
10.	Sprzeczność:	7,9.

Uzyskanie sprzeczności wykazuje, że trzeba odrzucić założenie nie wprost. Zatem implikacja

$$((p \wedge q) \to r) \to ((p \wedge \neg r) \to \neg q)$$

została udowodniona.

4.2. Dowód implikacji $((p \wedge \neg r) \to \neg q) \to ((p \wedge q) \to r)$.

Dowód prowadzimy metodą nie wprost.

1.	$(p \wedge \neg r) \to \neg q$	zał.
2.	$p \wedge q$	zał.
3.	$\neg r$	z.d.n.
4.	p	OK 2
5.	$p \wedge \neg r$	DK 4,3
6.	$\neg q$	RO 1,5
7.	q	OK 2
8.	Sprzeczność:	6,7.

Uzyskanie sprzeczności wykazuje, że trzeba odrzucić założenie nie wprost. Zatem implikacja

$$((p \wedge \neg r) \to \neg q) \to ((p \wedge q) \to r)$$

została udowodniona.

Ponieważ udowodniliśmy implikację prostą $((p \wedge q) \to r) \to ((p \wedge \neg r) \to \neg q)$ oraz implikację do niej odwrotną $((p \wedge \neg r) \to \neg q) \to ((p \wedge q) \to r)$, więc na mocy reguły dołączania równoważności otrzymujemy równoważność:

$$((p \wedge q) \to r) \equiv ((p \wedge \neg r) \to \neg q).$$

Zadanie 5.

Aby sprawdzić, czy wnioskowanie:

Każdy kogoś lubi.

Niektórzy (to mają pecha): kogokolwiek lubią, to bez wzajemności.

Zatem ktoś jest lubiany przez niesamoluba.

jest dedukcyjne musimy znaleźć schemat tego wnioskowania i rozstrzygnąć, czy wniosek wynika logicznie z przesłanek.

Znajdujemy predykaty w powyższym tekście. Jest tylko jeden, dwuargumentowy:

- xLy — x lubi y.

Zauważmy, że x jest niesamolubem wtedy i tylko wtedy, gdy nie lubi siebie, czyli gdy zachodzi $\neg xLx$.

Znajdujemy schemat powyższego wnioskowania:

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x \exists y\ xLy \\ \exists x \forall y\ (xLy \to \neg yLx)\end{array}}{\exists x \exists y\ (yLx \wedge \neg yLy)}$$

Budujemy drzewo semantyczne, w którego pniu umieszczamy przesłanki oraz negację wniosku:

$\forall x \exists y\, xLy \quad ^{2.\star a}$

$\exists x \forall y\, (xLy \to \neg yLx) \quad ^{1.\checkmark a}$

$\neg \exists x \exists y\, (yLx \wedge \neg yLy) \quad ^{5.\star b}$

(1) $\forall y (aLy \to \neg yLa) \quad ^{4.\star a \;\; 6.\star b}$

(2) $\exists y\, aLy \quad ^{3.\checkmark b}$

(3) aLb

(4) $aLa \to \neg aLa \quad ^{11.\to}$

(5) $\neg \exists y\, (yLb \wedge \neg yLy) \quad ^{7.\star a}$

(6) $aLb \to \neg bLa \quad ^{8.\to}$

(7) $\neg (aLb \wedge \neg aLa) \quad ^{9.\neg\wedge}$

(8_l) $\neg aLb$

$\times_{3,8_l}$

(8_p) $\neg bLa$

(9_l) $\neg aLb$

$\times_{3,9_l}$

(9_p) $\neg\neg aLa$

(10_l) $\neg aLa$

$\times_{9,10_l}$

(10_p) $\neg aLa$

$\times_{9,10_p}$

Wszystkie gałęzie drzewa są zamknięte. Wniosek wynika logicznie z przesłanek.

Widzisz zatem, że egzamin będzie całkiem prosty. Jutro i pojutrze poćwiczymy to, co sprawia ci szczególne trudności.

Dzień drugi: 5 czerwca 2007

Zadanie 1. Podaj dowód założeniowy formuły:

$$(\neg q \rightarrow \neg p) \equiv (p \rightarrow q).$$

Zadanie 2.
Za pomocą dowolnej poprawnej metody ustal, czy następujący schemat wnioskowania jest niezawodny:

$$\begin{array}{c} p \rightarrow (q \rightarrow r) \\ s \rightarrow \neg r \\ \hline p \rightarrow \neg q \end{array}$$

Zadanie 3.
Za pomocą dowolnej poprawnej metody ustal, czy następujące wnioskowanie jest dedukcyjne:

Wszystkie Pierzaste są Ogoniaste.

Wśród Ogoniastych jest Myszasty.

Stąd wynika, że wśród Pierzastych nie ma Ogoniastych.

Zadanie 4.
(a) Podaj definicję spełniania formuły postaci $\forall x_i\, A$ w strukturze $\mathfrak{M}$ przez wartościowanie w.
(b) Niech w sygnaturze rozważanego języka będzie dwuargumentowy predykat $\prec$. Niech interpretacją tego predykatu w standardowym modelu arytmetyki Peana będzie relacja $<$ mniejszości między liczbami naturalnymi. Jakie wartościowania (czyli ciągi liczb naturalnych) spełniają każdą z podanych niżej formuł:

- (1) $x_1 \prec x_2$
- (2) $\exists x_2\, (x_1 \prec x_2)$
- (3) $\forall x_1\, (x_1 \prec x_2)$
- (4) $\forall x_1 \exists x_2\, (x_1 \prec x_2)$
- (5) $\exists x_2 \forall x_1\, (x_1 \prec x_2)$.

Zadanie 5.
Podaj (z uzasadnieniem) formalne własności relacji R zachodzącej między formułami A oraz B języka rachunku zdań wtedy i tylko wtedy, gdy $A \vee B$ jest kontrtautologią.

Rozwiązania

Zadanie 1.
Aby udowodnić równoważność:

$$(\neg q \rightarrow \neg p) \equiv (p \rightarrow q).$$

trzeba wpierw udowodnić obie implikacje, prostą i odwrotną.

1.1. Dowód implikacji $(\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow q)$.

1.	$\neg q \rightarrow \neg p$	zał.
2.	p	zał.
3.	$\neg q$	z.d.n.
4.	$\neg p$	RO 1,3
5.	Sprzeczność:	2,4.

1.2. Dowód implikacji $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$.

1.	$p \to q$	zał.
2.	$\neg q$	zał.
3.	$\neg\neg p$	z.d.n.
4.	$\neg\neg p \to p$	PPN
5.	p	RO 4,3
6.	q	RO 1,5
7.	Sprzeczność:	2,6.

Korzystamy teraz z reguły dołączania równoważności: z obu udowodnionych implikacji wyprowadzamy równoważność:

$$(\neg q \to \neg p) \equiv (p \to q).$$

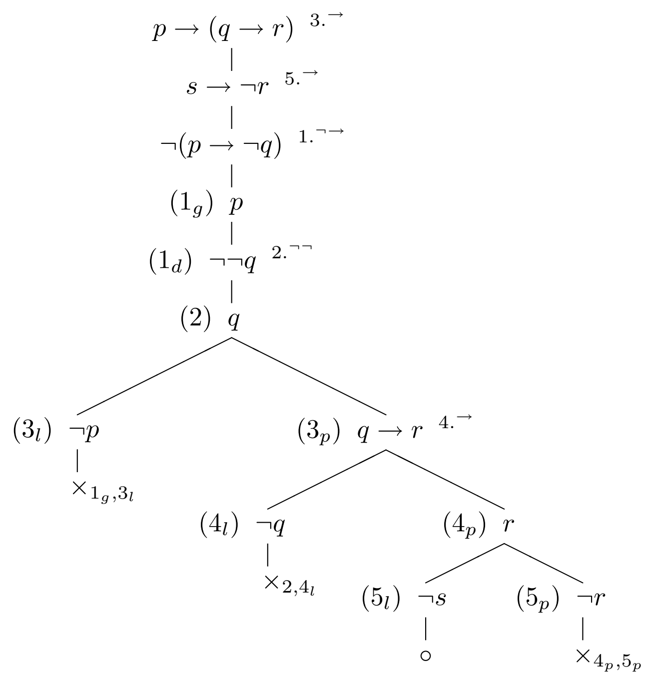
Zadanie 2.

Aby ustalić, czy schemat wnioskowania:

$$\frac{\begin{array}{c} p \to (q \to r) \\ s \to \neg r \end{array}}{p \to \neg q}$$

jest niezawodny sprawdzamy, czy istnieje takie wartościowanie, przy którym wszystkie przesłanki są prawdziwe, a wniosek fałszywy. Gdyby tak było, to schemat powyższy byłby zawodny.

Budujemy drzewo, w którego pniu umieszczamy przesłanki oraz zaprzeczony wniosek:



Zbudowane drzewo ma jedną gałąź otwartą (oznaczoną przez $\circ$), zatem dla wartościowania odczytanego z tej gałęzi:

p	q	r	s
1	1	1	0

wszystkie przesłanki przyjmują wartość 1, a wniosek – wartość 0. Zatem schemat jest zawodny.

Zadanie 3.

Reguła wnioskowania, wedle której badane wnioskowanie jest przeprowadzane, ma postać następującą:

$$\begin{array}{c} \forall x\,(Px \rightarrow Qx) \\ \exists x\,(Qx \wedge Rx) \\ \hline \neg\exists x\,(Px \wedge Rx) \end{array}$$

Czytamy tutaj: Px — x jest Pierzasty, Qx — x jest Ogoniasty, Rx — x jest Myszasty.
Budujemy drzewo semantyczne, w którego pniu są przesłanki tej reguły oraz zaprzeczenie jej wniosku:

$\forall x\,(Px \rightarrow Qx)$ $^{3.\star a\ 5.\star b}$

$\exists x\,(Qx \wedge Rx)$ $^{2.\checkmark a}$

$\neg\neg\exists\, x(Px \wedge Rx)$ $^{1.\neg\neg}$

(1) $\exists x\,(Px \wedge Rx)$ $^{4.\checkmark b}$

(2) $Qa \wedge Ra$ $^{6.\wedge}$

(3) $Pa \rightarrow Qa$ $^{9.\rightarrow}$

(4) $Pb \wedge Rb$ $^{7.\wedge}$

(5) $Pb \rightarrow Qb$ $^{8.\rightarrow}$

(6_g) Qa

(6_d) Ra

(7_g) Pb

(7_d) Rb

(8_l) $\neg Pb$ — $\times_{7_g,8_l}$ | (8_p) Qb

(9_l) $\neg Pa$ — $\heartsuit$ | (9_p) Qa — $\diamondsuit$

Widać, że w drzewie tym są gałęzie otwarte. Do żadnej z formuł, na żadnej z gałęzi otwartych, nie można już zastosować żadnych reguł. Gałęzie otwarte odpowiadają interpretacjom, w których wszystkie przesłanki reguły są prawdziwe, a jej wniosek fałszywy. Reguła jest zatem zawodna, a przeprowadzone wedle niej powyższe wnioskowanie nie jest dedukcyjne. Kontrprzykłady, tj. interpretacje, w których prawdziwe są przesłanki, a fałszywy wniosek podają poniższe tabelki:

♡	P	Q	R
a	−	+	+
b	+	+	+

♢	P	Q	R
a	?	+	+
b	+	+	+

Zgodnie z przyjętą konwencją, druga z tych tabelek jest skrótowym zapisem dwóch tabelek: w jednej zamiast znaku zapytania wpisujemy znak plusa, a w drugiej w miejsce znaku zapytania wstawiamy znak minusa. Tak więc, z konstrukcji powyższego drzewa semantycznego można odtworzyć dwa kontrprzykłady na dedukcyjność rozważanego wnioskowania. Czy widzisz, dlaczego nie trzy?

Zadanie 4.

(a) Wartościowanie w spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ formułę $\forall x_i\ A$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego wartościowania v, takiego, że v różni się od w co najwyżej na i-tym miejscu, v spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ formułę A.

(b) Wartościowania to nieskończone ciągi liczb naturalnych. Niech w_i oznacza i-ty element ciągu w. Rozważmy, jakie ciągi spełniają każdą z podanych formuł:

- (1) $x_1 \prec x_2$
- (2) $\exists x_2\ (x_1 \prec x_2)$
- (3) $\forall x_1\ (x_1 \prec x_2)$
- (4) $\forall x_1 \exists x_2\ (x_1 \prec x_2)$
- (5) $\exists x_2 \forall x_1\ (x_1 \prec x_2)$.

Formuła (1) jest spełniona przez wszystkie ciągi w, dla których: $w_1 < w_2$.

Formuła (2) jest spełniona przez takie ciągi w, które różnią się od ciągów spełniających formułę (1) co najwyżej na drugim miejscu. Ponieważ dla dowolnej liczby w_1 możemy znaleźć liczbę c taką, że $w_1 < c$, więc formułę (2) spełniają ***wszystkie*** ciągi liczb naturalnych.

Formuły (3) nie spełnia ***żaden*** ciąg. Przypuśćmy bowiem, że jakieś wartościowanie w spełnia (3). Wtedy ***każdy*** ciąg v różniący się od w na pierwszym miejscu (tj. taki, że $w_1 \neq v_1$) musiałby spełniać formułę (1). Ale np. ciąg stały $\langle w_2, w_2, w_2, \ldots \rangle$ nie spełnia formuły (1) — sprzeczność. Nie ma zatem ciągu spełniającego (3).

Jakiś ciąg w spełnia formułę (4), gdy każdy ciąg v otrzymany z w przez zastąpienie w_1 ***dowolną*** liczbą naturalną spełnia formułę (2). Ale formułę (2) spełniają ***wszystkie*** ciągi. Zatem również formułę (4) spełniają ***wszystkie*** ciągi.

Ponieważ ***żaden*** ciąg nie spełnia formuły (3), więc również ***żaden*** ciąg nie spełnia formuły (5) (bo ciągi spełniające (5) miałyby się różnić od jakiegoś ciągu spełniającego (3) co najwyżej na drugim miejscu).

Zadanie 5.

Rozważamy relację zachodzącą między formułami języka KRZ wtedy i tylko wtedy, gdy alternatywa tych formuł jest kontrtautologią. Oto kilka formalnych własności tej relacji.

a) **Zwrotność.** Czy dla każdej formuły A formuła $A \vee A$ jest kontrtautologią? NIE. Np. $p \vee p$ nie jest kontrtautologią.

b) **Przeciwzwrotność.** Czy dla każdej formuły A formuła $A \vee A$ nie jest kontrtautologią? NIE. Np. $(p \wedge \neg p) \vee (p \wedge \neg p)$ jest kontrtautologią.

c) **Symetria.** Czy dla dowolnych formuł A, B: jeśli $A \vee B$ jest kontrtautologią, to $B \vee A$ jest kontrtautologią? TAK, ponieważ dla dowolnych A, B formuły $A \vee B$ oraz $B \vee A$ są semantycznie równoważne, a zatem jeśli jedna z nich jest kontrtautologią, to druga również.

d) **Asymetria.** NIE, bo R jest symetryczna.

e) **Antysymetria.** Czy dla dowolnych formuł A, B: jeśli $A \vee B$ oraz $B \vee A$ są kontrtautologiami, to A jest identyczne z B? NIE. Np. $p \wedge \neg p$ nie jest identyczne z $\neg p \wedge p$, a zarówno $(p \wedge \neg p) \vee (\neg p \wedge p)$ jak i $(\neg p \wedge p) \vee (p \wedge \neg p)$ są kontrtautologiami.

f) **Spójność.** Czy dla dowolnych różnych formuł A, B mamy: $A \vee B$ jest kontrtautologią lub $B \vee A$ jest kontrtautologią? NIE. Np.: ani $p \vee q$ ani $q \vee p$ nie są kontrtautologiami, a p nie jest identyczne z q.

g) **Przechodniość.** Czy dla dowolnych formuł A, B, C: jeśli $A \vee B$ oraz $B \vee C$ są kontrtautologiami, to także $A \vee C$ jest kontrtautologią? Pokażemy, że TAK. Przypuśćmy, że $A \vee B$ i $B \vee C$ są kontrtautologiami, a $A \vee C$ nie jest kontrtautologią. Istnieje zatem wartościowanie zmiennych, przy którym $A \vee C$ jest prawdziwe.

Stąd, przy tymże wartościowaniu mamy co najmniej jedno z dwojga: A jest prawdziwe lub C jest prawdziwe. Jeśli A jest prawdziwe, to $A \vee B$ nie jest kontrtautologią, a jeśli C jest prawdziwe, to $B \vee C$ nie jest kontrtautologią. Otrzymaliśmy sprzeczność z założeniem, że zarówno $A \vee B$ jak i $B \vee C$ są kontrtautologiami. Zatem: $A \vee C$ jest kontrtautologią i pokazaliśmy, że R jest przechodnia.

Na dziś wystarczy. Do zobaczenia jutro.

Dzień trzeci: 6 czerwca 2007

Zadanie 1. Podaj dowód założeniowy formuły:

$$(\neg p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q).$$

Zadanie 2. Załóżmy, że poniższe wypowiedzi Ministra Obrony Narodowej, Szefa Sztabu Generalnego, Ministra Finansów oraz Kapelana Wojska Polskiego są prawdziwe.

> Prezydent: *Panowie, powiedzcie wreszcie, gdzie my właściwie te czołgi, chciałem powiedzieć te wyroby metalowe, eksportujemy. Mój brat nie chce mi tego ujawnić, a ja nie mogę się w tym połapać.*
>
> MINISTER OBRONY NARODOWEJ: *Taaak. Brat milczy. Nieważne. Jeśli eksportujemy do Izraela, ale nie do Libii, to eksportujemy też do Czeczenii.*
>
> SZEF SZTABU GENERALNEGO: *Panie Prezydencie, powiem krótko, po żołniersku: albo eksportujemy jednocześnie do Libii i do Czeczenii albo do żadnego z tych dwóch krajów.*
>
> MINISTER FINANSÓW: *Ja sam siebie też pytam: a jaki my mamy w tym interes? A ile tu się da zarobić? Jasne, że jeśli eksportujemy do Libii, to eksportujemy też do Izraela.*
>
> KAPELAN WOJSKA POLSKIEGO: *Z tym eksportem to prawie tak źle, jak z naszą posługą misyjną. Eksportujemy do co najmniej jednego z tych trzech krajów. A na wyposażenie naszych ubożuchnych misji w Azji, Afryce, Ameryce Południowej i Australii wciąż brakuje grosza.*

Do jakich krajów eksportujemy czo..., tj. te wyroby metalowe?

Zadanie 3. Udowodnij, że:

- (a) jest nieskończenie wiele tautologii KRZ;
- (b) jest nieskończenie wiele kontrtautologii KRZ;
- (c) jest nieskończenie wiele formuł języka KRZ, które nie są ani tautologiami, ani kontrtautologiami;
- (d) dla dowolnej liczby naturalnej $n \geqslant 1$ istnieją tautologie KRZ zawierające n różnych zmiennych zdaniowych.

Zadanie 4.
Leżysz w szpitalu. Doktor stoi przy łóżku i oglądając twoją kartę przypomina sobie wiadomości z wykładów:

> *Jeśli pacjentka ma przerzuty nowotworowe, to zaatakowana jest wątroba. Pacjentka ma krew w moczu, chociaż nie ma wysokiej gorączki. Nie jest tak, aby jednocześnie była krew w moczu a nie było przerzutów nowotworowych. Pacjentka ma wysoką gorączkę, o ile zaatakowana jest wątroba.*

Na to jedna z asystentek:

> No cóż, z tego wynika, że pacjentka wyzdrowieje, jeśli usuniemy jej oba płuca. Czy tak, Panie doktorze?

Czy wniosek asystentki wynika logicznie z tekstu wygłoszonego przez lekarza?

Zadanie 5.
Teraz to już jesteś na intensywnej terapii. Trzeba ci **natychmiast** podać lek zawierający jednocześnie alfaminę, betaminę oraz deltaminę.[1] Pielęgniarce trzęsą się ręce i próbuje sobie przypomnieć:

[1] Nazwy leków są zmyślone, jak mi się wydaje. Nie jestem opłacany przez żadną firmę medyczną.

Zaraz, jak to było... Ten stary łysy profesor coś tam o tym bredził, na tym wykładzie, podczas którego podrywałam Roberta... Każda alfamina jest też betaminą. Niektóre betaminy są deltaminami. Jeżeli lek jest betaminą lub deltaminą, to jest również alfaminą. Co prawda, nie ma leku, który jest alfaminą i betaminą, lecz nie jest deltaminą. Ale czy to wszystko oznacza, że jest lek, którego ona potrzebuje?! Joszua, Miriam!!! Dla niej nie ma ratunku!

Ona rozmyśla, czas płynie. **Twój** czas właśnie się **kończy**... Bo przecież nie ma dla ciebie ratunku, prawda?

Przyjmijmy, że to, co mamrocze pielęgniarka ***jest prawdą***. Czy istnieje lek zawierający alfaminę, betaminę oraz deltaminę?

Rozwiązania

Zadanie 1.

Dowód formuły $(\neg p \vee q) \to (p \to q)$:

1.	$\neg p \vee q$	zał.
2.	p	zał.
3.	$\neg q$	z.d.n.
4.	$negp$	OA 1,3
5.	Sprzeczność:	2,4.

Zadanie 2.

Oznaczmy:
p — Eksportujemy do Izraela.
q — Eksportujemy do Libii.
r — Eksportujemy do Czeczenii.
Wtedy podane wyżej wypowiedzi mają następujące struktury składniowe:
(1) Minister Obrony Narodowej: $(p \wedge \neg q) \to r$
(2) Szef Sztabu Generalnego: $(q \wedge r) \vee (\neg q \wedge \neg r)$
(3) Minister Finansów: $q \to p$
(4) Kapelan Wojska Polskiego: $p \vee q \vee r$.

2.1. Rozwiązanie metodą siłową.

Trzeba zbudować tabelkę o ośmiu wierszach (bo mamy trzy zmienne zdaniowe) oraz 12 kolumnach (bo tyle jest różnych formuł, których wartości trzeba policzyć. Następnie należy sprawdzić, jakiemu wartościowaniu zmiennych zdaniowych odpowiada sytuacja, gdy formuły (1)–(4) są wszystkie prawdziwe.

p	q	r	$\neg q$	$\neg r$	$p \wedge \neg q$	$q \wedge r$	$\neg q \wedge \neg r$	$(p \wedge \neg q) \to r$	$(q \wedge r) \vee (\neg q \wedge \neg r)$	$q \to p$	$p \vee q \vee r$
1	1	1	0	0	0	1	0	**1**	**1**	**1**	**1**
1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1
0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0

Z otrzymanej tabelki widać, że (1)–(4) są jednocześnie prawdziwe jedynie dla $p = 1$, $q = 1$ oraz $r = 1$. Odpowiedź: eksportujemy do wszystkich trzech wymienionych krajów.

2.2. Rozwiązanie metodą nie wprost.

Z założenia, wypowiedzi (1)–(4) są wszystkie prawdziwe. Nie można jednak z tego założenia ustalić jednoznacznie, jakie mogą być podformuły tych formuł.

Pytanie dotyczy wartości logicznej formuł p, q oraz s przy powyższym założeniu.

2.2.1. Przypuśćmy, że p jest 0. Wtedy q jest 0 (z (3)). Zatem r jest 1 (z (4)). Wstawiając do (2) otrzymane wartości q oraz r otrzymujemy: $(0 \wedge 1) \vee (\neg 0 \wedge \neg 1) = 0 \vee 0 = 0$, wbrew założeniu, iż (2) jest 1. Zatem p nie może być 0, musi być 1.

2.2.2. Przypuśćmy, że r jest 0. Wtedy $p \wedge \neg q$ musi być 0 (z (1)). Ale p jest 1, więc mamy $1 = 1 \wedge q$. Stąd q musi być 1. Wstawiając wartości q oraz r do (2) otrzymujemy: $(1 \wedge 0) \vee (\neg 1 \wedge \neg 0) = 0 \vee 0 = 0$, wbrew założeniu, że (2) jest 1. Zatem r nie może być 0, musi być 1.

2.2.3. Ponieważ r jest 1, więc mamy z (2): $1 = (q \wedge 1) \vee (\neg q \wedge 1) = (q \wedge 1) \vee (\neg q \wedge 0) = (q \wedge 1) \vee 0$. Ponieważ ta alternatywa ma być prawdziwa, więc $q \wedge 1$ musi być prawdą. Stąd q musi być prawdą.

Wykluczyliśmy zatem możliwość, że p, q oraz r są wszystkie równe 0. Stąd p, q oraz r muszą być wszystkie równe 1.

Odpowiedź brzmi: eksportujemy do wszystkich trzech wymienionych krajów. Nie wiadomo, dlaczego Brat milczał.

Zadanie 3.

(a). Dla dowolnej zmiennej zdaniowej p_i formuła $p_i \vee \neg p_i$ jest tautologią KRZ. Ponieważ jest nieskończenie wiele różnych zmiennych zdaniowych, więc jest nieskończenie wiele tautologii postaci $p_i \vee \neg p_i$.

(b). Dla każdej zmiennej zdaniowej p_i formuła $p_i \wedge \neg p_i$ jest kontrtautologią KRZ. Ponieważ jest nieskończenie wiele różnych zmiennych zdaniowych, więc jest nieskończenie wiele kontrtautologii postaci $p_i \wedge \neg p_i$.

(c). Ponieważ jest nieskończenie wiele różnych zmiennych zdaniowych $p_1, p_2, p_3, \ldots$, a każda zmienna zdaniowa może mieć wartość 0 lub 1, więc żadna z tych nieskończenie wielu zmiennych zdaniowych nie jest ani tautologią, ani kontrtautologią.

(d). Zdefiniujemy ciąg formuł A_n. Niech A_1 będzie formułą $p_1 \rightarrow p_1$. Dla $n \geqslant 1$, formuła A_{n+1} jest formułą $p_{n+1} \rightarrow A_n$. Na mocy (a) oraz semantycznego twierdzenia o podstawianiu, dla każdego $n \geqslant 1$:

- podstawienie A_n za p_n w tautologii $p_n \vee \neg p_n$ jest tautologią;
- podstawienie to zawiera n różnych zmiennych zdaniowych;
- jest nieskończenie wiele formuł będących wynikiem takich podstawień.

Można też prościej: dla wszystkich $n \geqslant 1$ formuła A_n jest tautologią i zawiera n różnych zmiennych zdaniowych. Czy widzisz, jak to uzasadnić?

Zadanie 4.

Pokażemy, że tekst wygłoszony przez doktora jest semantycznie sprzeczny. Dla przykładu, zrobimy to dwiema metodami: 1) używając drzew semantycznych oraz 2) metodą nie wprost.

W obu metodach używać będziemy tych samych oznaczeń. Znajdujemy zdania proste w tekście:

p — Pacjentka ma przerzuty nowotworowe.

q — Zaatakowana jest wątroba.

r — Pacjentka ma krew w moczu.

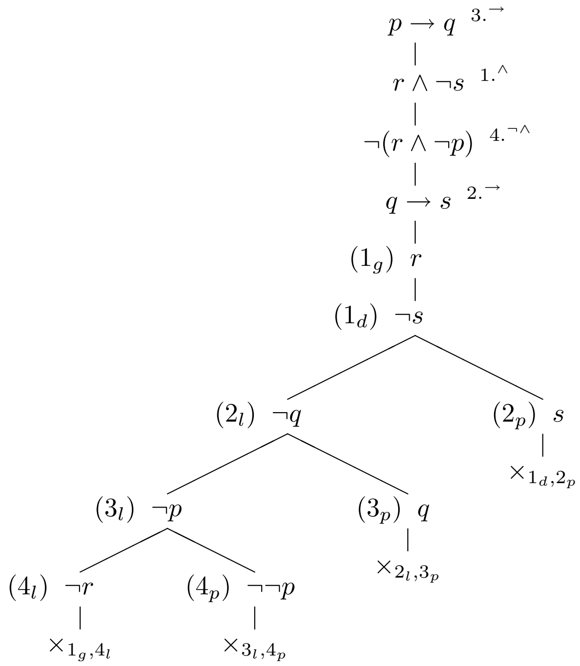
s — Pacjentka ma wysoką gorączkę.

Zdania złożone w tekście doktora mają następujące struktury składniowe:

1. $p \rightarrow q$
2. $r \wedge \neg s$
3. $\neg(r \wedge \neg p)$
4. $q \rightarrow s$.

4.1. Rozwiązanie metodą drzew semantycznych

Przypuśćmy, że formuły 1.–4. są wszystkie prawdziwe przy jakimś wartościowaniu zmiennych zdaniowych. Budujemy drzewo, w którego pniu umieszczamy te formuły:



Wszystkie gałęzie drzewa są zamknięte, a zatem nie istnieje wartościowanie zmiennych zdaniowych, przy którym wszystkie formuły 1.–4. byłyby jednocześnie prawdziwe. Zbiór tych formuł jest więc ***semantycznie sprzeczny***. Doktor miał wyraźnie zły dzień, przynajmniej jeśli chodzi o spójność jego wypowiedzi. Ponieważ wygłoszony przez niego tekst jest semantycznie sprzeczny, więc ***dowolne*** zdanie wynika zeń logicznie. ***Każda*** diagnoza postawiona na podstawie tego tekstu jest dopuszczalna: że umierasz, że symulujesz, że wyzdrowiejesz, gdy usuną Ci oba płuca, itd. Chyżo uciekaj z tego szpitala.

4.2. Rozwiązanie metodą nie wprost.

Pokażemy, że formuły 1.–4. tworzą zbiór semantycznie sprzeczny.

A. Przypuśćmy, że formuły 1.–4. są wszystkie prawdziwe przy co najmniej jednym wartościowaniu zmiennych zdaniowych.

B. Skoro $r \wedge \neg s$ jest prawdziwa, to r jest prawdziwe oraz $\neg s$ jest prawdziwa, czyli s jest fałszywa.

C. Skoro $q \to s$ jest prawdziwa i s jest fałszywa, to q jest fałszywa.

D. Skoro $p \to q$ jest prawdziwa i q jest fałszywa, to p jest fałszywa.

E. Obliczamy zatem $\neg(r \wedge \neg p)$ dla $r = 1$ oraz $p = 0$. Mamy: $\neg(1 \wedge \neg 0) = \neg(1 \wedge 1) = \neg 1 = 0$.

F. Otrzymujemy sprzeczność: wedle A. formuła $\neg(r \wedge \neg p)$ jest prawdziwa, a wedle E. jest fałszywa.

G. Musimy zatem odrzucić przypuszczenie A.

H. Tak więc, rozważany zbiór formuł jest semantycznie sprzeczny.

I. Z semantycznie sprzecznego zbioru formuł wynika logicznie ***każda*** formuła, więc konkluzja asystentki jest trafna: z tego, co powiedział doktor wynika logicznie, że jeśli usuną ci oba płucka, to wyzdrowiejesz.

Zadanie 5.

Pokażemy, że masz szansę przeżyć. Zrobimy to dwiema metodami: 1) korzystając z praw rachunku zbiorów oraz 2) używając drzew semantycznych.

5.1. Rozwiązanie z użyciem rachunku zbiorów.

Oznaczmy:

A — zbiór alfamin;

B — zbiór betamin;

D — zbiór deltamin.

Aby Cię uratować, musimy pokazać, że zbiór $A \cap B \cap C$ jest niepusty. Załóżmy, że jest prawdą to, co pielęgniarka pamięta z wykładu:

1. $A \subseteq B$, tj. $A - B = \emptyset$

2. $B \cap D \neq \emptyset$

3. $(B \cup D) \subseteq A$, tj. $(B \cup D) - A = \emptyset$

4. $(A \cap B) \cap D' = \emptyset$.

Pokażemy, że już z samych tylko założeń 2. oraz 3. wynika, że $A \cap B \cap D \neq \emptyset$. Nadto, pokażemy, że zgromadzone przez pielęgniarkę wiadomości są semantycznie niesprzeczne.

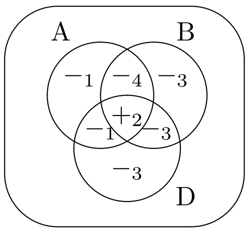
Ponieważ, na mocy 3., $B \cup D \subseteq A$, więc zarówno $B \subseteq A$, jak i $D \subseteq A$. Oznacza to, że $B \cap A = B$ oraz $D \cap A = D$. Stąd, $(B \cap A) \cap (D \cap A) = B \cap D$. Zatem $A \cap B \cap D = B \cap D$. Ponieważ, na mocy 2., $B \cap D \neq \emptyset$, więc także $A \cap B \cap D \neq \emptyset$. Jesteś uratowana.

Z 1. mamy: $A \cap B = A$. Ponieważ $A \cap B = (A \cap B \cap D) \cup (A \cap B \cap D')$, więc, na mocy 4., $A \cap B = A \cap B \cap D$. Stąd $A = A \cap B \cap D$. Wyżej pokazaliśmy, że $B \cap A = B$, a zatem mamy $A = B$ (bo $A = A \cap B = B \cap A = B$). Z 4. oraz z równości $A = A \cap B$ mamy: $A - D = \emptyset$, czyli $A \subseteq D$. Stąd i z pokazanej wyżej inkluzji $D \subseteq A$ mamy: $A = D$. Oczywiście, wtedy także $B = D$.

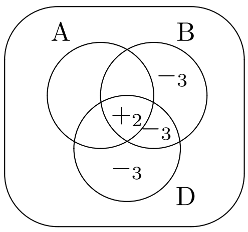
Ostatecznie zatem $A = B = D = A \cap B \cap D \neq \emptyset$. Okazuje się, że jeśli stary łysol mówił prawdę, to:

- ***jest*** dla Ciebie ratunek, bo $A \cap B \cap D \neq \emptyset$;
- nadto, ***cokolwiek*** to śliczne dziewczę w pielęgniarskim czepku Ci zaaplikuje — alfaminę, betaminę, czy też deltaminę, to tym samym jednocześnie zaaplikuje Ci ***wszystkie*** te leki, bo $A = B = D = A \cap B \cap D$.

Powyższe warunki 1.–4. są reprezentowane przez następujący diagram (w obszarze pustym stawiamy znak „$-$", w obszarze niepustym znak „$+$"):



Z diagramu tego także widać, że $A = B = D = A \cap B \cap D \neq \emptyset$. Nadto, jeśli sporządzimy taki diagram tylko dla warunków 2. oraz 3., to zobaczymy, iż obszar $A \cap B \cap D$ jest niepusty:



Z tej informacji nie wynika, że $A = B = D$, ale ta równość nie była nam potrzebna.

5.2. Rozwiązanie metodą drzew semantycznych.
Przyjmiemy oznaczenia:

Ax — x jest alfaminą;

Bx — x jest betaminą;

Dx — x jest deltaminą.

Wiadomości zapamiętane przez pielęgniarkę zapisane w języku KRP mają postać:

1. $\forall x\,(Ax \to Bx)$
2. $\exists x\,(Bx \wedge Dx)$
3. $\forall x\,((Bx \vee Dx) \to Ax)$
4. $\neg\exists x\,((Ax \wedge Bx) \wedge \neg Dx)$.

Najpierw pokażemy, że: a) z 2. oraz 3. wynika logicznie dająca Ci ratunek formuła:

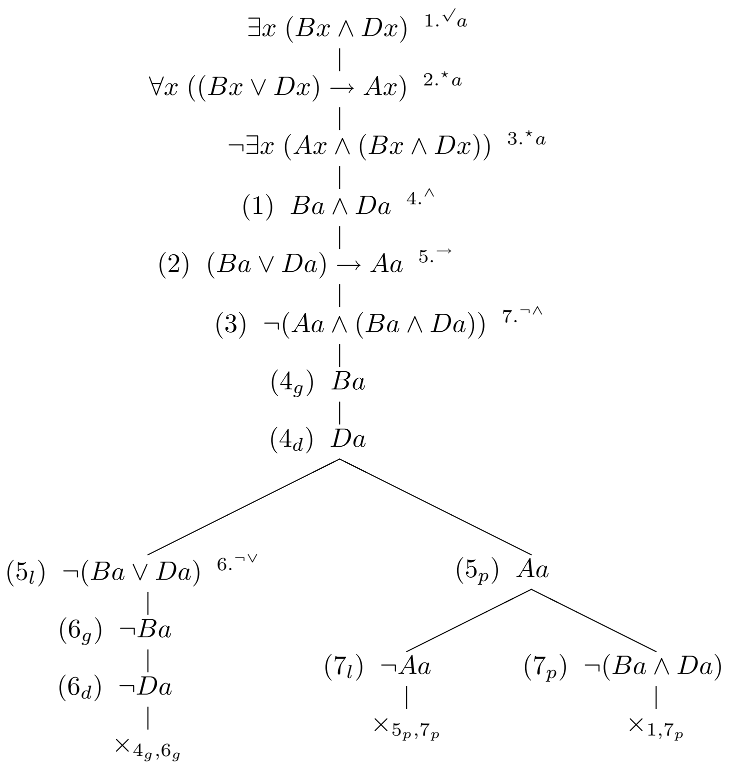
$$(**) \quad \exists x\,(Ax \wedge (Bx \wedge Dx))$$

potem zaś pokażemy, że: b) wiadomości zapamiętane przez pielęgniarkę są semantycznie niesprzeczne.

a) Jest dla ciebie ratunek!

Mamy pokazać, że z 2. oraz 3. wynika logicznie $(**)$, a więc ***wykluczyć*** istnienie interpretacji, w której 2. oraz 3. są prawdziwe, natomiast $(**)$ fałszywa.

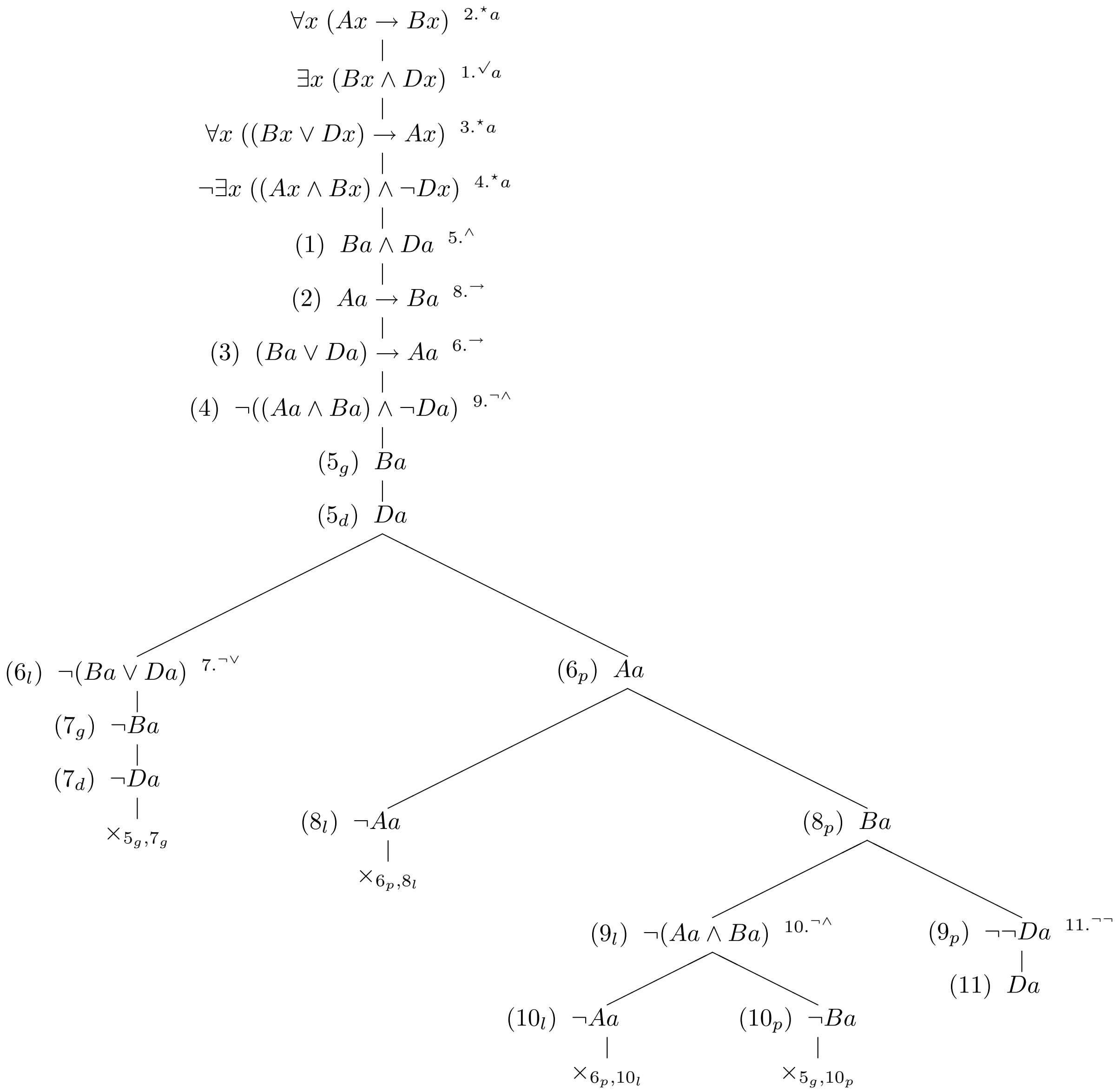
Budujemy drzewo semantyczne, w którego pniu umieszczamy formuły 2. oraz 3., a także zaprzeczenie formuły $(**)$.



Wszystkie gałęzie drzewa są zamknięte. Oznacza to, że nie istnieje interpretacja, w której prawdziwe byłyby formuły 2. oraz 3., a fałszywa byłaby formuła $(**)$. Pokazaliśmy zatem, że $(**)$ wynika logicznie z 2. oraz 3.

b) Nie ma sprzeczności w łebku pielęgniarki.

Budujemy drzewo semantyczne, w którego pniu umieszczamy formuły 1.–4. Będziemy przy tym postępować ściśle wedle reguł tworzenia drzew semantycznych: wprowadzimy nową stałą indywiduową korzystając z formuły egzystencjalnie skwantyfikowanej, potem wszystkie formuły generalnie skwantyfikowane (oraz negacje egzystencjalnie skwantyfikowanych) rozwiniemy ze względu na tę stałą, i wreszcie stosować będziemy reguły z rachunku zdań, starając się, aby postępować w sposób jak najbardziej ekonomiczny, czyli unikać, dopóki to możliwe, tworzenia w drzewie rozgałęzień i starać się zamykać (o ile to możliwe) poszczególne gałęzie jak najszybciej.



Drzewo ma jedną gałąź otwartą — jest to gałąź zakończona formułą o numerze (11) jako liściem. Zatem rozważany zbiór formuł jest ***semantycznie niesprzeczny*** (spełnialny): istnieje interpretacja, w której wszystkie te formuły są prawdziwe. Ponieważ na gałęzi otwartej drzewa znajdują się formuły atomowe: Aa, Ba oraz Da, więc w interpretacji tej jest lekarstwo, którego ***natychmiast*** potrzebujesz, tj. lek zawierający jednocześnie alfaminę, betaminę oraz deltaminę. A zatem, jeśli tylko nasza pielęgniarka zrobi szybki użytek z logiki, to przeżyjesz, młoda Humanistko.

Widzisz zatem, że egzamin będzie całkiem prosty. Do zobaczenia 8 czerwca!