AE i modele zamierzone

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl
pogon@amu.edu.pl

4 PKK, 3XII2010

Czy już teraz warto wyjść?

Czy teorie *matematyczne* ***jednoznacznie*** [strukturalnie, semantycznie] wyznaczają to, o czym mówią? Wskażemy *aksjomaty ekstremalne* sformułowane w tym celu. Rozważymy przykłady dotyczące:

- rozumienia pojęcia *liczby* [groza wielokropka];
- *ciągłości* oraz *kontinuum* [aporie nieskończonej podzielności];
- *zbiorów, kolekcji, mnogości, klas* [pułapki pozaskończoności].

- Kurt Gödel o *percepcji obiektów matematycznych*. Intuicja. Paradoksy. Porządek logiczny a porządek rozwoju poznawczego.
- Matematyka *Braci Mniejszych*. Dla kogo dostępna jest Nieskończoność? Czy religie finitarne są banalne?

Gedankenexperimente

Nie lękajmy się zapytać: czy *nasza* matematyka jest również matematyką *innych* inteligencji?

- Ameby w oceanach. Rozumne kleksy. Chmurzaki w chmurach. Jaką topologię uznają za *naturalną*? Czy potrafią pisać *bajki o bryłach sztywnych*, niedostępnych im zmysłowo?
- Systemy liczbowe o *nieprzemiennych* operacjach arytmetycznych. Komu najłatwiej rachować na *kwaternionach*?
- Czy operowanie nieskończonością *aktualną* daje korzyści ewolucyjne?
- Dlaczego od początku faworyzujemy logikę *klasyczną* (a nie np. *intuicjonistyczną* lub *wielowartościową*)?
- Zdania niezależne od aksjomatów w podstawach matematyki. Ziemianie przyjmują AC, Marsjanie AD. Czyja matematyka jest *trafna*? On wierzy w CH, ona w $\neg CH$; jak mają wychować potomstwo?

Podmiot poznający: aproksymacja logiczna

Najbardziej zgrzebna logiczna idealizacja *podmiotu poznającego* może zakładać, że dysponuje on:

- *mocą wyrażania*: językiem, regułami składni i semantyki;
- *bazą założeniową*: zespołem akceptowanych przekonań;
- *mocą dedukcyjną*: regułami uznawania wniosków z przesłanek.

Kolejno, zakładać można, że:

- posiada on jakieś moce *obliczeniowe*;
- jest zdolny nie tylko do *reprezentowania* swojego otoczenia, ale również do jego *zmian*;
- ma system *preferencji*, pozwalający *wartościować* przekonania i *działania*, a więc także formułować *cele*;
- jest *samoświadomy*, posiada możliwość refleksji nad własnymi przekonaniami.

Teorie, modele, aksjomaty ekstremalne

- Modele *izomorficzne*: nieodróżnialność budowy (struktury algebraicznej).
- Modele *elementarnie równoważne*: nieodróżnialność semantyczna (względem tego, co da się powiedzieć w teorii).
- Teorie *kategoryczne* (w mocy κ): mają wszystkie modele (mocy κ) izomorficzne.
- Teorie *zupełne*: mają wszystkie modele elementarnie równoważne.

- *Model zamierzony*: ten spośród wszystkich modeli, z myślą o którym była ona budowana (pojęcie *pragmatyczne*!).
- *Aksjomat ekstremalny*: stwierdza, że model jest pod określonym względem *minimalny* bądź *maksymalny*.

Moc wyrażania i moc dedukcyjna

Klasyczna logika pierwszego rzędu FOL ma znane („dobre") własności:

- *Pełność*: tezy pokrywają się z tautologiami.
- *Zwartość*: jeśli każdy skończony podzbiór T ma model, to T ma model.
- *Löwenheim-Skolem*: jeśli T ma model, to ma model przeliczalny.

- FOL ma nikczemnie mizerną moc wyrażania (nie definiuje np. skończoności, ciągłości; są to więc pojęcia pozaFOLogiczne).
- Logika drugiego rzędu, logiki infinitarne, logiki z uogólnionymi kwantyfikatorami mają dużą moc wyrażania, lecz z reguły „gorszą" od FOL moc dedukcyjną (zależną np. od zakładanej ontologii).

Którą logikę wybierze podmiot poznający będący *matematykiem*?

Moc i ograniczenia arytmetyki

- Aksjomatyczne systemy arytmetyki. *Arytmetyka Peana* (PA).
- *Schemat indukcji* jako aksjomat ekstremalny (minimalności). Czy sieć FOL łowi dokładnie *„prawdziwe"* liczby naturalne?
- Matematyczne reprezentacje intuicyjnego pojęcia *obliczalności*.
- Matematyczna struktura *Nieobliczalnego*.

Przy założeniu niesprzeczności PA zachodzą znane kognitywistom:

- *Twierdzenie Gödla-Rossera* (o niezupełności PA).
- *Twierdzenie Gödla* (o niedowodliwości niesprzeczności PA w PA).
- *Twierdzenie Tarskiego* (o niedefiniowalności w PA predykatu prawdy arytmetycznej).

Dowód niesprzeczności PA otrzymujemy w systemach mocniejszych od PA.

Modele arytmetyki

- *Model standardowy PA*. Reprezentacja w teorii mnogości. Modele *niestandardowe* (otrzymywane np. na mocy argumentu ze *zwartości* albo konstrukcji *ultraproduktu* lub *drzewa rozszerzeń* PA).
- PA ma *kontinuum* wzajemnie elementarnie nierównoważnych (a więc także nieizomorficznych) modeli przeliczalnych. W każdej mocy κ PA ma 2^κ nieizomorficznych modeli. Jest teorią *dziką*.
- Wszystkie przeliczalne niestandardowe modele PA mają ten sam *typ porządkowy*: $\omega + (\omega^* + \omega) \cdot \eta$.

- *Twierdzenie Tennenbauma*. Model standardowy PA jest jej jedynym modelem *rekurencyjnym*.
- Model standardowy PA jest modelem *pierwszym*. Jest jedynym *dobrze uporządkowanym* modelem PA.
- To jednak ustalenia czynione w *metajęzyku*, a nie w samej PA.

Kontinuum geometryczne

- Ujrzenie ducha burzy twój harmonijny obraz świata: szok (odkrycia? stworzenia?) *niewymierności*.
- Aporie dotyczące pojęć: *ciągłości* oraz *kontinuum*.
- *Nullum continuum ex athomis integrari*. Czy kontinuum *składa się* (jest *scalone*) z punktów czy też z nieskończonych kontinuów?

- Czy mamy jakikolwiek *dowód* na to, że czas, przestrzeń, stopnie intensywności cech mają naturę ciągłą?
- Czy *ciągłość* mogłaby być tylko kategorią *subiektywną*, projekcją umysłu, jego swobodnym wytworem (reprezentowanym przez ciągłe struktury matematyczne)?
- Mózg, umysł, program komputerowy: struktury *dyskretne*?

Liczby rzeczywiste

- Metody konstrukcji systemów liczbowych: *genetyczna* oraz *aksjomatyczna*. Ewolucja pojęcia *funkcji*. Program *arytmetyzacji* analizy matematycznej. Postacie *aksjomatu ciągłości* (aksjomatu *maksymalności* dla liczb rzeczywistych).
- *Ujęcie Dedekinda*: *przekroje zbioru liczb wymiernych odpowiadają liczbom rzeczywistym*. Wymagane teorie: liczb *wymiernych* oraz *mnogości*.
- Wielość *definicji* liczb rzeczywistych: Cantor, Dedekind, Méray, Weierstrass, Heine, Weber, Hilbert, Tarski, Hoborski, teoria ciał, Conway, ... Inne ważne ciała (liczb): *algebraicznych*, *zespolonych*, *p-adycznych*, *kwaternionów*, *oktaw Cayleya*.
- *Twierdzenie Ostrowskiego* o normach na liczbach wymiernych.
- Analiza niestandardowa: matematyczna reprezentacja wielkości nieskończenie małych.

Twierdzenia o izomorfizmie (w formie uproszczonej)

Niech: $\mathbb{R}$ = liczby rzeczywiste, $\mathbb{C}$ = liczby zespolone, $\mathbb{H}$ = kwaterniony, $\mathbb{O}$ = oktoniony (z odpowiednią strukturą zakładaną każdorazowo poniżej).

- *Twierdzenie Frobeniusa*. *Każda łączna algebra z dzieleniem nad $\mathbb{R}$ jest izomorficzna z: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ lub $\mathbb{H}$.*
- *Twierdzenie Hurwitza*. *Każda unormowana algebra z dzieleniem jest izomorficzna z: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ lub $\mathbb{O}$.*
- *Twierdzenie Ostrowskiego*. *Każde ciało zupełne względem normy archimedesowej jest izomorficzne z $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$, a norma jest równoważna ze zwykłą wartością bezwzględną.*
- *Twierdzenie Pontriagina*. *Każde spójne lokalnie zwarte ciało topologiczne jest izomorficzne z: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ lub $\mathbb{H}$.*
- *1,2,4,8–Twierdzenie (Bott, Milnor, Kervaire)*. *Każda algebra z dzieleniem nad $\mathbb{R}$ ma wymiar:* 1, 2, 4 *lub* 8.
- *Twierdzenie Hopfa*. *Każda przemienna algebra z dzieleniem nad $\mathbb{R}$ ma wymiar $\leqslant 2$.*

Systemy geometrii i ich modele

W pierwszych wydaniach *Grundlagen der Geometrie* Davida Hilberta *aksjomat zupełności* formułowany był następująco:

> *Elementy (punkty, proste, płaszczyzny) systemu geometrii tworzą system, który nie może zostać rozszerzony bez jednoczesnego naruszenia pozostałych aksjomatów, tj. nie można dodać do tego systemu punktów, prostych i płaszczyzn innego systemu przedmiotów tak, aby powstały system spełniał wszystkie pozostałe aksjomaty.*

- Aksjomat ten został później zastąpiony przez *aksjomat ciągłości*.
- System Hilberta jest *kategoryczny* (ale nie jest *elementarny*), podobnie jak system z *Podstaw geometrii* Borsuka i Szmielew.

Systemy geometrii i ich modele

- System geometrii euklidesowej (z uzupełniami Pascha i Hilberta) jest wyróżniony ze względów *historycznych*. Czy także ze względów *poznawczych*?
- System *geometrii elementarnej Tarskiego* jest zupełny i rozstrzygalny. Mamy w nim *schemat aksjomatu ciągłości*.

- Aksjomat ciągłości jest *niezależny* od pozostałych aksjomatów geometrii absolutnej: istnieje *nieciągły* jej model.
- System *geometrii absolutnej* nie jest kategoryczny, *geometria hiperboliczna Łobaczewskiego* jest kategoryczna.
- Jakie byłyby modele *zamierzone* systemów geometrii *ślepych* podmiotów poznających, pozbawionych zmysłu *dotyku*? Albo *cyklopów* nieczułych na dotyk?

Odrzucenie aksjomatów ograniczenia

- *Aksjomat ograniczenia* Fraenkla: nie ma innych zbiorów niż te, których istnienie da się udowodnić z aksjomatów teorii mnogości.
- Możliwe rozumienia (tajemniczego!) pojęcia: *rodzina wszystkich podzbiorów* danego zbioru. Hierarchia *kumulatywna* V a hierachia zbiorów *konstruowalnych* L.
- *Aksjomat konstruowalności* Gödla: wszystkie zbiory są konstruowalne.
- Konsekwencje aksjomatu konstruowalności: *aksjomat wyboru*, *uogólniona hipoteza kontinuum*, *istnienie zbiorów niemierzalnych w sensie Lebesgue'a*. Zdania sprzeczne z aksjomatem konstruowalności.

- *Krytyka* aksjomatów ograniczenia. Obrona *raju* Cantora.
- Program Gödla: poszukiwanie aksjomatów *maksymalności*.
- Zasady *odbicia*.

Modele teorii mnogości. Duże liczby kardynalne

- Początek wyprawy w pozaskończoność: pierwsza, druga, trzecia, czwarta, ... nieskończoność, liczby *nieosiągalne*, liczby *mierzalne*,...
- Rodzaje silnych *aksjomatów nieskończoności*.

- Metoda *wymuszania*. Obfitość zdań *niezależnych* od aksjomatów ZF. Tajemnice *zbioru* wszystkich liczb rzeczywistych.
- Teoria mnogości ZF dziedziczy (po PA) wyniki dotyczące *niezupełności*, *niedowodliwości niesprzeczności*, itd. Oznacza to, że ZF bardzo słabo określa pojęcia: *zbioru* oraz *relacji należenia*.
- *Czym* są modele ZF? Przy jakich założeniach *istnieją*?
- O jakich teoriach zbiorów można udowodnić ich *kategoryczność*?

Moc nowych aksjomatów: przykład

- Niech $Z_0 =$ ZF bez aksjomatów: nieskończoności i zastępowania. Jej modelem jest V_ω. Ten zbiór istnieje na mocy aksjomatu nieskończoności. Z_0 jest teorią zbiorów skończonych.
- Niech $Z_1 = Z_0+$ aksjomat nieskończoności. Jej modelem jest $V_{\omega+\omega}$. Ten zbiór istnieje na mocy aksjomatu zastępowania. W Z_1 dowodzi się, że Z_0 jest niesprzeczna.
- Niech $Z_2 = Z_1+$ aksjomat zastępowania. Jej modelem jest V_κ, gdzie κ jest liczbą nieosiągalną. W Z_2 dowodzi się, że Z_1 jest niesprzeczna.
- Niech $Z_3 = Z_2+$ „istnieje liczba nieosiągalna". W Z_3 dowodzi się, że Z_2 jest niesprzeczna.
- I tak dalej. Wzorca do formułowania jeszcze silniejszych aksjomatów dostarczają postulaty istnienia nietrywialnych włożeń elementarnych całej hierarchii kumulatywnej V w pewne klasy przechodnie M.

Zermelo: „*Matematyka jest logiką Nieskończonego*”

- Skończoność jest *patologią*.
- Umysł ma (pewien) dostęp do *Nieskończonego, Nieobliczalnego, Nierozstrzygalnego*.
- Umysł jest nawet w stanie określić *granice* tego dostępu.

Czy Giordano Bruno był kognitywistą-marzycielem?

> *„Będąc człowiekiem, nie jesteś bliższy nieskończoności, niż gdybyś był mrówką. Ale też nie jesteś dalszy, niż gdybyś był ciałem niebieskim.”*