Logika Matematyczna

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl
pogon@amu.edu.pl

Własności relacji

Wprowadzenie

O własnościach relacji dwuargumentowych powiedziano trochę na zajęciach ze **Wstępu do Matematyki** w semestrze zimowym.

W niniejszej prezentacji pokazujemy, jak wykorzystywany jest KRP do „mówienia" o relacjach.
W szczególności, wskazujemy które z własności relacji wymagają użycia predykatu identyczności.

Zaleca się samodzielne rozwiązanie zadań 180–265 ze zbioru ***Ćwiczenia z logiki*** autorstwa Pani Profesor Barbary Stanosz.

Co denotują predykaty wieloargumentowe?

Predykaty wieloargumentowe denotują ***relacje*** między przedmiotami.

Podobnie jak w przypadku własności, nie jest nam potrzebne rozważanie statusu ontologicznego relacji, wystarczy jedynie powyższa charakterystyka.

Gdy rozważamy KRP o sygnaturze Σ, która zawiera choć jeden predykat dwuargumentowy, to wkraczamy na teren **Nierozstrzygalnego**.

Nie istnieje efektywna (obliczalna) metoda ustalania, czy dowolna formuła języka KRP o sygnaturze Σ, która zawiera choć jeden predykat dwuargumentowy jest jego tautologią.

KRP jest nierozstrzygalny.

Własności formalne relacji dwuargumentowych

Mówimy, że relacja $R \subseteq U \times U$ między przedmiotami z uniwersum U jest:

- ***zwrotna***, gdy xRx dla wszystkich $x \in U$
- ***przeciwzwrotna***, gdy xRx nie zachodzi dla żadnego $x \in U$
- ***symetryczna***, gdy dla wszystkich $x, y \in U$: jeśli xRy, to yRx
- ***asymetryczna***, gdy dla wszystkich $x, y \in U$: jeśli xRy, to nie zachodzi yRx
- ***przechodnia***, gdy dla wszystkich $x, y, z \in U$: jeśli xRy oraz yRz, to xRz
- ***serialna***, gdy dla każdego $x \in U$ istnieje $y \in U$ taki, że: xRy.

Własności formalne relacji dwuargumentowych: przykłady

Niech uniwersum stanowi zbiór wszystkich liczb naturalnych. Rozważmy relacje:

- mniejszości $<$
- niewiększości $\leqslant$
- xRy wtedy i tylko wtedy, gdy x i y są względnie pierwsze
- relację $>$ większości.

Wtedy:

- Relacja $<$ jest: przeciwzwrotna, asymetryczna, przechodnia, serialna.
- Relacja $\leqslant$ jest: zwrotna, przechodnia, serialna.
- Relacja R jest: zwrotna, symetryczna, serialna.
- Relacja $>$ jest: przeciwzwrotna, asymetryczna, przechodnia.

Własności formalne relacji dwuargumentowych

Ustalenie, że dana relacja ma (bądź nie ma) pewne własności formalne umożliwia przeprowadzanie wnioskowań na temat jej zachodzenia (bądź niezachodzenia) między jakimiś przedmiotami, gdy wiemy, że zachodzi ona między pewnymi innymi przedmiotami.

Zestawy pewnych własności implikują inne (np. każda relacja przechodnia i asymetryczna jest przeciwzwrotna).
Niektóre własności wykluczają się nawzajem (np. nie ma relacji jednocześnie symetrycznych i asymetrycznych).
Zwróć uwagę, że np. symetria i asymetria nie są własnościami dopełniającymi się: istnieją relacje, które nie są ani symetryczne, ani asymetryczne.
Podane własności były jedynie przykładowe. Istnieją relacje, które nie maja żadnej z nich.

Równoważności, podobieństwa, opozycje

Mówimy, że relacja $R \subseteq U \times U$ między przedmiotami z uniwersum U jest:

- ***relacją podobieństwa*** (***tolerancji***), gdy jest ona zwrotna i symetryczna w U
- ***relacją równoważności***, gdy jest ona zwrotna, symetryczna i przechodnia w U
- ***relacją opozycji***, gdy jest ona przeciwzwrotna i symetryczna w U.

- Równoważności to relacje zachodzące między przedmiotami nieodróżnialnymi (ze względu na ustalony zestaw cech).
- Podobieństwa to relacje zachodzące między przedmiotami posiadającymi co najmniej jedną wspólną cechę (z ustalonego zestawu cech).
- Opozycje to relacje zachodzące między przedmiotami różniącymi się co najmniej jedną cechą (z ustalonego zestawu cech).

Równoważności, podziały, klasyfikacje

Niech R będzie równoważnością w zbiorze U. ***Klasą równoważności*** (względem relacji R) przedmiotu $x \in U$ nazywamy zbiór: $[x]_R = \{y \in U \ : \ xRy\}$.
Rodzinę $U/R = \{[x]_R \ : \ x \in U\}$ nazywamy ***podziałem U wyznaczonym przez R***.

Podziałem uniwersum U nazywamy każdą rodzinę niepustych, parami rozłącznych podzbiorów U, której suma równa jest U. Tak więc, $\mathcal{A}$ jest podziałem U, gdy:

- $\forall A \in \mathcal{A} \ \ A \subseteq U$
- $\forall A \in \mathcal{A} \ \ A \neq \emptyset$
- $\forall A, B \in \mathcal{A} \ \ (A \neq B \rightarrow A \cap B = \emptyset)$
- $\bigcup \mathcal{A} = U$.

Równoważności, podziały, klasyfikacje

Jest wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między podziałami U a relacjami równoważności określonymi na U:

- Jeśli R jest relacją równoważności na U, to U/R jest podziałem U.
- Jeśli $\mathcal{A}$ jest podziałem U, to równoważnością jest relacja $R_{\mathcal{A}} \subseteq U^2$ zdefiniowana dla dowolnych $x, y \in U$ warunkiem:
  $xR_{\mathcal{A}}y \quad \equiv \quad \exists A \in \mathcal{A} \;\; x, y \in A$.

Skrzyżowaniem podziałów $\mathcal{A}$ oraz $\mathcal{B}$ zbioru U nazywamy rodzinę:

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \{A \cap B \;:\; A \in \mathcal{A} \wedge B \in \mathcal{B}\}.$$

Mówimy, że podziały $\mathcal{A}$ oraz $\mathcal{B}$ są ***niezależne***, gdy $\emptyset \notin \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, czyli gdy ich skrzyżowanie nie ma jako elementu zbioru pustego.
Operację krzyżowania podziałów można iterować, otrzymując w ten sposób ***klasyfikacje wielopoziomowe***.

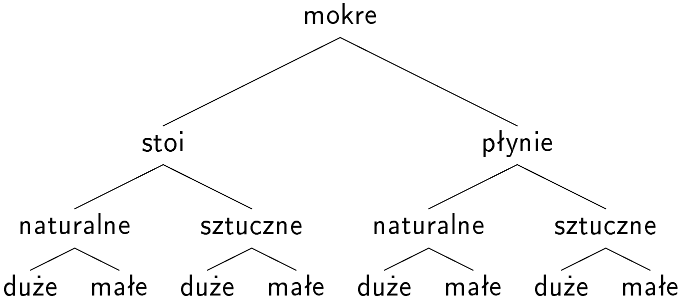
Równoważności, podziały, klasyfikacje

	fließend	stehend	natürlich	künst-lich	groß	klein
Fluß	+		+		+	
Bach	+		+			+
Kanal	+			+	+	
Graben	+			+		+
See		+	+		+	
Tümpel		+	+			+
Teich		+		+	+	
Becken		+		+		+

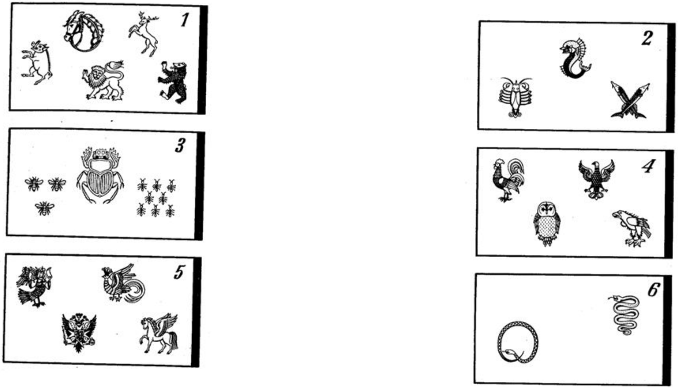
W tej tabeli podane są trzy podziały pewnych mokrych obiektów. Jakie są relacje równoważności, które wyznaczają te podziały?

Równoważności, podziały, klasyfikacje

Te trzy podziały reprezentować można też poprzez drzewo:



Równoważności, podziały, klasyfikacje



Przykład podziału (klasyfikacji) pewnego zbioru Stworzeń. Czy widzisz, jaka relacja równoważności odpowiada temu podziałowi?

Równoważności, podziały, klasyfikacje

Uwaga. Zachęcam do wykonania kilku ćwiczeń ze *Zbioru zadań z językoznawstwa* (Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1990; jeden egzemplarz tej książki dostępny był w Bibliotece IJ UAM). W ćwiczeniach tych dokonuje się m.in.: klasyfikacji oraz szeregowania danych językowych. Stawia się hipotezy na temat przekładu, wykorzystując zasadę, iż regularnościom w ***sposobach wyrażania*** znaczeń odpowiadają ***relacje semantyczne***. Zob. np. zadania:

- 140. Tłumaczenie z arabskiego. [Klasyfikowanie]
- 68. Tłumaczenie z sanskrytu. [Klasyfikowanie]
- 139. Tłumaczenie z lapońskiego. [Klasyfikowanie + znajdowanie podobieństw znaczeniowych]
- 66. Tłumaczenie z azerbejdżańskiego. [Szeregowanie]
- 91. Tłumaczenie z indonezyjskiego. [Znajdowanie izomorfizmu].

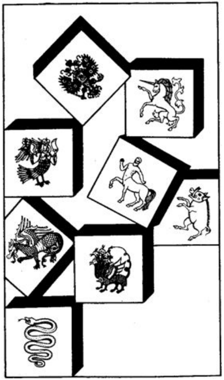
Podobieństwa i opozycje

Zarówno podobieństwa, jak i opozycje można reprezentować przez systemy postaci $\langle O, F, \phi \rangle$, gdzie:

- O jest zbiorem obiektów;
- F jest zbiorem cech;
- relacja $\phi \subseteq O \times F$ zachodzi między obiektem $x \in O$ a cechą $f \in F$ gdy x ma cechę f.

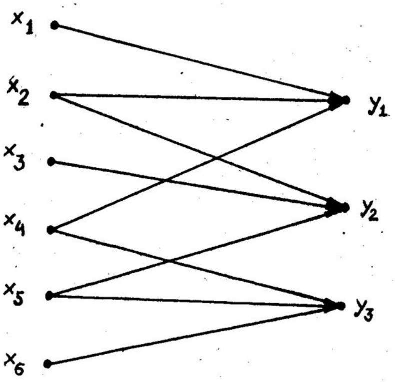
Rodzinę $\mathcal{A}$ niepustych podzbiorów U nazywamy ***pokryciem*** U, gdy jej suma równa jest U: $\bigcup \mathcal{A} = U$.

Podobieństwa i opozycje



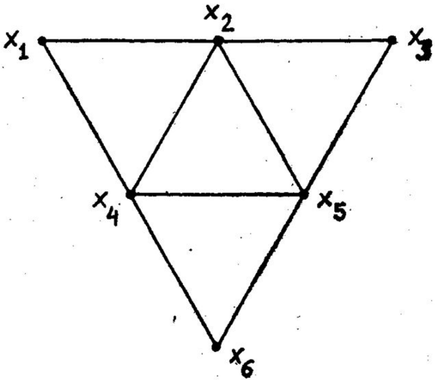
Szukaj podobieństw między obiektami w każdym z obu powyższych przypadków.

Podobieństwa i opozycje



Przykład przypisania obiektom cech.

Podobieństwa i opozycje



To graf relacji podobieństwa wyznaczonej przez przypisanie obiektom cech (z poprzedniego slajdu).

Podobieństwa i opozycje

Niech R będzie relacją podobieństwa na U. Mówimy, że:

- $A \subseteq U$ jest R-***preklasą***, gdy $\forall x, y \in A \; xRy$.
- $A \subseteq U$ jest R-***klasą***, gdy A jest maksymalną (względem inkluzji) preklasą.
- $A \subseteq U$ jest zbiorem R-***rozproszonym***, gdy $\forall x, y \in A \, (x \neq y \rightarrow \neg xRy)$.
- $A \subseteq U$ jest zbiorem R-***pochłaniającym***, gdy $\forall x \in U \exists y \in A \; yRx$.
- Relację R^+ zdefiniowaną warunkiem: $xR^+y \equiv \forall z \in U \, (xRz \equiv yRz)$ nazywamy relacją ***stowarzyszoną*** z R. Jest ona równoważnością na U. Jej klasy równoważności nazywamy R-***jądrami***.
- Przechodnie domknięcie relacji podobieństwa R (czyli najmniejszą, względem inkluzji, relację przechodnią zawierającą R) oznaczamy przez R^{tr}. To także jest relacja równoważności.

Podobieństwa i opozycje

Niech $U//R$ oznacza rodzinę wszystkich R-klas. Rodzinę klas $U//R$ relacji podobieństwa R na U nazywa się czasami ***typologią*** obiektów z U.

Jest wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między pokryciami U a relacjami podobieństwa określonymi na U:

- Jeśli R jest relacją podobieństwa na U, to $U//R$ jest pokryciem U.
- Jeśli $\mathcal{A}$ jest pokryciem U, to podobieństwem jest relacja $R_{\mathcal{A}} \subseteq U^2$ zdefiniowana dla dowolnych $x, y \in U$ warunkiem: $xR_{\mathcal{A}}y \equiv \exists A \in \mathcal{A}\ x, y \in A$.

Każdą minimalną (względem inkluzji) rodzinę $\mathcal{B} \subseteq U//R$ taką, że dla dowolnych $x, y \in U$ zachodzi $xRy \equiv \exists A \in \mathcal{B}\ x, y \in A$ nazywamy R-***bazą***.

Podobieństwa i opozycje

$X=\{a,b,c\}$

$\mathscr{A}=\{\{a,b\},\{b,c\},\{a,c\}\}$

$H_{\tau_{\mathscr{A}}}=\{\{a,b,c\}\}$

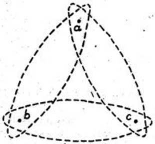


Fig. 7.

$X=\{x_1,\dots,x_6\}$

$\mathscr{A}=\{\{x_1,x_2,x_4\},\{x_2,x_3,x_5\},\{x_4,x_5,x_6\}\}$

$H_{\tau_{\mathscr{A}}}=\mathscr{A}\cup\{\{x_2,x_4,x_5\}\}$

Observe that (X,τ_A) is the space from 1.11.

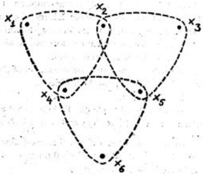


Fig. 8.

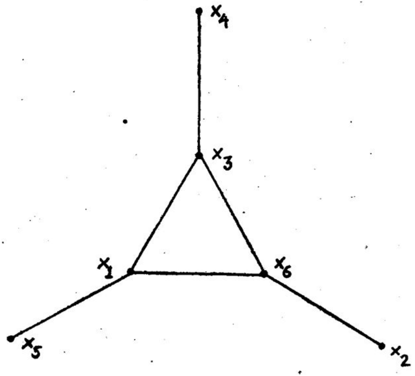
Pokrycia a relacje podobieństwa. Znajdź bazę.

Podobieństwa i opozycje

Kilka faktów o relacjach podobieństwa:

- Dla każdej relacji podobieństwa R istnieje R-baza.
- Dla każdej relacji podobieństwa R: $R^+ \subseteq R \subseteq R^{tr}$.
- Zbiory, które są jednocześnie maksymalnymi zbiorami R-rozproszonymi i minimalnymi zbiorami R-pochłaniającymi są najbardziej „ekonomicznymi opisami” relacji R.

Podobieństwa i opozycje



Znajdź zbiory, które są jednocześnie minimalnymi zbiorami pochłaniającymi i maksymalnymi zbiorami rozproszonymi.

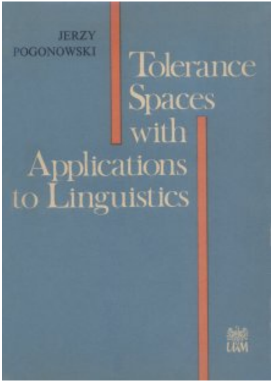
Podobieństwa i opozycje

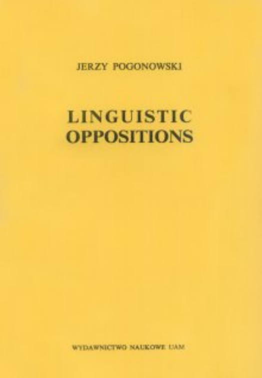
Własności formalne relacji opozycji bada się podobnie, jak własności relacji podobieństwa. Nie będziemy się tu nad tym rozwodzić. Wymienimy jedynie kilka ważnych rodzajów relacji opozycji, spotykanych w badaniach języków etnicznych:

- kontekstowe (np. oparte na dystrybycji);
- parametryczne (np. bazujące na wymiarach semicznych);
- opozycje typu nieporównywalności (np. hiponimiczne).

Podobieństwa i opozycje

O matematycznej teorii relacji podobieństwa oraz opozycji, a także jej zastosowaniach poczytać możesz np. w:





Operacje na relacjach dwuargumentowych

Jeśli $R \subseteq X \times Y$ oraz $S \subseteq Y \times Z$ są relacjami, to ***złożeniem*** relacji R i S jest relacja $R \circ S \subseteq X \times Z$ zdefiniowana warunkiem: $xR \circ Sz$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $y \in Y$ taki, że xRy oraz ySz. Jeśli $R \subseteq X \times X$, to $R \circ R$ oznaczamy też przez R^2.

Jeśli $R \subseteq X \times Y$ jest relacją, to przez ***konwers*** (***relację odwrotną***) relacji R rozumiemy relację R^{-1} zdefiniowaną następująco:
$xR^{-1}y$ wtedy i tylko wtedy, gdy yRx.

Ponieważ relacje są zbiorami, można na nich dokonywać wszystkich operacji, których dokonujemy na zbiorach: sumy, iloczynu, dopełnienia, itd.

Operacje na relacjach dwuargumentowych: przykłady

Niech xRy zachodzi, gdy x jest ojcem y. Wtedy $R \circ R$ jest relacją „być dziadkiem (po mieczu)": $xR \circ y$ wtedy i tylko wtedy, gdy x jest dziadkiem (po mieczu) y.
Niech xRy zachodzi, gdy x jest bratem y, a xQy zachodzi, gdy x jest ojcem y. Wtedy $xR \circ Qy$ zachodzi, gdy x jest stryjem y.

Konwersem relacji mniejszości $<$ jest relacja większości $>$.
Konwersem relacji R zdefiniowanej przez warunek: xRy wtedy i tylko wtedy, gdy x i y są liczbami względnie pierwszymi, jest relacja R.

Dopełnieniem relacji $<$ jest relacja $\geqslant$ (która jest też sumą relacji $<$ i $=$).
Iloczynem relacji $\leqslant$ i $\geqslant$ jest relacja $=$.

Operacje na relacjach dwuargumentowych

Oto niektóre własności operacji na relacjach:

- Operacja złożenia relacji jest łączna, tj.: $R_1 \circ (R_2 \circ R_3) = (R_1 \circ R_2) \circ R_3$. Operacja złożenia nie jest przemienna, tj. nie dla wszystkich relacji R_1 i R_2 zachodzi: $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$.
- $(R^{-1})^{-1} = R$.
- $-R^{-1} = (-R)^{-1}$.
- Jeśli $R_1 \subseteq R_2$, to $R \circ R_1 \subseteq R \circ R_2$ oraz $R_1 \circ R \subseteq R_2 \circ R$ dla dowolnych relacji R, R_1 i R_2.
- $(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$
- $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.

Operacje na relacjach dwuargumentowych

Udowodnimy, dla przykładu, że: $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.

Następujące warunki są równoważne, dla dowolnych relacji R oraz S oraz dowolnych x i y:

- $x(R \circ S)^{-1}y$
- $y(R \circ S)x$
- $\exists z\ (yRz \wedge zSx)$
- $\exists z\ (zSx \wedge yRz)$
- $\exists z\ (xS^{-1}z \wedge RS^{-1}y)$
- $x(S^{-1} \circ R^{-1})y$.

Otrzymujemy stąd zatem: $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.

Operacje na relacjach dwuargumentowych

Oto niektóre związki miedzy własnościami relacji a operacjami na nich:

- Relacja R jest symetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy $R = R^{-1}$.
- Relacja R jest przechodnia wtedy i tylko wtedy, gdy $R \circ R \subseteq R$.
- Jeśli relacje R i S są zwrotne, to relacja $R \circ S$ też jest zwrotna.
- Jeśli relacje R_1 i R_2 są symetryczne, to symetryczne są też relacje: $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, R_1^{-1}, $R_1 \circ R_1^{-1}$.
- Suma $R_1 \cup R_2$ równoważności R_1 i R_2 jest równoważnością wtedy i tylko wtedy, gdy $R_1 \cup R_2 = R_1 \circ R_2$.
- Złożenie $R_1 \circ R_2$ równoważności R_1 i R_2 jest równoważnością wtedy i tylko wtedy, gdy $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$.

Operacje na relacjach dwuargumentowych

Udowodnimy, dla przykładu, że: złożenie $R_1 \circ R_2$ równoważności R_1 i R_2 jest równoważnością wtedy i tylko wtedy, gdy $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$.

Najpierw pokazujemy, że jeśli $R_1 \circ R_2$ jest równoważnością, to $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$.

Jeśli $R_1 \circ R_2$ jest równoważnością, to zachodzą następujące równości:

$$R_1 \circ R_2 = (R_1 \circ R_2)^{-1} = R_2^{-1} \circ R_1^{-1} = R_2 \circ R_1.$$

Operacje na relacjach dwuargumentowych

Niech $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$. Pokażemy, że $R_1 \circ R_2$ jest równoważnością. Po pierwsze, mamy:

$$(R_1 \circ R_2)^{-1} = (R_2 \circ R_1)^{-1} = R_1^{-1} \circ R_2^{-1} = R_1 \circ R_2,$$

tj. $R_1 \circ R_2$ jest symetryczna.

Po drugie, mamy:

$$(R_1 \circ R_2) \circ (R_1 \circ R_2) = R_1 \circ (R_2 \circ R_1) \circ R_2 = R_1 \circ (R_1 \circ R_2) \circ R_2 = (R_1 \circ R_1) \circ (R_2 \circ R_2) \subseteq R_1 \circ R_2,$$

tj. $R_1 \circ R_2$ jest przechodnia.

Zwrotność $R_1 \circ R_2$ jest oczywista, ponieważ R_1 oraz R_2 są zwrotne z założenia.

Relacja identyczności

Identyczność jest relacją równoważności, czyli jest zwrotna, symetryczna oraz przechodnia. Nadto, przedmioty identyczne są nieodróżnialne, ani przez żadną własność, ani poprzez pozostawanie w zależnościach z innymi przedmiotami.

Zauważmy, że bez relacji identyczności praktycznie niewyobrażalne jest uprawianie większości dyscyplin matematycznych — współczesne rozumienie pojęcia ***funkcji***, jednego z najistotniejszych pojęć matematycznych, wykorzystuje relację identyczności.

Predykat identyczności

Dla ***predykatu*** identyczności tradycyjnie używanym symbolem jest $=$ i tradycja ta zostanie tu uszanowana. To, że ***relację*** identyczności oznaczamy tym samym symbolem, nie powinno prowadzić do nieporozumień — z kontekstu zawsze będzie jasno wynikać, czy odnosimy się do predykatu (język), czy do relacji (odniesienie przedmiotowe języka, interpretacje).

Tak więc, identyczność termów t_1 oraz t_2 zapisywać będziemy formułą: $t_1 = t_2$. Formułę $\neg t_1 = t_2$ będziemy (także zgodnie z tradycją), zapisywać też czasem w postaci $t_1 \neq t_2$.

Predykat identyczności

O predykacie identyczności zakłada się następujące aksjomaty:

- (1) $\forall x\,(x = x)$
- (2) $\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n\,((x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n) \rightarrow (F(x_1, \ldots, x_n) = F(y_1, \ldots, y_n)))$
- (3) $\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n\,((x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n) \rightarrow (P(x_1, \ldots, x_n) \equiv Q(y_1, \ldots, y_n)))$.

dla wszystkich n-argumentowych symboli funkcyjnych F oraz wszystkich predykatów n-argumentowych P, Q, dla wszystkich n.

Zwrotność predykatu identyczności wyraża warunek (1). Własności: symetryczności oraz przechodniości predykatu identyczności, czyli:

- $\forall x \forall y\,(x = y \rightarrow y = x)$
- $\forall x \forall y \forall z\,((x = y \wedge y = z) \rightarrow x = z)$

są konsekwencją powyższych aksjomatów.

Antysymetria i spójność

Mówimy, że relacja $R \subseteq U \times U$ jest:

- ***spójna***, gdy dla każdego $x \in U$ istnieje $y \in U$ taki, że $x \neq y$ oraz: xRy lub yRx
- ***antysymetryczna***, gdy dla wszystkich $x, y \in U$: jeśli $x \neq y$, to xRy lub yRx.

Przykłady. Relacja $\leqslant$ jest spójna oraz antysymetryczna w zbiorze wszystkich liczb całkowitych. Relacja inkluzji w rodzinie podzbiorów dowolnego zbioru jest w tej rodzinie antysymetryczna. Relacja R zdefiniowana w zbiorze generałów Wojska Polskiego warunkiem: xRy wtedy i tylko wtedy, gdy x ma nie więcej orderów niż y nie jest w tym zbiorze antysymetryczna, o ile istnieją różni generałowie o tej samej liczbie orderów.

Kwantyfikatory numeryczne

Kwantyfikator egzystencjalny pozwala wyrazić pojęcie „co najmniej jeden". Pojęcia „istnieje co najwyżej jeden", „istnieją dokładnie dwa", itp. wymagają w swoim sformułowaniu użycia, oprócz kwantyfikatorów, także predykatu identyczności. Oto kilka takich kwantyfikatorów ***numerycznych*** (P jest tu dowolnym predykatem):

- $\exists x\, P(x)$ (istnieje co najmniej jeden przedmiot o własności P)
- $\exists x \exists y\, ((P(x) \wedge P(y)) \wedge x \neq y)$ (istnieją co najmniej dwa przedmioty o własności P)
- $\exists x \exists y \exists z\, (((P(x) \wedge P(y)) \wedge P(z)) \wedge ((x \neq y \wedge y \neq z) \wedge x \neq z))$ (istnieją co najmniej trzy przedmioty o własności P)

Z powyższego powinno być jasne, jak zapisać „istnieje co najmniej n przedmiotów o własności P".

Kwantyfikatory numeryczne

Wyrażenie: „Istnieje co najwyżej n przedmiotów o własności P" jest równoważne wyrażeniu: „Nieprawda, że istnieje co najmniej $n+1$ przedmiotów o własności P".

Wyrażenie: „Istnieje dokładnie n przedmiotów o własności P" jest równoważne koniunkcji wyrażeń:

- „Istnieje co najmniej n przedmiotów o własności P".
- „Istnieje co najwyżej n przedmiotów o własności P".

Ćwiczenie. Zapisz w języku KRP formułę stwierdzającą, że istnieją dokładnie trzy przedmioty posiadające własność P.

Porządki

Uwaga. Poszczególne podręczniki różnią się terminologią dotyczącą relacji porządkujących.

Mówimy, że relacja $R \subseteq U \times U$ jest:

- ***preporządkiem***, gdy jest ona zwrotna i przechodnia w U
- ***częściowym porządkiem***, gdy jest ona zwrotna, przechodnia i antysymetryczna w U
- ***liniowym porządkiem***, gdy jest ona spójnym częściowym porządkiem w U
- ***ostrym częściowym porządkiem***, gdy jest ona asymetryczna i przechodnia w U
- ***ostrym liniowym porządkiem***, gdy jest ona spójnym ostrym częściowym porządkiem w U.

Porządki

Przykłady.

- Inkluzja $\subseteq$ jest porządkiem częściowym.
- Inkluzja właściwa $\subset$ jest ostrym porządkiem częściowym.
- Relacja mniejszości $<$ jest ostrym porządkiem liniowym.
- Relacja niewiększości $\leqslant$ jest porządkiem liniowym.
- Relacja R określona (dla liczb naturalnych dodatnich) warunkiem: xRy wtedy i tylko wtedy, gdy x dzieli bez reszty y jest porządkiem częściowym.

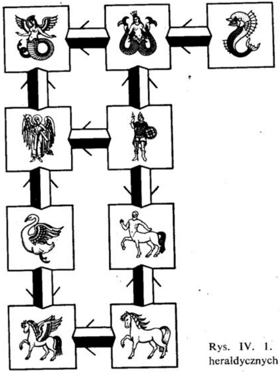
Porządki

Niech R będzie częściowym porządkiem na U. Element $x \in U$ nazywamy:

- R-***minimalnym***, gdy $\forall y \in U \ (yRx \rightarrow x = y)$
- R-***maksymalnym***, gdy $\forall y \in U \ (xRy \rightarrow x = y)$
- R-***najmniejszym***, gdy $\forall y \in U \ xRy$
- R-***największym***, gdy $\forall y \in U \ yRx$.

Uwaga: element R-najmniejszy (resp. R-największy), o ile istnieje, jest też elementem R-minimalnym (resp. R-maksymalnym), lecz niekoniecznie na odwrót.

Porządki



Rys. IV. 1. Uporządkowanie symboli heraldycznych

Znajdź elementy: minimalne, maksymalne oraz (jeśli istnieją) największy oraz najmniejszy.

Porządki

Gdy xRy oraz nie istnieje $z \in U$ taki, że $x \neq z$, $y \neq z$, xRz i zRy, to mówimy, że x jest **bezpośrednim R-poprzednikiem y** (a y **bezpośrednim R-następnikiem x**).

Mówimy, że liniowy porządek R jest:

- ***dyskretny***, gdy każdy element U ma bezpośredni R-poprzednik oraz R-następnik.
- ***gęsty***, gdy $\exists x, y \in U\ (xRy) \wedge \forall x, y \in U\ (xRy \rightarrow \exists z \in U\ (x \neq z \wedge z \neq y \wedge xRz \wedge zRy))$.

Uwaga. Żaden porządek (na zbiorze niepustym) nie może być jednocześnie dyskretny i gęsty, ale są porządki, które nie są ani dyskretne, ani gęste.

Porządki

Przykłady.

- Zbiór wszystkich liczb całkowitych (i każdy jego podzbiór) jest uporządkowany w sposób dyskretny przez relację mniejszości $<$.
- Zbiór wszystkich liczb wymiernych jest przez relację mniejszości $<$ uporządkowany w sposób gęsty.
- Zbiór wszystkich liczb rzeczywistych także jest uporządkowany w sposób gęsty przez relację mniejszości $<$. Ale liczb rzeczywistych jest ***istotnie więcej*** niż liczb wymiernych. Relacja mniejszości porządkuje wszystkie liczby rzeczywiste w tzw. sposób ***ciągły***.

Porządki

Liniowy porządek R nazywamy ***dobrym*** porządkiem na U, jeśli każdy niepusty podzbiór U ma element R-najmniejszy.

- Zbiór wszystkich liczb naturalnych jest uporządkowany liniowo przez relację $\leqslant$. Relacja ta jest na tym zbiorze także dobrym porządkiem.
- Zbiór wszystkich liczb całkowitych jest liniowo uporządkowany przez relację $\leqslant$. Uporządkowanie to nie jest dobrym porządkiem na tym zbiorze.

Uwaga. Termin ***dobry*** nie ma tu charakteru ocennego.

Porządki

Niech R będzie częściowym porządkiem zbioru U i niech $A \subseteq U$. Mówimy, że element $u \in U$ jest:

- ***ograniczeniem dolnym*** zbioru A, gdy uRx dla wszystkich $x \in A$
- ***ograniczeniem górnym*** zbioru A, gdy xRu dla wszystkich $x \in A$
- ***kresem dolnym*** zbioru A, gdy u jest R-największym z ograniczeń dolnych zbioru A
- ***kresem górnym*** zbioru A, gdy u jest R-najmniejszym z ograniczeń górnych zbioru A.

Porządki

Przykłady.

- Iloczyn $A \cap B$ jest kresem dolnym zbioru $\{A, B\}$ w rodzinie wszystkich podzbiorów ustalonego zbioru U uporządkowanej częściowo przez relację inkluzji.
- Suma $A \cup B$ jest kresem górnym zbioru $\{A, B\}$ w rodzinie wszystkich podzbiorów ustalonego zbioru U uporządkowanej częściowo przez relację inkluzji.
- Niech A będzie zbiorem wszystkich liczb wymiernych x takich, że $x^2 < 2$. Wtedy liczba rzeczywista $\sqrt{2}$ jest kresem górnym zbioru A.
- Niech A będzie zbiorem wszystkich liczb wymiernych x takich, że $x^2 > 2$. Wtedy liczba rzeczywista $\sqrt{2}$ jest kresem dolnym zbioru A.