Matematyczne podstawy kognitywistyki

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
pogon@amu.edu.pl

Struktury porządkowe

Uporządkowania

Na wykładzie poświęconym relacjom powiedzieliśmy parę słów o ważnym typie relacji, a mianowicie *relacjach równoważności* (zwrotnych, symetrycznych i przechodnich). Wiążą się one, jak już wiemy, z *nieodróżnialnością* obiektów (ze względu na ustalony zbiór cech).
Gdy dokonujemy *kategoryzacji* przedmiotów, gdy grupujemy przedmioty nieodróżnialne pod ustalonymi względami w ich *typy* – wtedy korzystamy właśnie ze stosownych relacji równoważności.

Obok kategoryzowania inną ważną czynnością poznawczą jest ustalanie poprzedzania jednych obiektów przez inne względem jakiejś zależności. Może ono dawać w wyniku *uszeregowanie* badanych obiektów, albo jakąś ich *hierarchię*.
Relacje, które reprezentują tego typu sytuacje to różnego rodzaju relacje *porządkujące*. Słuchacze znają już proste przykłady takich relacji: mniejszość w zbiorze liczb, inkluzja zbiorów.

Porządki częściowe

Mówimy, że relacja R jest relacją *częściowego porządku* w zbiorze X, gdy jest ona w tym zbiorze zwrotna, przechodnia oraz antysymetryczna, czyli gdy spełnione są następujące warunki:

1. *Zwrotność*: dla dowolnego $x \in X$ zachodzi xRx.
2. *Przechodniość*: dla dowolnych $x \in X$, $y \in X$ oraz $z \in X$, jeśli xRy oraz yRz, to xRz.
3. *Antysymetria*: dla dowolnych $x \in X$, $y \in X$, jeśli xRy oraz yRx, to $x = y$.

W takim przypadku mówimy też, że R *częściowo porządkuje* zbiór X. Układ (X, R) nazywamy wtedy zbiorem *częściowo uporządkowanym*. Czasami rozważa się nieco ogólniejsze relacje porządkujące: mówimy, że R jest *quasi-porządkiem (częściowym)*, jeśli R jest zwrotna i przechodnia.

Przykłady

- Dla dowolnego zbioru X, układ $(\wp(X), \subseteq)$ jest zbiorem częściowo uporządkowanym (przez relację inkluzji $\subseteq$).
- Relacja podzielności w zbiorze $\mathbb{N}_+$ wszystkich dodatnich liczb naturalnych jest relacją częściowego porządku w tym zbiorze. W tym porządku liczba x poprzedza liczbę y, gdy y jest podzielna przez x.
- Relacja zachodząca między trójkątami A i B na płaszczyźnie wtedy i tylko wtedy, gdy pole A jest niewiększe od pola B nie jest częściowym porządkiem w zbiorze wszystkich trójkątów na płaszczyźnie. Jest ona zwrotna i przechodnia, ale nie jest antysymetryczna. Tak więc, rozważana relacja jest quasi-porządkiem.

Porządki liniowe

- Jeśli (X, R) jest zbiorem częściowo uporządkowanym oraz $x \in X$, $y \in X$, to mówimy, że x oraz y są *porównywalne* (względem częściowego porządku R), gdy xRy lub yRx. Jeśli x oraz y nie są porównywalne (względem R), to mówimy, że x oraz y są *nieporównywalne* (względem R).
- Jeśli (X, R) jest zbiorem częściowo uporządkowanym oraz każde dwa elementy zbioru X są porównywalne (względem R), to mówimy, że R jest *liniowym* porządkiem w zbiorze X. Układ (X, R) nazywamy wtedy zbiorem *liniowo uporządkowanym*.

- Relacja liniowego porządku to taka relacja częściowego porządku, która jest dodatkowo *spójna* w zbiorze, na którym jest określona, czyli spełniająca warunek: dla dowolnych $x \in X$ oraz $y \in X$, jeśli $x \neq y$, to xRy lub yRx.

Łańcuchy i antyłańcuchy

- Jeśli (X, R) jest zbiorem częściowo uporządkowanym oraz $Y \subseteq X$, to Y nazywamy *łańcuchem* (względem relacji R) w (X, R), gdy każde dwa elementy zbioru Y są porównywalne względem R, czyli gdy relacja R ograniczona do zbioru Y jest w nim porządkiem liniowym.
- Jeśli (X, R) jest zbiorem częściowo uporządkowanym oraz $Y \subseteq X$, to Y nazywamy *antyłańcuchem* (względem relacji R) w (X, R), gdy każde dwa różne elementy zbioru Y są nieporównywalne względem R.

- Rozważmy zbiór częściowo uporządkowany $(\wp(\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}), \subseteq)$. Przykładem łańcucha względem inkluzji jest rodzina zbiorów:

$$\{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{1, 2, 3, 5, 7\}\}.$$

- Rozważmy częściowy porządek dodatnich liczb naturalnych wyznaczony przez relację podzielności. Dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej x łańcuchem względem tego porządku jest np. zbiór wszystkich potęg o wykładniku naturalnym liczby x, czyli zbiór $\{y \in \mathbb{N} : y = x^n$ dla pewnej $n \in \mathbb{N}\}$.
- Rozważmy relację inkluzji w rodzinie $\wp(\{1, 2, 3\})$. Zbiory $\{1, 2\}$ oraz $\{2, 3\}$ są nieporównywalne względem tej relacji.
- Rozważmy częściowy porządek dodatnich liczb naturalnych wyznaczony przez relację podzielności. Każde dwie różne liczby pierwsze są nieporównywalne względem tego porządku. W konsekwencji, dowolny zbiór liczb pierwszych jest antyłańcuchem względem tego porządku.

- Porządki częściowe nazywane są także *nieostrymi* porządkami częściowymi.
- Jeśli $\preceq$ jest porządkiem częściowym (czyli relacją zwrotną, przechodnią i antysymetryczną na rozważanym zbiorze), to $\preceq$ wyznacza jednoznacznie także pewien *ostry* porządek częściowy na rozważanym zbiorze, zdefiniowany przez warunek: $x \prec y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \preceq y$ oraz $x \neq y$.

- Przez *ostry porządek częściowy* rozumiemy relację, która jest przeciwzwrotna oraz przechodnia. Przez *ostry porządek liniowy* rozumiemy relację ostrego porządku częściowego, która jest spójna.
- Zauważmy, że jeśli jakaś relacja jest przeciwzwrotna oraz przechodnia, to jest także asymetryczna.

Przykłady

- Relacja $\leqslant \subseteq \mathbb{R}^2$ (*mniejsze lub równe*) znana ze szkoły jest nieostrym porządkiem liniowym w zbiorze $\mathbb{R}$.
- Relacja $< \subseteq \mathbb{R}^2$ (*mniejsze*) znana ze szkoły jest ostrym porządkiem liniowym w zbiorze $\mathbb{R}$.
- Relacja inkluzji $\subseteq$ jest nieostrym częściowym porządkiem (w ustalonej rodzinie zbiorów).
- Relacja inkluzji właściwej $\subset$ jest ostrym częściowym porządkiem (w ustalonej rodzinie zbiorów).

- Relacje porządkujące często oznacza się np. symbolami: $<$, $\leqslant$, $\prec$, $\preceq$, $\sqsubset$, $\sqsubseteq$, $\preccurlyeq$, $\lhd$, itp.
- Relacje równoważności często oznacza się np. symbolami: $\equiv$, $\sim$, $\simeq$, $\approx$, $\doteq$, $\approxeq$, $\backsimeq$, $\thickapprox$, $\eqcirc$, itp.

Niech $R \subseteq X \times X$ oraz $x \in X$, $y \in X$.

- y jest *bezpośrednim R-następnikiem* x, jeśli xRy oraz nie istnieje $z \in X$ taki, że $z \neq x$, $z \neq y$, xRz oraz zRy.
- x jest *bezpośrednim R-poprzednikiem* y, jeśli xRy oraz nie istnieje $z \in X$ taki, że $z \neq x$, $z \neq y$, xRz oraz zRy.

Niech $(X, \preceq)$ będzie zbiorem liniowo uporządkowanym oraz niech $x \prec y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \preceq y$ oraz $x \neq y$.

- Porządek $\prec$ jest *dyskretny*, gdy każdy element $x \in X$ ma bezpośredni $\prec$-poprzednik oraz bezpośredni $\prec$-następnik.
- Porządek $\prec$ jest *gęsty*, gdy zbiór X ma co najmniej dwa elementy oraz dla każdej pary różnych elementów $x \in X$, $y \in X$, jeśli $x \prec y$, to istnieje $z \in X$ taki, że $x \prec z$ oraz $z \prec y$.

Przykłady

- Zbiór wszystkich liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ jest uporządkowany w sposób dyskretny przez relację mniejszości.
- Zbiór wszystkich liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ jest uporządkowany w sposób gęsty przez relację mniejszości.

- Dyskretność nie jest zaprzeczeniem gęstości. Oczywiście żaden porządek liniowy nie może być jednocześnie dyskretny i gęsty.
- Istnieją jednak porządki liniowe, które nie są ani dyskretne ani gęste. Dla przykładu, zwykła relacja mniejszości w zbiorze $\mathbb{Z} \cup [0, 1]$ nie jest ani porządkiem dyskretnym ani porządkiem gęstym.

Suma zbiorów częściowo uporządkowanych. Niech $(X, \preceq)$ oraz $(Y, \sqsubseteq)$ będą zbiorami częściowo uporządkowanymi takimi, że $X \cap Y = \emptyset$. Na zbiorze $X \cup Y$ możemy zdefiniować relację $\leqslant$ następująco: $u \leqslant v$ wtedy i tylko wtedy gdy zachodzi jeden z członów alternatywy:

1. $u \in X$ oraz $v \in Y$ lub
2. $u, v \in X$ oraz $u \preceq v$ lub
3. $u, v \in Y$ oraz $u \sqsubseteq v$.

Tak określona relacja $\leqslant$ jest wtedy częściowym porządkiem na zbiorze $X \cup Y$.

Porządek leksykograficzny w produkcie kartezjańskim. Niech $(X, \preceq)$ oraz $(Y, \sqsubseteq)$ będą zbiorami częściowo uporządkowanymi. *Porządkiem leksykograficznym* w zbiorze $X \times Y$ nazywamy relację $\leqslant_\ell$ określoną następująco dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$ oraz $y_1, y_2 \in Y$: $(x_1, y_1) \leqslant_\ell (x_2, y_2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_1 \preceq x_2$ lub ($x_1 = x_2$ oraz $y_1 \sqsubseteq y_2$). Wtedy $\leqslant_\ell$ jest porządkiem częściowym w zbiorze $X \times Y$.

Rozważmy zbiory: $\{1, 2\}$ oraz $\mathbb{N}$, oba uporządkowane przez zwykłą relację porządku. Porządki leksykograficzne w zbiorach $\mathbb{N} \times \{1, 2\}$ oraz $\{1, 2\} \times \mathbb{N}$ istotnie się różnią:

$\mathbb{N} \times \{1, 2\}$ uporządkowany leksykograficznie jest „tego samego typu" porządkiem co zwykły porządek w zbiorze $\mathbb{N}$, co ustala bijekcja $f : \mathbb{N} \to (\mathbb{N} \times \{1, 2\})$, zdefiniowana wzorami: $f(2n) = (n, 1)$, $f(2n + 1) = (n, 2)$.

$\{1, 2\} \times \mathbb{N}$ jest uporządkowany leksykograficznie tak, jak przez zwykły porządek uporządkowany jest zbiór:

$$\{1 - \frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{2 - \frac{1}{n+1} n \in \mathbb{N}\}.$$

Poświadcza to bijekcja

$$g : (\{1, 2\} \times \mathbb{N}) \to \{1 - \frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{2 - \frac{1}{n+1} n \in \mathbb{N}\},$$

zdefiniowana wzorem: $g((1, n)) = 1 - \frac{1}{n+1}$, $g((2, n)) = 2 - \frac{1}{n+1}$.

Przypuśćmy, że dziewczęta X, Y, Z chcą ustalić, który z facetów A, B, C jest najbardziej przystojny. Niech preferencje poszczególnych dziewcząt wyglądają następująco (piszemy $P > Q$ w znaczeniu: wybór P jest preferowany względem wyboru Q; preferencje każdego dziewczęcia są *przechodnie*): X: $A > B > C$, Y: $B > C > A$, Z: $C > A > B$.
Czy możliwe jest liniowe uporządkowanie kandydatów zgodne z preferencjami większości dziewcząt? Dość łatwo widać, że tak nie jest:

1. $\frac{2}{3}$ dziewcząt uważa, że A jest bardziej przystojny od B.
2. $\frac{2}{3}$ dziewcząt uważa, że B jest bardziej przystojny od C.
3. $\frac{2}{3}$ dziewcząt uważa, że C jest bardziej przystojny od A.

Tak więc, choć indywidualne preferencje poszczególnych dziewcząt są dobrze określone, to nie można ich uzgodnić dla otrzymania uszeregowania w sposób liniowy wszystkich rozważanych kandydatów, jeśli kryterium miałoby stanowić to, jak pozycja kandydata zależy od liczby oddanych na niego głosów.

Niech $(X, \preceq)$ oraz $(Y, \sqsubseteq)$ będą zbiorami częściowo uporządkowanymi. Mówimy, że funkcja $f : X \to Y$ jest *izomorfizmem* tych zbiorów, jeśli:

1. f jest bijekcją z X na Y.
2. f jest funkcją zachowującą porządek, czyli dla dowolnych $x_1 \in X$, $x_2 \in X$: $x_1 \preceq x_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(x_1) \sqsubseteq f(x_2)$.

Jeśli istnieje izomorfizm układów $(X, \preceq)$ oraz $(Y, \sqsubseteq)$, to mówimy, że układy te są *izomorficzne*.

- Zbiory liniowo uporządkowane $(\mathbb{N}, \leqslant)$ oraz $(\{1 - \frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}, \leqslant)$ są izomorficzne, gdyż funkcja ściśle rosnąca $f(n) = 1 - \frac{1}{n+1}$ zachowuje rozważany porządek.
- Rodzina wszystkich podzbiorów zbioru $\{1, 2, 3\}$ uporządkowana częściowo przez inkluzję jest izomorficzna ze zbiorem liczb $\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ uporządkowanym częściowo przez relację podzielności.

Niech $(X, \preceq)$ będzie zbiorem częściowo uporządkowanym oraz, jak zwykle, niech $\prec$ będzie ostrym porządkiem wyznaczonym przez $\preceq$ (czyli $x \prec y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \preceq y$ oraz $x \neq y$). Niech ponadto $A \subseteq X$ oraz $a \in X$. Mówimy, że a jest:

1. *elementem najmniejszym* w zbiorze A, gdy $a \in A$ oraz $a \preceq x$ dla wszystkich $x \in A$;
2. *elementem największym* w zbiorze A, gdy $a \in A$ oraz $x \preceq a$ dla wszystkich $x \in A$;
3. *elementem minimalnym* w zbiorze A, gdy $a \in A$ oraz nie istnieje $x \in A$ taki, że $x \prec a$;
4. *elementem maksymalnym* w zbiorze A, gdy $a \in A$ oraz oraz nie istnieje $x \in A$ taki, że $a \prec x$.

- Elementem największym w rodzinie wszystkich *niepustych* podzbiorów zbioru $\{1, 2, 3\}$jest zbiór $\{1, 2, 3\}$, nie istnieje element najmniejszy w tej rodzinie. Elementami minimalnymi są zbiory jednoelementowe: $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$.
- W rodzinie *wszystkich* podzbiorów zbioru $\{1, 2, 3\}$ częściowo uporządkowanego poprzez relację inkluzji $\subseteq$ istnieje element największy $\{1, 2, 3\}$ oraz element najmniejszy, którym jest zbiór pusty $\emptyset$.
- W zbiorze liczb $\{2, 3, 5, 6, 10, 15\}$ uporządkowanym częściowo przez relację podzielności nie istnieją elementy: największy i najmniejszy, elementami maksymalnymi są 6, 10 oraz 15, zaś elementami minimalnymi są: 2, 3 oraz 5.

- W zbiorze $\{x \in \mathbb{N} : x > 1\}$ uporządkowanym częściowo przez relację podzielności nie istnieją elementy: największy i najmniejszy; elementami minimalnymi są wszystkie liczby pierwsze, elementy maksymalne nie istnieją.

Niech $(X, \preceq)$ będzie zbiorem częściowo uporządkowanym oraz, jak zwykle, niech $\prec$ będzie ostrym porządkiem wyznaczonym przez $\preceq$ (czyli $x \prec y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \preceq y$ oraz $x \neq y$). Niech ponadto $A \subseteq X$ oraz $a \in X$. Mówimy, że a jest:

1. *ograniczeniem dolnym* zbioru A, gdy $a \preceq x$ dla wszystkich $x \in A$ (zauważmy, że a nie musi należeć do A oraz że dany zbiór może mieć wiele ograniczeń dolnych);
2. *ograniczeniem górnym* zbioru A, gdy, gdy $x \preceq a$ dla wszystkich $x \in A$ (zauważmy, że a nie musi należeć do A oraz że dany zbiór może mieć wiele ograniczeń górnych);
3. *kresem dolnym* (*infimum*, oznaczanym $\inf A$) zbioru A, gdy a jest elementem największym w zbiorze wszystkich ograniczeń dolnych zbioru A (zauważmy, że a nie musi należeć do A);
4. *kresem górnym* (*supremum*, oznaczanym $\sup A$) zbioru A, gdy a jest elementem najmniejszym w zbiorze wszystkich ograniczeń górnych zbioru A (zauważmy, że a nie musi należeć do A).

- Niech $\mathcal{A} \subseteq \wp(X)$ dla pewnego zbioru X oraz niech $\mathcal{A} \neq \emptyset$. Rozważamy inkluzję jako porządek częściowy w rodzinie $\wp(X)$. Ograniczeniem dolnym zbioru $\mathcal{A}$ w $\wp(X)$ jest dowolny podzbiór zbioru X, który jest zawarty we wszystkich zbiorach należących do $\mathcal{A}$. Kresem dolnym zbioru $\mathcal{A}$ jest $\bigcap \mathcal{A}$.
- Niech $\mathcal{A} \subseteq \wp(X)$ dla pewnego zbioru X oraz niech $\mathcal{A} \neq \emptyset$. Rozważamy inkluzję jako porządek częściowy w rodzinie $\wp(X)$. Ograniczeniem górnym zbioru $\mathcal{A}$ w $\wp(X)$ jest dowolny podzbiór zbioru X, zawierający wszystkie zbiory należące do $\mathcal{A}$. Kresem górnym zbioru $\mathcal{A}$ jest $\bigcup \mathcal{A}$.

- Zbiór $\mathbb{P}$ wszystkich liczb pierwszych rozważany jako podzbiór zbioru wszystkich liczb naturalnych uporządkowanego przez relację mniejszości ma ograniczenie dolne (np. liczbę 1) oraz ma kres dolny (liczbę 2), nie ma natomiast elementu największego względem tej relacji. Nie istnieją też elementy maksymalne w zbiorze $\mathbb{P}$ względem tej relacji.

- Rozważmy dowolny niepusty skończony zbiór A, będący podzbiorem zbioru $\mathbb{N}_+$ i częściowy porządek w tym zbiorze, wyznaczony przez relację podzielności. Ograniczeniem dolnym zbioru A w $\mathbb{N}_+$ jest dowolna liczba, która jest wspólnym dzielnikiem wszystkich liczb z A. Kresem dolnym zbioru A jest największy wspólny dzielnik wszystkich liczb należących do A.
- Rozważmy dowolny niepusty skończony zbiór A, będący podzbiorem zbioru $\mathbb{N}_+$ i częściowy porządek w tym zbiorze, wyznaczony przez relację podzielności. Ograniczeniem górnym zbioru A w $\mathbb{N}_+$ jest dowolna liczba, która jest wspólną wielokrotnością wszystkich liczb z A. Kresem górnym zbioru A jest najmniejsza wspólna wielokrotność wszystkich liczb należących do A.

- Rozważmy podzbiór $\{x \in \mathbb{Q}_+ : x^2 < 2\}$ zbioru $\mathbb{Q}$ wszystkich dodatnich liczb wymiernych (uporządkowanego w zwykły sposób). Jest on ograniczony z góry (np. przez każdą liczbę wymierną większą od 13), ale nie istnieje w $\mathbb{Q}$ jego kres górny.

- Niech $(X, \preceq)$ będzie zbiorem liniowo uporządkowanym oraz, jak zwykle, niech $\prec$ będzie ostrym porządkiem wyznaczonym przez $\preceq$ (czyli $x \prec y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \preceq y$ oraz $x \neq y$).
- Podzbiór A zbioru X nazywamy *odcinkiem początkowym* zbioru X (względem porządku $\leqslant$), gdy dla dowolnych $x, y \in X$: jeśli $x \in A$ oraz $y \prec x$, to $y \in A$.

- Zbiór A jest zatem odcinkiem początkowym zbioru X, jeśli wraz z każdym jego elementem należą doń wszystkie mniejsze (w sensie porządku $\prec$) elementy zbioru X. Odcinek początkowy nazywamy *właściwym*, gdy jest on różny od całego zbioru X (który z definicji jest swoim odcinkiem początkowym).
- Jeśli $a \in X$ to zbiór $O(a) = \{x \in X : x \prec a\}$ jest właściwym odcinkiem początkowym zbioru X. Mówimy wtedy, że $O(a)$ jest odcinkiem początkowym *wyznaczonym* przez a.

Przykłady

- Dla dowolnej liczby naturalnej $n \in \mathbb{N}$ zbiór wszystkich liczb od niej mniejszych (w sensie zwykłego porządku) jest odcinkiem początkowym w $\mathbb{N}$ wyznaczonym przez liczbę n.
- Zbiór $\{x \in \mathbb{Q}_+ : x^2 < 2\}$ jest odcinkiem początkowym uporządkowanego w zwykły sposób zbioru $\mathbb{Q}$ wszystkich dodatnich liczb wymiernych, ale nie jest on wyznaczony przez żadną liczbę wymierną.

- Przedział $(-\infty, 1]$ jest odcinkiem początkowym uporządkowanego w zwykły sposób zbioru $\mathbb{R}$ wszystkich liczb rzeczywistych, ale nie jest on wyznaczony przez żadną liczbę rzeczywistą. Natomiast przedział $(-\infty, 1)$ jest odcinkiem początkowym uporządkowanego w zwykły sposób zbioru $\mathbb{R}$ wszystkich liczb rzeczywistych, wyznaczonym przez liczbę 1.

Zbiór częściowo uporządkowany $(X, \preceq)$ nazywamy *kratą*, jeśli dla dowolnych dwóch elementów $x \in X$ oraz $y \in X$ istnieją kresy: $\sup\{x, y\}$ oraz $\inf\{x, y\}$. Zwykle używa się następujących oznaczeń:

1. $x \cap y$ (lub $x \wedge y$) dla $\inf\{x, y\}$
2. $x \cup y$ (lub $x \vee y$) dla $\sup\{x, y\}$.

Krata $(X, \preceq)$ jest *dystrybutywna*, gdy dla wszystkich $x, y, z \in X$:
$x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$
$x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$
Największy element kraty (o ile istnieje), nazywamy *jedynką* kraty i oznaczamy np. przez **1**.
Najmniejszy element kraty (o ile istnieje), nazywamy *zerem* kraty i oznaczamy np. przez **0**.
Algebrą Boole'a nazywamy każdą kratę dystrybutywną $(X, \preceq)$ z zerem **0** oraz jedynką **1**, w której dla każdego elementu $x \in X$ istnieje *uzupełnienie* $-x$ tego elementu, spełniające warunki: $x \cup -x = \mathbf{1}$, $x \cap -x = \mathbf{0}$.

- Zbiór wszystkich dodatnich liczb naturalnych częściowo uporządkowany poprzez relację podzielności (bez reszty) jest kratą. Największy wspólny dzielnik liczb x oraz y jest tu kresem dolnym zbioru $\{x, y\}$, a najmniejsza wspólna wielokrotność liczb x oraz y jest tu kresem górnym zbioru $\{x, y\}$.
- *Wartości logiczne*. Znane słuchaczom z kursu *Wprowadzenie do logiki* wartości logiczne 0 oraz 1 tworzą algebrę Boole'a względem porządku określonego warunkiem $0 \preceq 1$.
- *Zbiór potęgowy*. Dla dowolnego zbioru X, rodzina $\wp(X)$ jest algebrą Boole'a. Rozważanym porządkiem jest relacja inkluzji $\subseteq$. Kresem dolnym dla pary zbiorów $\{A, B\}$ jest ich iloczyn $A \cap B$, kresem górnym dla pary zbiorów $\{A, B\}$ jest ich suma $A \cup B$, uzupełnieniem elementu $A \subseteq X$ jest jego dopełnienie $A' = X - A$.

- *Ciałem zbiorów* nazywamy dowolną rodzinę zbiorów, która jest domknięta na operacje: sumy, iloczynu oraz dopełnienia.
- Każde ciało zbiorów jest algebrą Boole'a.
- Rozważanym porządkiem jest relacja inkluzji $\subseteq$.
- Kresy określone są tak samo, jak w poprzednim przykładzie.

Drzewem (o korzeniu x_0) nazwiemy każdy układ (X, R, x_0) taki, że:

1. (X, R) jest grafem o zbiorze *wierzchołków* X i zbiorze *krawędzi* $R \subseteq X \times X$;
2. R jest częściowym porządkiem w X;
3. x_0 jest elementem R-najmniejszym w X;
4. zbiór wszystkich R-poprzedników każdego wierzchołka jest liniowo uporządkowany przez relację R.

- To jest jedna z możliwych definicji drzewa. Rozważa się też inne, w zależności od zastosowań.
- Drzewa to bardzo ważne struktury porządkowe, spotykamy je w wielu zastosowaniach. Drzewa reprezentują *struktury składniowe* wyrażeń, *obliczenia* również traktować możemy jako drzewa. Także *dowody* twierdzeń są drzewami.

- *Liśćmi* drzewa D nazywamy wszystkie te jego wierzchołki, które nie mają R-następników. Jeśli $(x, y) \in R$ jest krawędzią w D, to x nazywamy *przodkiem* y, a y nazywamy *potomkiem* x. Jeśli $(x, y) \in R - R^2$ jest krawędzią w D, to x nazywamy *bezpośrednim przodkiem* y, zaś y nazywamy *bezpośrednim potomkiem* x.
- Każdy podzbiór zbioru wierzchołków drzewa D, który jest uporządkowany liniowo przez R nazywamy *łańcuchem* w D (czasem: *ścieżką* w D). Każdy łańcuch maksymalny (względem inkluzji) w D nazywamy *gałęzią* w D. Przez *długość* łańcucha P rozumiemy liczbę elementów zbioru P.

- *Rzędem* wierzchołka x nazywamy moc (liczbę elementów) zbioru wszystkich bezpośrednich potomków x. *Rzędem* drzewa D jest kres górny rzędów wszystkich wierzchołków drzewa D.
- Drzewo D jest *skończone*, jeśli zbiór jego wierzchołków jest skończony; w przeciwnym przypadku jest *nieskończone*. Drzewo D jest *rzędu skończonego* (jest *skończenie generowane*), jeśli każdy jego wierzchołek ma rząd skończony.

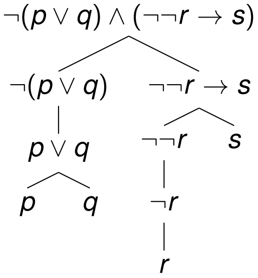
Przez indukcję definiujemy *poziomy* drzewa:

1. poziom *zerowy* to zbiór jednoelementowy, złożony z korzenia drzewa;
2. poziom $k+1$ to zbiór wszystkich bezpośrednich następników wierzchołków poziomu k.

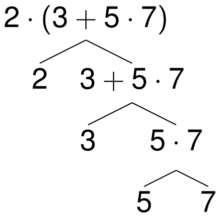
Drzewo dwójkowe to drzewo, w którym każdy wierzchołek ma co najwyżej dwóch bezpośrednich potomków. *Pełne drzewo dwójkowe* to drzewo, w którym każdy wierzchołek ma dokładnie dwóch bezpośrednich potomków.

Przez *drzewo znakowane* (elementami ze zbioru L) rozumiemy parę uporządkowaną (D, f), gdzie D jest drzewem, a f jest funkcją ze zbioru wierzchołków drzewa D w zbiór L. W zastosowaniach w logice zwykle L jest pewnym zbiorem formuł.
Graficzne reprezentacje drzew są rysunkami, na których wierzchołki (jakoś znakowane – punktami, liczbami, formułami, itd.) połączone są liniami, odpowiadającymi krawędziom. Przy tym, jeśli (X, R, x_0) jest drzewem, to na rysunku zaznaczamy tylko krawędzie należące do $R - R^2$.

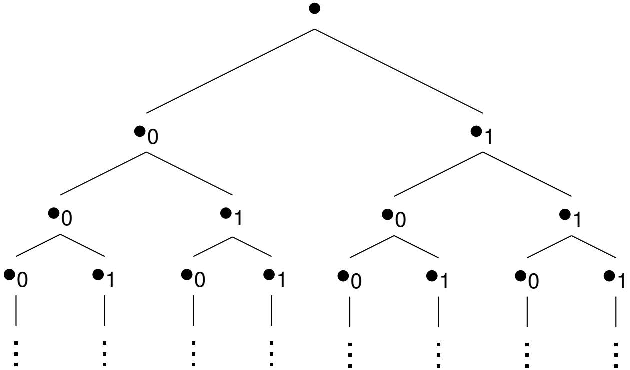
Drzewa składniowe. Na kursach logicznych słuchacze poznają reprezentacje składniowe wyrażeń rozważanych języków formalnych. Dla przykładu, każdej formule (powiedzmy, języka klasycznego rachunku zdań) przyporządkować można drzewo jej wszystkich *podformuł*. Np. formule $\neg(p \vee q) \wedge (\neg\neg r \to s)$ odpowiada drzewo:



Obliczenia. Podobnie, obliczeniom arytmetycznym można przyporządkować stosowne drzewa: na liściach umieszcza się argumenty, w pozostałych wierzchołkach wyniki kolejnych obliczeń, w korzeniu znajduje się końcowy wynik. Dla przykładu, obliczenie $2 \cdot (3 + 5 \cdot 7)$ reprezentuje drzewo:



Każdy wierzchołek pełnego drzewa dwójkowego ma dwóch bezpośrednich potomków: lewego potomka znakujemy przez 0, prawego przez 1. Ta reprezentacja pełnego drzewa dwójkowego wygląda zatem następująco:



Pokażemy, że nie jest możliwe ponumerowanie (liczbami naturalnymi: 0, 1, 2, 3, 4, 5,...) wszystkich gałęzi pełnego drzewa dwójkowego, czyli wszystkich nieskończonych ciągów o wyrazach 0 lub 1. Rozwiązanie wykorzystuje *metodę przekątniową* Cantora. Przypuśćmy, dla dowodu nie wprost, że można wszystkie gałęzie nieskończonego drzewa dwójkowego ponumerować liczbami naturalnymi. Niech to wyliczenie ma postać następującą (każda a_i^j jest zerem lub jedynką):

1. $g_1 = a_1^1 a_1^2 a_1^3 \ldots$
2. $g_2 = a_2^1 a_2^2 a_2^3 \ldots$
3. $g_3 = a_3^1 a_3^2 a_3^3 \ldots$
4. itd.

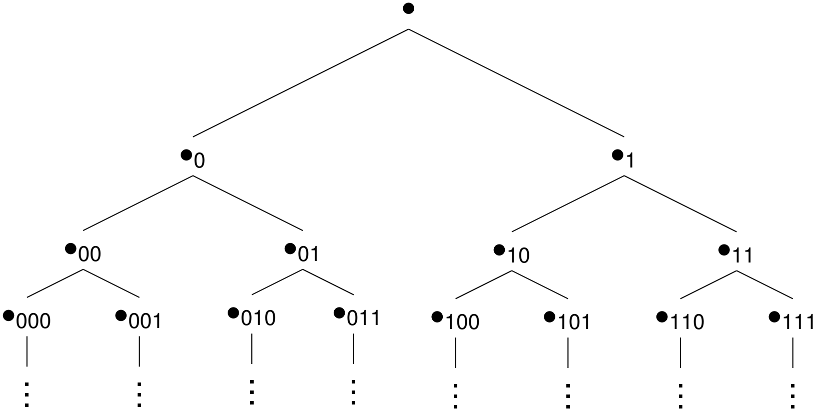
Rozważmy ciąg $G = b_1 b_2 b_3 \ldots$, gdzie:

1. jeśli $a_n^n = 0$, to $b_n = 1$
2. jeśli $a_n^n = 1$, to $b_n = 0$.

Wtedy ciąg G różni się od *każdego* z ciągów g_n (co najmniej na n-tym miejscu). Tak więc, jakkolwiek chcielibyśmy ponumerować wszystkie gałęzie pełnego drzewa dwójkowego liczbami naturalnymi, to zawsze pozostaną gałęzie, dla których numerów nie starczy.

- Zauważmy, że nasze przypuszczenie dotyczyło *dowolnego* sposobu numerowania wszystkich gałęzi drzewa dwójkowego liczbami naturalnymi. Powyższy wynik oznacza zatem, że taka (wyczerpująca wszystkie gałęzie) numeracja jest niemożliwa. Tak więc wszystkich gałęzi tego drzewa nie można ustawić w ciąg uporządkowany tak, jak wszystkie liczby naturalne.
- Pełne drzewo dwójkowe reprezentuje wszystkie wartościowania w klasycznym rachunku zdań: jak słuchacze wiedzą z kursu *Wprowadzenia do logiki*, każde takie wartościowanie jest nieskończonym ciągiem zero-jedynkowym, a więc gałęzią w pełnym drzewie dwójkowym.

Możemy też patrzeć na pełne drzewo dwójkowe w sposób następujący. Każdy z kolejnych wierzchołków ma dwóch bezpośrednich potomków. Wierzchołki (oprócz korzenia) kodujemy *ciągami* zer i jedynek. Tak więc, jeśli jakiś wierzchołek ma kod σ, to jego bezpośrednimi potomkami są wierzchołki o kodach: $\sigma 0$ oraz $\sigma 1$.



Lemat Königa. *Jeśli drzewo* $D = (X, R, x_0)$ *rzędu skończonego jest nieskończone, to ma gałąź nieskończoną*.

Dowód. Przypuśćmy, że D jest nieskończone. Zdefiniujemy gałąź nieskończoną $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ w D przez indukcję matematyczną. Element x_0 (czyli korzeń drzewa D) jest pierwszym elementem konstruowanej gałęzi. Ponieważ D jest nieskończone, więc x_0 ma nieskończenie wiele R-następników.

Przypuśćmy, że $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ zostały zdefiniowane tak, że x_i należy do i-tego poziomu drzewa D oraz x_i ma nieskończenie wiele R-następników. Z założenia, x_{n-1} ma tylko skończenie wiele *bezpośrednich* R-następników. Ponieważ x_{n-1} ma nieskończenie wiele R-następników, więc co najmniej jeden z jego bezpośrednich R-następników także ma nieskończenie wiele R-następników. Wybieramy więc element x_n z n-tego poziomu drzewa D o tej właśnie własności. Wtedy x_n ma nieskończenie wiele R-następników. Ponieważ jest tak dla każdego n, pokazaliśmy istnienie nieskończonej gałęzi $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ w drzewie D.

Przypuśćmy, że D jest drzewem dwójkowym rzędu skończonego (drzewem *skończenie generowanym*). Oglądać je można z dwóch perspektyw:
Perspektywa Demona. Widzi on całe drzewo D. Ma pełną informację o D. Uzna, że D jest *nieskończone*, gdy ma ono nieskończoną liczbę wierzchołków (lub, co na to samo wychodzi, nieskończoną liczbę krawędzi).
Perspektywa Mrówki. Mrówka może wędrować po drzewie D, startując z jego korzenia i dokonując wyborów (lewo-prawo) w każdym z kroków (i nie zawracając). Ma niepełną informację o D. Może osiągnąć kres swojej wędrówki, docierając do liścia. Dla Mrówki drzewo będzie *nieskończone*, jeśli da jej ono gwarancję (koszmarnej) nieśmiertelności, czyli gdy Mrówka znajdzie gałąź nieskończoną w D, po której będzie dreptać, dreptać, dreptać... Mrówka drepcząca po (skończenie generowanym) drzewie dwójkowym robi to dzielnie, bez trwogi. Jeśli dotrze do liścia drzewa, to może spokojnie przejść do (szczęśliwego) Niebytu. Jeśli ma pecha żyć w drzewie nieskończonym i w dodatku ma Prawdziwego Pecha, ponieważ wybrała gałąź nieskończoną, to cóż – musi hardo znosić Koszmar Nieśmiertelności. Bądźcie dzielni, co najmniej tak samo, jak Mrówka.

Niech $(X, \preceq)$ będzie zbiorem liniowo uporządkowanym oraz, jak zwykle, niech $\prec$ będzie ostrym porządkiem wyznaczonym przez $\preceq$ (czyli $x \prec y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \preceq y$ oraz $x \neq y$). Mówimy, że porządek $\preceq$ jest *ciągły*, gdy:

1. porządek $\preceq$ jest gęsty w X oraz
2. każdy niepusty zbiór $A \subseteq X$ ograniczony z góry ma kres górny w zbiorze X, a każdy niepusty zbiór $B \subseteq X$ ograniczony z dołu ma kres dolny w zbiorze X.

- Porządek $\leqslant$ w zbiorze $\mathbb{R}$ jest ciągły.
- Porządek $\leqslant$ w zbiorze $\mathbb{Q}_+$ nie jest ciągły. Jest to porządek gęsty, ale np. następujący zbiór liczb wymiernych nie ma kresu górnego, choć jest ograniczony z góry:

$$\{x \in \mathbb{Q}_+ : x^2 < 2\}.$$

- Porządek $\leqslant$ w zbiorze $\mathbb{Z}$ nie jest ciągły, ponieważ nie jest gęsty.

Twierdzenie. Jeśli relacja $\leqslant$ liniowo porządkuje zbiór X, to następujące warunki są równoważne:

1. Dla każdego niepustego ograniczonego z góry podzbioru zbioru X istnieje w zbiorze X kres górny.
2. Dla każdego niepustego ograniczonego z dołu podzbioru zbioru X istnieje w zbiorze X kres dolny.

Dowód. Trzeba pokazać, że z pierwszego warunku wynika drugi, a także, że z drugiego warunku wynika pierwszy. Udowodnimy, że zachodzi to pierwsze wynikanie, pozostawiając słuchaczom przyjemność zmierzenia się z dowodem drugiego.

Załóżmy, że zachodzi warunek 1). Niech A będzie niepustym ograniczonym z dołu podzbiorem zbioru X. Niech B będzie zbiorem wszystkich ograniczeń dolnych zbioru A: $B = \{y \in X : y \leqslant x$ dla wszystkich $x \in A\}$. Na mocy założenia mamy $B \neq \emptyset$. Zbiór B jest ograniczony z góry (każdy element zbioru A jest bowiem ograniczeniem górnym zbioru B). Z przyjętego założenia, B ma zatem kres górny. Niech $b = \sup B$. Pokażemy teraz, że b jest kresem dolnym zbioru A. Jeśli $x \in A$, to x jest ograniczeniem górnym zbioru B. W konsekwencji, skoro b jest *najmniejszym* ograniczeniem górnym zbioru B, to $b \leqslant x$. Ponieważ element x został wybrany całkiem dowolnie z A, więc b jest ograniczeniem dolnym zbioru A. Niech c będzie dowolnym ograniczeniem dolnym zbioru A. Naszym celem jest pokazanie, że $c \leqslant b$. Przypuśćmy, dla dowodu nie wprost, że $b < c$. Wtedy $c \notin B$, a zatem istnieje $x \in A$ taki, że $x < c$. To jednak oznacza, że c nie jest ograniczeniem dolnym zbioru A. Przypuszczenie, że $b < c$ doprowadziło do sprzeczności, a więc musimy je odrzucić. Ostatecznie, $c \leqslant b$, czyli b jest kresem dolnym zbioru A.

Mówimy, że porządek liniowy $\preceq$ w zbiorze X jest *dobry*, jeśli w każdym niepustym zbiorze $A \subseteq X$ istnieje element najmniejszy względem tego porządku. Jeśli $\preceq$ jest dobrym porządkiem w zbiorze X, to mówimy, że układ $(X, \preceq)$ jest zbiorem *dobrze uporządkowanym*.

- Porządek $\leqslant$ w zbiorze $\mathbb{N}$ jest dobrym porządkiem. W każdym niepustym zbiorze liczb naturalnych istnieje liczba najmniejsza.
- Relacja należenia $\in$ jest dobrym porządkiem w dowolnej rodzinie zbiorów $\mathcal{A}$. Własność ta wynika z aksjomatów teorii mnogości. Wykluczają one mianowicie możliwość, aby istniał ciąg zbiorów $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_+}$ taki, że: $x_{i+1} \in x_i$ dla wszystkich $i \in \mathbb{N}_+$. Tak więc, każdy zbiór jest „ufundowany".
- Porządek $\leqslant$ w zbiorze $\mathbb{Z}$ nie jest dobrym porządkiem, gdyż np. zbiór $\{n \in \mathbb{Z} : z \leqslant 0\}$ nie ma elementu najmniejszego.
- Nazwa *dobry porządek* nie ma charakteru ocennego, stosujemy ją na mocy Tradycji.

Twierdzenie. Jeśli zbiór X jest dobrze uporządkowany przez relację $\preceq$, to dla każdego elementu (z wyjątkiem elementu największego) istnieje dokładnie jeden bezpośredni następnik (w sensie tego porządku).

Dowód. Jeśli $\leqslant$ jest porządkiem częściowym, to bezpośrednimi następnikami elementu $x \in X$ są dokładnie elementy minimalne zbioru $A_x = \{y \in X : x \prec y\}$, o ile $A_x \neq \emptyset$ oraz w A_x istnieją elementy minimalne. Jeśli teraz porządek $\preceq$ jest liniowy, to (ponieważ wszystkie elementy zbioru A_x są porównywalne) dla x istnieje co najwyżej jeden bezpośredni następnik i jest nim najmniejszy element zbioru A_x, o ile taki element w A_x istnieje. Wreszcie, jeśli porządek $\preceq$ jest dobry, to dla istnienia elementu najmniejszego w zbiorze A_x wystarcza, aby $A_x \neq \emptyset$, a to ma miejsce dla dowolnego elementu oprócz elementu największego w zbiorze X (o ile taki największy element istnieje).

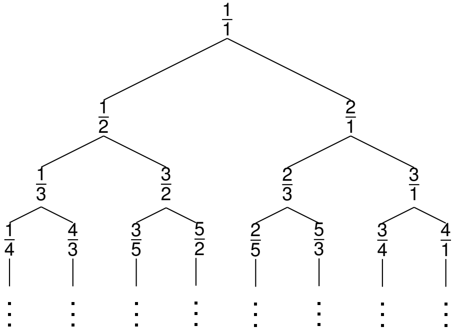
- Na jakie sposoby umysł może *wyobrażać sobie* liczby wymierne? Jedna z możliwości to ta, którą słuchacze poznali w szkole: liczbom wymiernym przyporządkowuje się punkty na osi liczbowej. Zbiór tych punktów jest gęsty w porządku osi liczbowej i jest przeliczalny (jest ich *tyle samo*, co liczb naturalnych).
- Z liczbami wymiernymi skojarzyć można też wszystkie proste przechodzące przez początek układu współrzędnych na płaszczyźnie oraz przez punkty kratowe (czyli punkty o współrzędnych całkowitych na płaszczyźnie), co opisaliśmy nieco dokładniej w pliku zawierającym szczegółowy plan niniejszych wykładów.

- Istnieje jeszcze wiele innych *reprezentacji* tego zbioru. Podamy teraz jedną z nich, odwołującą się do częściowego porządku innego od zwykłego porządku liczb wymiernych.

Zbudujemy następujące drzewo ułamków:

1. Korzeniem drzewa jest ułamek $\frac{1}{1}$.
2. Każdy wierzchołek drzewa ma dwóch bezpośrednich potomków.
3. Jeśli $\frac{a}{b}$ jest wierzchołkiem w drzewie, to jego bezpośrednimi potomkami są wierzchołki: $\frac{a}{a+b}$ (lewy) oraz $\frac{a+b}{b}$ (prawy).

To drzewo nazywamy drzewem *Calkina-Wilfa*. Można udowodnić, że każda dodatnia liczba wymierna wystąpi w tym drzewie dokładnie raz, przy tym zapisana w postaci nieskracalnego ułamka.



Lemat Kuratowskiego-Zorna

Lemat Kuratowskiego-Zorna. *Jeśli w niepustym zbiorze częściowo uporządkowanym każdy łańcuch ma ograniczenie górne, to w zbiorze tym istnieje co najmniej jeden element maksymalny*.
Nie podamy dowodu tego twierdzenia, gdyż wymaga to skorzystania z dość zaawansowanych środków teorii mnogości. Zainteresowani słuchacze zechcą sięgnąć np. do pracy: Guzicki, W., Zakrzewski, P. 2005. *Wykłady ze wstępu do matematyki. Wprowadzenie do teorii mnogości.* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa. Niektóre zastosowania tego Lematu to:

Zastosowania Lematu Kuratowskiego-Zorna

Istnienie bazy w przestrzeni wektorowej. W każdej przestrzeni wektorowej istnieje co najmniej jedna baza (czyli maksymalny układ wzajem niezależnych wektorów, których kombinacjami liniowymi są wszystkie wektory rozważanej przestrzeni).

Twierdzenie o pełności dla logiki pierwszego rzędu. Tezy logiki pierwszego rzędu pokrywają się z tautologiami tej logiki.

Lemat Lindenbauma. Każdy niesprzeczny zbiór formuł języka logiki pierwszego rzędu jest zawarty w pewnym niesprzecznym i zupełnym zbiorze formuł.

Myśl przekornie!

- Czy można uporządkować liniowo wszystkie gałęzie nieskończonego drzewa dwójkowego?
- Czy w zbiorach $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ jakiś porządek jest wyróżniony (np. przez własności arytmetyczne)?
- Czy gęstość porządku może być stopniowalna?
- Czy jest sensowne mówienie o porządku *kołowym*?

Myśl przekornie!

- Przypuśćmy, że – w jakiejś świadomie aktywnej formie – byłbyś istotą trwającą wiecznie. W jaki sposób uporządkowałbyś tę wieczność?
- Zauważ, że jeśli poświęcisz np. pierwsze sto miliardów lat na śpiewanie pieśni religijnych, a następne sto miliardów lat na picie piwa, to po owych dwustu miliardach lat znów jesteś w punkcie wyjścia: masz przed sobą nieskończoność trwania.
- Możesz powtórzyć dwa poprzednie wybory. I jeszcze raz. I jeszcze raz.
- Na pewno masz ciekawsze pomysły na wieczność trwania – podziel się nimi.

Co musisz ZZZ

- Porządki częściowe i liniowe (ostre i nieostre).
- Porządki: dyskretne, gęste, ciągłe.
- Elementy: największy, najmniejszy, maksymalne, minimalne.
- Łańcuchy i antyłańcuchy.
- Ograniczenia (górne i dolne) zbioru, kres dolny, kres górny.
- Drzewa: reprezentacje graficzne i lemat Königa.
- Dobre porządki.