LOGIKA MATEMATYCZNA (3) – 16X2013

I rok Językoznawstwa i Nauk o Informacji UAM

1 Funkcje prawdziwościowe

arg	1	2	3	4
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

arg_1	arg_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Odróżniaj: spójnik/funktor prawdziwościowy (symbol) – funkcja prawdziwościowa (denotacja)!
Przypomnij sobie z lektury: wartościowanie zmiennych zdaniowych (wzz), wartość logiczna formuły przy danym wzz.
Algebra języka KRZ: $\mathfrak{F} = \langle F_{KRZ}, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \equiv \rangle$. Matryca logiczna dla KRZ: $\mathfrak{B}_2 = \langle \{0,1\}, Ng, Kn, Al, Im, Rw, \{1\} \rangle$.

2 Reguły niezawodne

Zbiór formuł Y *wynika logicznie w KRZ* ze zbioru formuł X (symbolicznie: $X \models_{krz} Y$) dokładnie wtedy, gdy dla wszystkich wzz w: jeśli $Val(\alpha, w) = 1$ dla wszystkich $\alpha \in X$, to $Val(\alpha, w) = 1$ dla wszystkich $\alpha \in Y$. Zamiast $X \models_{krz} \{\beta\}$ piszemy $X \models_{krz} \beta$. Tak więc, $X \models_{krz} \beta$ dokładnie wtedy, gdy dla wszystkich wzz w: jeśli $Val(\alpha, w) = 1$ dla wszystkich $\alpha \in X$, to $Val(\beta, w) = 1$. *Tautologie (prawa) KRZ* to dokładnie te formuły, które wynikają logicznie ze zbioru pustego $\emptyset$. Zbiór formuł X jest *semantycznie niesprzeczny*, gdy istnieje wzz w takie, że $Val(\alpha, w) = 1$ dla wszystkich $\alpha \in X$. Mówimy, że X jest *semantycznie sprzeczny*, gdy X nie jest semantycznie niesprzeczny.
Regułą (wnioskowania) nazywamy dowolną relację $R \subseteq \wp(F_{KRZ}) \times F_{KRZ}$, której poprzedniki są skończonymi zbiorami formuł. Każdą parę $(X, \alpha) \in R$ nazywamy *sekwentem* reguły R, złożonym ze zbioru *przesłanek* X oraz *wniosku* α.
Reguła R jest *niezawodna*, gdy dla każdego $(X, \alpha) \in R$ zachodzi: $X \models_{krz} \alpha$, czyli gdy wniosek każdego jej sekwentu wynika logicznie w KRZ ze zbioru przesłanek tego sekwentu. Reguła jest *zawodna*, gdy nie jest niezawodna.

3 Semantyczne twierdzenia o dedukcji

Twierdzenie o dedukcji wprost (wersja semantyczna). Dla dowolnych $X \subseteq F_{KRZ}$, $\alpha \in F_{KRZ}$, $\beta \in F_{KRZ}$ zachodzą następujące implikacje:
1) Jeśli $X \cup \{\alpha\} \models_{krz} \beta$, to $X \models_{krz} \alpha \rightarrow \beta$.
2) Jeśli $X \models_{krz} \alpha \rightarrow \beta$, to $X \cup \{\alpha\} \models_{krz} \beta$.
Twierdzenie o dedukcji nie wprost (wersja semantyczna). Dla dowolnych $X \subseteq F_{KRZ}$, $\alpha \in F_{KRZ}$, $\beta \in F_{KRZ}$ zachodzą następujące równoważności:
1) $X \cup \{\alpha\} \models_{krz} \{\beta, \neg\beta\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X \models_{krz} \neg\alpha$.
2) $X \cup \{\neg\alpha\} \models_{krz} \{\beta, \neg\beta\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X \models_{krz} \alpha$.

4 Zadanie domowe

1. Przeczytaj slajdy 18–34 z prezentacji *Semantyka KRZ.*
2. Rozwiąż (w kajecie) zadania: 7, 8, 11, 23, 24 z *Ćwiczeń z logiki.*
3. Pisemnie (termin – 30x2013, godz. 15:20). Rzuć trzykrotnie monetą, zapisz ciąg wyników (O=orzeł, R=reszka). Udowodnij, że: podana niżej reguła zakodowana tym ciągiem jest niezawodna oraz że niezawodna jest reguła zakodowana ciągiem dualnym (O zamiast R, R zamiast O).

(OOO)	$(\{\alpha \rightarrow \beta, \alpha\}, \beta)$	(ROO)	$(\{\alpha \vee \beta, \neg\alpha\}, \beta)$
(OOR)	$(\{\alpha \rightarrow \beta, \neg\beta\}, \neg\alpha)$	(ROR)	$(\{\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \alpha\}, \alpha \equiv \beta)$
(ORO)	$(\{\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \gamma\}, \alpha \rightarrow \gamma)$	(RRO)	$(\{\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)\}, (\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma)$
(ORR)	$(\{\alpha, \neg\alpha\}, \beta)$	(RRR)	$(\{(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma\}, \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma))$

JERZY POGONOWSKI Zakład Logiki Stosowanej UAM www.logic.amu.edu.pl pogon@amu.edu.pl