

WYKŁAD MONOGRAFICZNY: ZAGADKI

ZAGADKI LOGICZNE 3:

ALICJA W KRAINIE ZAGADEK

JERZY POGONOWSKI

Zakład Logiki Stosowanej UAM

www.logic.amu.edu.pl

pogon@amu.edu.pl

1 Wstęp

W trzeciej części zagadek logicznych przytoczymy dwa fragmenty z (jeszcze niepublikowanego) naszego tłumaczenia książki Raymonda Smullyana *Alice in Puzzle Land*.

2 Logika jawy i logika snu

We śnie przydarzają nam się przygody, których nigdy nie doświadczymy na jawie. Z łatwością łamiemy we śnie podstawowe prawa fizyki, np. fruwając, przenikając przez ściany, poruszając się z zawrotnymi szybkościami, zmienia się nasz wiek, itp. Role pełnione przez sen i marzenia senna stanowią obiekt badań, lecz wciąż bardzo daleko wynikom tych badań do precyzji i adekwatności, których byśmy pożąдали. Z drugiej strony, wróżenie ze snów, przepowiadanie na ich podstawie przyszłości bądź tłumaczenie przez nie zjawisk wciąż jest zajęciem, które przynieść może całkiem grzeczny dochód. W dalszym ciągu miliony ludzi płacą sporo pieniędzy za poddawanie się praktykom psychoanalitycznym, „wydobywającym prawdę o człowieku” z treści jego marzeń sennych.

W *Alice in Puzzle-Land* Raymonda Smullyana znajdujemy wiele zagadek dotyczących – trafnych bądź nietrafnych – przekonań, które żywimy na jawie lub we śnie. Dla przykładu, wybierzmy zagadki z jednego z rozdziałów naszego tłumaczenia tej książki.

Rozdział 11: Teoria Czerwonego Króla

W tym momencie konwersacja Alicji z Humpty Dumptym została przerwana przez dziwny grzmiący odgłos dochodzący z oddali — coś jakby sapanie maszyny parowej.

— Co to jest? — zapytała Alicja, nieco przestraszona.

— Och, to tylko chrapanie Czerwonego Króla — odrzekł Humpty Dumpty. — Powinnaś pójść i zerknąć na niego — cóż za widok!

— A, tak — powiedziała Alicja, przypominając sobie swoją pierwszą podróż do krainy lustra. — Widziałam go już przedtem śpiącego. Byłam wtedy z Tweedledum i Tweedledee, którzy powiedzieli mi, że Czerwony Król śnił *o mnie* i że nie byłam niczym więcej, jak przedmiotem jego snu, a gdyby się obudził, to ja nie istniałabym już dłużej. Czyż mówienie tak nie było głupie?

— Dlaczego nie spróbujesz go obudzić i nie sprawdzisz? — odparł Humpty Dumpty.

— Jestem na to prawie gotowa — odrzekła Alicja wyzywająco. — Tylko że byłoby to trochę nieroztropne, sam wiesz.

— *Nie wiem* — odparł Humpty Dumpty. — Tak czy owak, możesz pójść zerknąć na niego, jeśli masz ochotę. Ja chcę pozostać tutaj i popracować nad dalszymi zagadkami logicznymi.

Po tej wskazówce Alicja pomyślała, że powinna odejść. Po podziękowaniu Humpty Dumpty'emu za pouczającą lekcję logiki skierowała się w stronę lasu, skąd dobiegało chrapanie.

Gdy pojawiła się przed Czerwonym Królem, ten właśnie się obudził, a byli przy nim Tweedledum oraz Tweedledee, bacznie go obserwując.

— A więc Król się obudził! — wykrzyknęła Alicja do braci Tweedle. — A ja ciągle istnieję, tak samo jak przedtem. I co powiecie na to! — dodała triumfując.

— Myślę, że lepiej wróćmy z powrotem do domu — rzekł Tweedledee do swojego brata. — W każdej chwili może zacząć padać. Ty możesz zostać tutaj, jeśli masz ochotę — powiedział do Alicji — ale mój brat i ja musimy wrócić, sama wiesz.

Alicja spojrzała w górę, ale na niebie nie było ani jednej chmurki.

— Myślę, że zostanę — powiedziała Alicja. — Chciałabym porozmawiać z Czerwonym Królem. Ale chcę wam podziękować raz jeszcze za te urocze gry logiczne. Bardzo je polubiłam!

Ramię w ramię, dwaj bracia powlekli się powoli na zewnątrz lasu. Alicja przez chwilę patrzyła za nimi, a potem zwróciła się w stronę Czerwonego Króla, który był już na dobre rozbudzony.

— Ty musisz być *Alicją!* — rzekł Król.

— Ależ tak — odparła Alicja. — Tylko skąd to wiesz?

— Och — odrzekł Król. — Miałem właśnie najdziwniejszy sen! Śniłem, że spacerowałem w lesie razem z Tweedledee i Tweedledum i napotkaliśmy dziewczynkę, wyglądającą *dokładnie* tak, jak ty, skuloną pod drzewem w głębokim śnie. „Kto to jest?” zapytałem. „To przecież *Alicja*” powiedział Tweedledee „a wiesz, o czym ona śni?” Ja na to: „Jak ktokolwiek może wiedzieć, o czym ona śni?” A on rzekł: „No przecież ona śni o *tobie*!” Potem obaj bracia próbowali mnie przekonać, że ja nie istnieję niezależnie, lecz że jestem tylko ideą w twoim umyśle i że jeśli tylko się obudzisz, to ja zniknę — fru! — jak zdmuchnięta świeczka!

— Tak więc — kontynuował Król — jestem teraz szczególnie rad, że widzę cię obudzoną i że nie zniknąłem — fru! — jak zdmuchnięta świeczka!

— Jakież to niezwykle! — wykrzyknęła Alicja. — Przecież dokładnie to samo, tyle że na odwrót, zdarzyło się, gdy ujrzałam cię pierwszy raz: spałeś, ja byłam z Tweedledee i Tweedledum, a oni powiedzieli mi, że śniłeś o mnie i że gdy tylko się obudzisz, *ja* nie będę już dłużej istniała, lecz zniknę — fru! — jak zdmuchnięta świeczka!

— Cóż, oboje jesteśmy obudzeni i żadne z nas nie zniknęło — fru! — jak zdmuchnięta świeczka — odrzekł z uśmiechem Król. — Tak więc, wydaje się, że albo bracia Tweedle mylili się, albo próbowali się z nami przekomarzać!

— Jak mogę być pewna, że jestem obudzona? — zapytała Alicja. — Czyż nie może być tak, że teraz śpię i to wszystko mi się śni?

— A, to interesujące pytanie i trudno na nie odpowiedzieć! — odparł Król. — Miałem kiedyś o tym długą filozoficzną dyskusję z Humpty Dumptym. Znasz go?

— O tak! — odrzekła Alicja.

— Cóż, Humpty Dumpty jest jednym z najbardziej bystrych dyskutantów, jakich znam — może przekonać prawie każdego o prawie wszystkim, jeśli się przyłoży! Tak czy owak, *prawie* przekonał mnie, że nie mam żadnych prawdziwych podstaw aby sądzić, że jestem obudzony, lecz go przechytryłem! Zajęło mi to około trzech godzin, ale ostatecznie przekonałem go, że *muszę* być obudzony, i przyznał, że wygrałem spór. I wtedy —

Król nie dokończył zdania, lecz stał pogrążony w myślach.

— I wtedy *co*? — zapytała Alicja.

— I wtedy się obudziłem! — rzekł Król, nieco zbaraniały.

— A więc Humpty Dumpty miał w końcu rację! — wykrzyknęła Alicja.

— Rację *w czym*? — zapytał Król. — Nigdy w rzeczywistości nie prowadziłem tej konwersacji z Humpty Dumptym; tylko *śniłem*, że ją prowadzę!

— Nie miałam na myśli *rzeczywistego* Humpty Dumpty'ego — odparła Alicja.

— Miałam na myśli Humpty Dumpty'ego, o którym śniłeś. To *on* był tym, który miał rację!

— Zaraz, chwileczkę! — powiedział Król. — Co próbujesz mi wmówić — że istnieją dwaj Humpty Dumpty, jeden rzeczywisty, a inny, o którym śniłem?

Alicja nie bardzo wiedziała, co na to odpowiedzieć.

— Tak czy inaczej — mówił Król — w międzyczasie wymyśliłem lepszy argument, dowodzący, że jestem obudzony — nie jest *możliwe*, aby ten argument był zły; on *musi* być poprawny!

— No, *o tym* chciałabym usłyszeć! — powiedziała Alicja.

— Dobrze — rzekł Król. — Zacznę od tego, że wyznaję teorię, iż każdy na świecie jest jednego z dwóch typów: typu A lub typu B. Ci typu A są całkowicie trafni w swoich przekonaniach, gdy są obudzeni, lecz całkowicie nietrafni, gdy śpią. Wszystko, w co wierzą, gdy są obudzeni, jest prawdziwe, ale wszystko, w co wierzą, gdy śpią, jest fałszywe. Z ludźmi typu B jest na odwrót: wszystko, w co wierzą, gdy śpią, jest prawdziwe, a wszystko, w co wierzą, gdy są obudzeni, jest fałszywe.

— Cóż za niezwykła teoria! — powiedziała Alicja. — Ale jaki masz dowód jej poprawności?

— Och, potem udowodnię ponad wszelką wątpliwość, że jest ona poprawna, ale na razie chciałbym ci uświadomić pewne konsekwencje teorii. Zacznijmy od tego, że wynikają z niej dwa następujące twierdzenia:

- *Twierdzenie 1.* Jeśli, w danym momencie, osoba wierzy, że jest obudzona, to musi być typu A.
- *Twierdzenie 2.* Jeśli, w danym momencie, osoba wierzy, że jest typu A, to musi być wtedy obudzona.

Następnie Król pokazał Alicji dowody obu tych twierdzeń. Alicja była zadowolona; nie potrafiła odnaleźć błędu w argumentacji.

88. PYTANIE. Czy twierdzenia 1 i 2 rzeczywiście wynikają z teorii Czerwonego Króla?

ODPOWIEDŹ:

Tak, wynikają. Rozważmy najpierw Twierdzenie 1. Przypuśćmy, że osoba wierzy, że jest obudzona. Albo rzeczywiście jest obudzona, albo nie jest. Przypuśćmy, że jest obudzona. Wtedy jej przekonanie jest trafne, ale każdy, kto ma trafne przekonania, gdy jest obudzony, musi być typu A. Przypuśćmy, z drugiej strony, że osoba ta śpi. Wtedy jej przekonanie jest nietrafne, ale każdy, kto ma nietrafne przekonanie podczas snu, musi być typu A. A zatem, czy jest ona obudzona czy śpi, musi być typu A.

Jeśli chodzi o Twierdzenie 2, to przypuśćmy, że osoba wierzy, że jest typu A. Jeśli rzeczywiście jest typu A, to jej przekonanie jest trafne, ale osoba typu A może

mieć trafne przekonania tylko wtedy, gdy jest obudzona. Z drugiej strony, jeśli jest ona typu B, to jej przekonanie jest nietrafne, ale osoba typu B może mieć nietrafne przekonanie tylko wtedy, gdy jest obudzona. Tak więc, w każdym przypadku jest obudzona, co dowodzi Twierdzenia 2.

* * *

— Teraz, gdy rozumiesz dowody twierdzeń 1 i 2 — ciągnął Król — jesteś gotowa na dowód, że jestem teraz obudzony.

DOWÓD CZERWONEGO KRÓLA.

— Udowodnię trzy rzeczy — powiedział Król. — Udowodnię, że: (po pierwsze) jestem typu A; (po drugie) jestem obudzony; (po trzecie) moja teoria jest poprawna.

— Zacznijmy od tego, że musisz uznać przesłankę, iż ja *wierzę* w te trzy rzeczy. Przyznajesz to?

— Och, z pewnością — odrzekła Alicja. — Ani przez moment nie wątpiłam, że *wierzysz* w te rzeczy; jedyne moje pytanie to czy są one rzeczywiście prawdziwe!

— Z faktu, że w nie wierzę — mówił Król — wynika, że *muszą* one być prawdziwe!

— Co?! — powiedziała zdziwiona Alicja. — Twierdzisz, że ponieważ ktoś w coś *wierzy* wynika, że to coś musi być prawdziwe?

— Oczywiście, że nie! — wykrzyknął Król. — Wiem równie dobrze jak ty, że to, iż ktoś w coś wierzy nie oznacza koniecznie, że to coś musi być prawdziwe. Jednakże te trzy szczególne rzeczy mają tę godną uwagi własność, że uwierzenie we wszystkie trzy *czyni* je prawdziwymi!

— Jakże to może być? — zapytała Alicja.

— To właśnie zamierzam ci udowodnić! — rzekł Król. — A teraz, dziecko, słuchaj uważnie. Ponieważ wierzę, że jestem obudzony, muszę być typu A.

— To wynika z twierdzenia 1 — powiedziała Alicja.

— Dokładnie! — odparł Król. — A na mocy twierdzenia 2, ponieważ wierzę, że jestem typu A, więc muszę być obudzony,

— Tak — powiedziała Alicja.

— A zatem bardzo dobrze — kończył z triumfem Król. — Ponieważ jestem zarazem obudzony i typu A, więc moje obecne przekonania muszą być wszystkie prawdziwe. Ponieważ moje obecne przekonania są prawdziwe i wierzę w teorię, którą zaproponowałem, teoria *jest* prawdziwa! Czyż mogłabyś mieć lepszy dowód niż ten?

3 Logika lustrzana

Jakimi prawami rządzi się *Świat Z Drugiej Strony Lustra*? Lewis Carroll przekazał nam wizję literacką takiego świata. Fizyka współczesna opowiada o takich światach całkiem inne bajki. Raymond Smullyan dostarczył natomiast przykładów, jak mogłaby wyglądać logika w takim lustrzanym świecie. Główny pomysł polega na odwróceniu ról pełnionych przez prawdę i fałsz. Jak wiadomo, niezawodne schematy wnioskowań zachowują prawdę, są niejako gwarancjami pozwalającymi uznać prawdziwość wniosku na mocy prawdziwości przesłanek. Można zasadnie pytać: czy istnieją reguły transmisji fałszu? Jak wyglądają schematy wnioskowań, w których fałszywość przesłanek gwarantowałaby fałszywość wniosku? Dodatkowo rozważać można również żywienie przekonań w tym kontekście.

Słuchacze mieli może okazję usłyszenia o konsekwencji *odrzucającej*. Odrzucanie wyrażeń rozważane było już przez Arystotelesa (w przypadku trybów sylogistycznych). System odrzuceniowy rachunku zdań opracował Jan Łukasiewicz. Obecnie rozważa się całą gamę różnych systemów odrzuceniowych.

Przypomnijmy znaną regułę *modus (tollendo) tollens*:

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta, \neg\beta}{\neg\alpha}.$$

Wedle tej reguły, jeśli uznałaś implikację oraz zaprzeczenie jej następnika, to powinnaś także uznać zaprzeczenie jej poprzednika. W swobodnej parafrazie rzecz można: jeśli uznałaś implikację, a odrzuciłaś jej następnik, to powinnaś odrzucić także jej poprzednik.

Nie będziemy w tym miejscu omawiali ogólnych zasad dotyczących konsekwencji odrzuceniowych, czyli operacji konsekwencji wyznaczonych przez reguły odrzucania wyrażeń. Wspomnijmy jedynie dwie sprawy. Po pierwsze – co może komuś wydawać się zaskakujące – operacje te spełniają te same aksjomaty Tarskiego, które spełnione są przez „zwykłe” (bazujące na uznawaniu wyrażeń) operacje konsekwencji. Po drugie, dowody nie wprost mają właśnie pewien posmak rozumowania przez odrzucenie – wyraźnie widać to np. w przypadku operacji konsekwencji bazującej na tablicach analitycznych.

Pora na zagadki. Oto stosowny rozdział z naszego tłumaczenia książki Smullyana *Alice in Puzzle-Land*.

Rozdział 10: Lustrzana Logika

Lewis Carroll powiedział nam bardzo niewiele o pozostałym Białym Rycerzu; wszystko, co nam powiedział to to, że próbował on kiedyś założyć hełm pierw-

szego Białego Rycerza, co było bardzo nieostrożne, zważywszy, że pierwszy Biały Rycerz był wtedy w hełmie.

Cóż, gdy Alicja go spotkała, była całkowicie zakłopotana! Tak wiele stwierdzeń, które wypowiedział, wydawało się nietrafne! Czyż mógł być jedną z tych osób, które zawsze kłamią? — pomyślała Alicja. — Nie — odrzuciła to od razu, ponieważ jej intuicja podpowiadała jej, że był on całkiem szczerą osobą. Ale te rzeczy, które mówił! Przede wszystkim powiedział Alicji, że jest ona jednorożcem. Gdy Alicja go zapytała: „Czy rzeczywiście wierzysz, że jestem jednorożcem?” odpowiedział: „Nie.” Następnie utrzymywał, że Biały Król spał i śnił o Alicji, ale potem powiedział, że Biały Król nie śnił o niczym. Potem doszły dwa zdania wzajem sprzeczne (zapomniałem, jakie one były) i najpierw twierdził on, że jedno z nich jest prawdziwe, potem twierdził, że pozostałe jest fałszywe, a jeszcze potem, że oba są prawdziwe.

Początkowo Alicja myślała, że był on po prostu sprzeczny, ale nigdy nie potrafiła złapać go na bezpośredniej sprzeczności — to znaczy nie potrafiła znaleźć zdania, o którym twierdził on, że jest prawdziwe i twierdził także, że jest fałszywe, choć bywało, że twierdził, iż zdanie jest jednocześnie prawdziwe i fałszywe! Ciągłe nie mogła go przyłapać na utrzymywaniu oddzielnie — że zdanie jest prawdziwe i że zdanie jest fałszywe.

Po wielu godzinach przesłuchiwania, Alicja zgromadziła olbrzymią liczbę danych, które zapisała w swoim notatniku. Zaniosiła go do Humpty Dumpty’ego, aby zobaczyć, czy on może je wytłumaczyć.

— To dowodzi — powiedział Humpty Dumpty, przeglądając notatki Alicji — to dowodzi!

— Co przez to rozumiesz? — zapytała Alicja. — Czy Biały Rycerz jest nieprawdomówny?

— Biały Rycerz nigdy nie kłamie — odpowiedział Humpty Dumpty.

— No to nie rozumiem — odrzekła Alicja. — Naprawdę nie rozumiem!

— Oczywiście, że nie — odparł pogardliwie Humpty Dumpty — nie rozumiesz Lustrzanej Logiki!

— A czym jest Lustrzana Logika?

— Rodzajem logiki stosowanym przez Lustrzanych Logików — odpowiedział.

— A kim jest Lustrzany Logik?

— No przecież tym, który stosuje Lustrzaną Logikę — odparł. — *To* z pewnością powinnaś była odgadnąć!

Alicja przemyślała to. Jakoś nie znalazła tego wyjaśnienia bardzo pomocnym.

— Widzisz — kontynuował — pewni ludzie nazywani są Lustrzanymi Logikami. Ich stwierdzenia wydają się odrobinę dziwaczne, dopóki nie zrozumiesz klucza — który jest w istocie bardzo prosty. Gdy już zrozumiesz klucz, cały interes ma doskonały sens.

— A jaki jest klucz? — zapytała Alicja, ciekawa bardziej niż kiedykolwiek.

— Och, to nic nie da, *powiedzieć* ci, jaki jest klucz! Dam ci jednak pewne wskazówki. W istocie, podam ci pięć podstawowych warunków dotyczących Lustrzanych Logików, z których będziesz mogła *wydedukować* klucz. Oto te warunki:

- *Warunek 1.* Lustrzany Logik jest całkowicie szczerzy. Będzie utrzymywał tylko te stwierdzenia, w które rzeczywiście wierzy.
- *Warunek 2.* Jeśli Lustrzany Logik kiedykolwiek utrzymuje, że stwierdzenie jest prawdziwe, to utrzymuje także, że nie wierzy w to stwierdzenie.

— Chwileczkę — przerwała Alicja. — Czy nie przeczysz sam sobie? Zgodnie z pierwszym warunkiem, Lustrzany Logik jest zawsze prawdomówny. Jeżeli zatem utrzymuje, że stwierdzenie jest prawdziwe, to musi rzeczywiście wierzyć, że jest ono prawdziwe. W jaki zatem sposób, nie kłamiąc, może on utrzymywać, że nie wierzy w stwierdzenie?

— Dobre pytanie — odparł Humpty Dumpty. — Jednakże, nigdy nie powiedziałem, że Lustrzany Logik jest zawsze *trafny*! To, że wierzy on w coś, nie oznacza, że on koniecznie *wie*, iż w to wierzy, ani nawet, że koniecznie wierzy, że w to wierzy. W istocie, mogłoby się zdarzyć, że błędnie wierzy, że w to nie wierzy.

— Masz na myśli — powiedziała niewymownie zdumiona Alicja — że osoba może rzeczywiście w coś wierzyć, a jednak wierzyć, że w to nie wierzy?

— W przypadku Lustrzanych Logików, tak — odparł Humpty Dumpty — w istocie, w przypadku Lustrzanych Logików jest tak *zawsze* — to bezpośrednia konsekwencja pierwszych dwóch warunków.

— Jak to? — zapytała Alicja.

— Cóż — odrzekł Humpty Dumpty — przypuśćmy, że wierzy on, iż stwierdzenie jest prawdziwe. Wtedy, na mocy warunku 1, utrzymuje on, że stwierdzenie jest prawdziwe. Wtedy, na mocy warunku 2, utrzymuje on, że nie wierzy w stwierdzenie. Stąd, znów na mocy warunku 1, musi on wierzyć, że nie wierzy w stwierdzenie.

— Tak czy inaczej — kontynuował Humpty Dumpty — daję ci zbyt wiele wskazówek! Niech ukończę moją listę warunków, a wtedy powinnaś wydedukować klucz do całej tajemnicy.

- *Warunek 3.* Dla dowolnego stwierdzenia prawdziwego, Lustrzany Logik zawsze utrzymuje, że wierzy w to stwierdzenie.
- *Warunek 4.* Jeśli Lustrzany Logik w coś wierzy, to nie może wierzyć także w tego zaprzeczenie.

- *Warunek 5.* Dla dowolnego stwierdzenia, Lustrzany Logik albo wierzy w to stwierdzenie, albo wierzy w jego zaprzeczenie.

— I to — kończył z dumą Humpty Dumpty — jest cała lista warunków. Powinnaś być w stanie wywnioskować z nich, o których to stwierdzeniach Lustrzany Logik wierzy, że są prawdziwe, a także o których wierzy, że są fałszywe. Zadam ci teraz pewne pytania, aby sprawdzić, czy zrozumiałaś.

- *Pytanie 1.* Przypuśćmy, że Lustrzany Logik wierzy, że Czerwony Król śpi. Czy wierzy, że Czerwony Król śni o tobie, czy nie wierzy?

— Jakże mogłabym to wiedzieć? — wykrzyknęła Alicja.

— Powinnaś — odparł Humpty Dumpty. — Odpowiedź wynika bezpośrednio z warunków, ale powiem ci jaka jest nieco później. Na razie, zapytam cię o to:

- *Pytanie 2.* Przypuśćmy, że Lustrzany Logik wierzy, że albo Czerwony Król, albo Czerwona Królowa śpi. Czy wynika stąd, że wierzy on, że Czerwona Królowa śpi?

— A dlaczego powinno? — odparła Alicja.

— Wynika — powiedział Humpty Dumpty — ale później powiem ci, dlaczego. Na razie, spróbuj tego:

- *Pytanie 3.* Przypuśćmy, że Lustrzany Logik wierzy, że Czerwony Król śpi. Czy koniecznie musi wierzyć, że Czerwona Królowa śpi?

— Dlaczegoż, u licha, miałby? — zapytała Alicja, zbita z tropu bardziej niż kiedykolwiek.

— Dobre pytanie — odparł Humpty Dumpty — i przedyskutujemy je później. Na razie, spróbuj tego:

- *Pytanie 4.* Przypuśćmy, że Lustrzany Logik wierzy, że Czerwony Król śpi. Czy koniecznie musi wierzyć, że Czerwony Król i Czerwona Królowa oboje śpią?

— Czy to nie jest takie samo pytanie, jak ostatnie? — zapytała Alicja. — Jeśli wierzy on, że Czerwony Król śpi, to czy nie jest tym samym wierzyć, że Czerwona Królowa śpi, co wierzyć, że oboje śpią?

— Wcale nie — odparł stanowczo Humpty Dumpty.

— Dlaczego nie? — zapytała Alicja.

— Powiem ci później — odparł Humpty Dumpty. — Na razie, spróbuj tego:

- *Pytanie 5.* Przypuśćmy, że Lustrzany Logik wierzy, że Czerwony Król i Czerwona Królowa oboje śpią. Czy stąd wynika, że wierzy on, że Czerwony Król śpi?

— Wyobrażam sobie, że mogłoby — odparła Alicja.

— Nie wynika! — powiedział Humpty Dumpty. — Spróbuj tego:

- *Pytanie 6.* Przypuśćmy, że Lustrzany Logik wierzy, że Czerwony Król i Czerwona Królowa albo oboje śpią, albo oboje są obudzeni. Czy stąd wynika, że wierzy on, iż jedno z nich śpi, a drugie jest obudzone?

— Oczywiście, że nie! — powiedziała Alicja.

— *Wynika!* — rzekł Humpty Dumpty — ale powiem ci później, dlaczego. Spróbuj tego:

- *Pytanie 7.* Przypuśćmy, że Lustrzany Logik wierzy, że Lwa nie ma w lesie, chyba, że jest z nim Jednorożec. Czy wierzy, że Lew jest w lesie, czy nie wierzy?

— Nie widzę sposobu, aby to orzec! — odparła Alicja.

— Oczywiście, że nie — odrzekł wzgardliwie Humpty Dumpty — ciągle nie masz klucza! Cóż, spróbuj tego:

- *Pytanie 8.* Przypuśćmy, że Lustrzany Logik wierzy, że Dżabersmok wypowiedział w życiu co najmniej jedno stwierdzenie prawdziwe. Czy wynika stąd, że wierzy on we wszystkie stwierdzenia, które wypowiedział Dżabersmok?

— A dlaczego powinno? — zapytała Alicja. — To brzmi jak czysta głupota!

— *Wynika* — powiedział Humpty Dumpty — ale sądzę, że daję ci zbyt wiele wskazówek! Dobrze, zobaczmy, czy poradzisz sobie z tym:

- *Pytanie 9.* Przypuśćmy, że Lustrzany Logik wierzy, że wszystkie gryfy mają skrzydła. Czy stąd wynika, że istnieją jakiegokolwiek gryfy?

— Jestem całkiem skołowana tym wszystkim! — zawołała Alicja. — Nie mam pojęcia, o czym jest ta cała Lustrzana Logika!

— Cóż, spróbuj tego — rzekł Humpty Dumpty.

- *Pytanie 10.* Przypuśćmy, że Lustrzany Logik wierzy, że Alicja nie osiągnie ósmego kwadratu bez zostania królową. Przypuśćmy, że wierzy też, że Alicja osiągnie ósmy kwadrat. Czy wierzy, że Alicja zostanie królową, czy nie wierzy?

— Zgaduję, że wierzy — powiedziała Alicja — czyż nie?
— Cóż — odparł śmiejąc się Humpty Dumpty — ostatnie pytanie było rzeczywiście nieco nie *fair*, a więc nie oczekuję, że na nie odpowiesz.
— Bardziej nie *fair* niż inne pytania? — zapytała Alicja.
— Stanowczo — odpowiedział — pozostałe pytania były wszystkie całkowicie *fair*.
— Uważam je *wszystkie* za równie zwodnicze! — odparła Alicja. — Ciągle nie rozumiem tej Lustrzanej Logiki!

Jeśli wy, podobnie jak Alicja, jesteście w tym miejscu skonsternowani, to trudno mi was winić! Jednak klucz do całej tajemnicy jest śmiesznie prosty. Zamiast podawać rozwiązania pytań z tego rozdziału na końcu książki, włączę rozwiązania w poniższe dialogi.

HUMPTY DUMPTY WSZYSTKO WYJAŚNIA.

— Cóż — powiedział Humpty Dumpty — najwyższy czas, abyś odnalazła klucz!
— Nie mam pojęcia nawet jak zacząć!
— Rozważ to — powiedział Humpty Dumpty. — Czy jest możliwe, aby Lustrzany Logik wierzył w stwierdzenie prawdziwe?
— Dlaczego nie? — zapytała Alicja.
— Cóż, pamiętasz, co udowodniłem ci przedtem — że kiedy tylko Lustrzany Logik wierzy w coś, to także wierzy, że w to nie wierzy?
— Ta-ak — powiedziała Alicja — ale zapomniałam dowodu; czy mógłbyś go powtórzyć?
— No pewnie, że tak — odparł. — Weź dowolne stwierdzenie, w które wierzy Lustrzany Logik. Ponieważ wierzy on w to stwierdzenie, więc utrzymuje to stwierdzenie (na mocy warunku 1), a stąd utrzymuje, że w nie nie wierzy (na mocy warunku 2), a stąd wierzy, że w nie nie wierzy (na mocy warunku 1).
— O, tak — powiedziała Alicja — teraz pamiętam!
— Cóż, aby być pewnym, że będziesz to pamiętać, chcę, abyś zapisała to jako Twierdzenie 1 w twoim notatniku.
Alicja zapisała więc co następuje:

- *Twierdzenie 1.* Kiedykolwiek Lustrzany Logik w coś wierzy, to wierzy, że w to nie wierzy.

— Trzeba sobie następnie uświadomić — mówił Humpty Dumpty — że dla dowolnego stwierdzenia prawdziwego, Lustrzany Logik wierzy, że *wierzy* w to stwierdzenie.

— Dlaczego tak jest? — zapytała Alicja.

— Och, to łatwo udowodnić! — odparł Humpty Dumpty. — Weź dowolne stwierdzenie prawdziwe. Na mocy warunku 3, utrzymuje on, że wierzy w to stwierdzenie. Ponieważ utrzymuje, że w nie wierzy, a jest szczery (warunek 1), więc wierzy, że w nie wierzy.

— Rozumiem — powiedziała Alicja.

— Lepiej to zapisz, pod nagłówkiem Twierdzenie 2 — zasugerował Humpty Dumpty.

Alicja zapisała więc co następuje:

- *Twierdzenie 2.* Dla dowolnego stwierdzenia prawdziwego, Lustrzany Logik wierzy, że wierzy w to stwierdzenie.

— A teraz — rzekł Humpty Dumpty — czy widzisz, dlaczego jest niemożliwe, aby Lustrzany Logik kiedykolwiek uwierzył w stwierdzenie prawdziwe?

— Nie bardzo — przyznała się Alicja.

— Wynika to łatwo z Twierdzenia 1, Twierdzenia 2 oraz warunku 4 — odrzekł. — Weź dowolne stwierdzenie, w które wierzy Lustrzany Logik. Na mocy warunku 1, wierzy on, że nie wierzy w to stwierdzenie. Wtedy nie może też wierzyć, że *wierzy* w to stwierdzenie (ponieważ, na mocy warunku 4, nigdy nie wierzy w coś i zaprzeczenie tego czegoś). Ponieważ nie wierzy, że wierzy w stwierdzenie, więc stwierdzenie to nie może być prawdziwe, bo *gdyby było* prawdziwe, to, na mocy Twierdzenia 2, *wierzyłby*, że w nie wierzy. Ale on *nie wierzy*, że w nie wierzy — a zatem nie może ono być prawdziwe. Tak więc, jak widzisz, Lustrzany Logik nigdy nie wierzy w jakiegokolwiek stwierdzenie prawdziwe: wszystkie rzeczy, w które wierzy Lustrzany Logik są fałszywe.

Alicja rozmyślała nad tym przez chwilę.

— To jest dość trudny dowód! — powiedziała.

— Och, z czasem się przyzwyczaisz.

Alicja myślała o tym dalej.

— Powiedz mi coś innego — rzekła Alicja. — Czy Lustrzany Logik koniecznie wierzy we wszystkie stwierdzenia fałszywe, czy jest może tak, że wierzy tylko w niektóre stwierdzenia fałszywe?

— To jest dobre pytanie, dziecko — odparł Humpty Dumpty — a odpowiedź jest następująca. Weź dowolne stwierdzenie fałszywe. Na mocy warunku 5, albo wierzy on w to stwierdzenie, albo wierzy w jego zaprzeczenie. Nie może wierzyć w jego zaprzeczenie, ponieważ jego zaprzeczenie jest prawdziwe! A zatem wierzy w to fałszywe stwierdzenie.

— Ależ to wyjątkowe! — oświadczyła Alicja. — A zatem Lustrzany Logik wierzy we *wszystkie* stwierdzenia fałszywe i w żadne prawdziwe!

— Dokładnie — powiedział Humpty Dumpty. — I to jest w tym najpiękniejsze!

— Inną ciekawą rzeczą — dodał Humpty Dumpty — jest to, że ktokolwiek, kto wierzy we wszystkie stwierdzenia fałszywe i w żadne prawdziwe i kto jest nadto szczery w wyrażaniu swoich przekonań — każda taka osoba musi spełniać pięć podstawowych warunków, które charakteryzują Lustrzanych Logików.

— Dlaczego tak jest? — zapytała Alicja.

— Och, to łatwo udowodnić! — odparł Humpty Dumpty. — Przypuśćmy, że osoba jest całkowicie szczera i nadto wierzy we wszystkie stwierdzenia fałszywe i tylko w takie stwierdzenia. Ponieważ jest szczera, więc spełnia oczywiście warunek 1. Jeśli chodzi o warunek 2, to przypuśćmy, że utrzymuje ona, że stwierdzenie jest prawdziwe. Wtedy rzeczywiście wierzy w to stwierdzenie (ponieważ jest uczciwa). Jest zatem fałszem, że nie wierzy ona w to stwierdzenie. Ale wierzy ona we *wszystko*, co jest fałszem — nawet w rzeczy fałszywe o jej własnych przekonaniach! Tak więc, ponieważ jest fałszem, że nie wierzy w stwierdzenie, i ponieważ wierzy we wszystko, co jest fałszem, więc musi wierzyć w fałszywy stan rzeczy,¹ że nie wierzy ona w stwierdzenie — inaczej mówiąc, wierzy ona, że nie wierzy w stwierdzenie. A ponieważ *wierzy*, że nie wierzy w stwierdzenie, więc *utrzymuje*, że nie wierzy w stwierdzenie (ponieważ, przypomnijmy, jest szczera). A zatem spełnia warunek 2.

— Jeśli chodzi o warunek 3, to weźmy dowolne stwierdzenie prawdziwe. Ponieważ jest ono prawdziwe, więc osoba ta nie może w nie wierzyć. Ponieważ w nie *nie wierzy*, więc musi wierzyć, że *wierzy* w nie (ponieważ wszystkie jej przekonania są nietrafne!). Wtedy, ponieważ wierzy, że wierzy w stwierdzenie, to musi utrzymywać, że wierzy w stwierdzenie (znowu, ponieważ jest szczera). Dowodzi to, że spełnia ona warunek 3.

— Warunki 4 i 5 są oczywiste — kontynuował Humpty Dumpty. — Weźmy dowolne stwierdzenie i jego zaprzeczenie. Jedno z nich musi być prawdziwe, a pozostałe musi być fałszywe. A zatem osoba ta wierzy w to fałszywe i nie wierzy w to prawdziwe. Nie wierzy więc w oba z nich, a stąd spełnia warunek 4. Wierzy jednak w co najmniej jedno z nich, a więc spełnia warunek 5.

— I to — kończył Humpty Dumpty — jest cała historia. Lustrzany Logik jest szczery, ale całkowicie zwiedziony, całkowicie oszukany. Na odwrót, każdy, kto jest szczery i całkowicie oszukany spełnia pięć warunków bycia Lustrzanym Logikiem. Masz teraz klucz.

— Jedno mnie ciągle zastanawia — powiedziała Alicja. — Dlaczego Lustrzany

¹W oryginale: the false fact. Zgodnie z dość powszechnie przyjętą terminologią, „fakt” oznacza istniejący stan rzeczy. Nie ma zatem „fałszywych faktów”, ale mogą być „fałszywe (=nie istniejące) stany rzeczy”.

Logik nigdy nie jednocześnie: utrzymuje jakieś stwierdzenie i utrzymuje jego zaprzeczenie, a jednak utrzymuje, że stwierdzenie i jego zaprzeczenie są oba prawdziwe?

— To łatwe — odparł Humpty Dumpty. — Weź, dla przykładu, stwierdzenie, że Czerwony Król śpi. Jego zaprzeczeniem jest, że Czerwony Król jest obudzony. Oczywiście jedno z nich jest prawdziwe, a jedno fałszywe. Lustrzany Logik wierzy tylko w to, które jest fałszywe, a stąd nie może wierzyć w każde z nich oddzielnie. Jednak *pojedyncze* stwierdzenie, że Czerwony Król jednocześnie śpi i jest obudzony jest stwierdzeniem fałszywym, a stąd Lustrzany Logik musi wierzyć w to fałszywe stwierdzenie.

— A teraz, gdy masz klucz, odpowiedzi na moje dziesięć pytań powinny być oczywiste.

Oto odpowiedzi, które Humpty Dumpty podał, na swoje dziesięć pytań:

1. Ponieważ Lustrzany Logik wierzy, że Czerwony Król śpi, więc Czerwony Król musi w rzeczywistości być obudzony. A zatem Czerwony Król nie śni o Alicji. (Przez „śnić” nie rozumiem marzyć na jawie!) Ponieważ Król nie śni o Alicji, więc Lustrzany Logik musi wierzyć, że Król *śni* o Alicji.

2. Ponieważ Lustrzany Logik wierzy, że albo Czerwony Król, albo czerwona Królowa śpi, więc musi być fałszem, że albo Czerwony Król, albo Czerwona Królowa śpi. Oznacza to, że oboje są w rzeczywistości obudzeni. Ponieważ Czerwona Królowa jest obudzona, więc Lustrzany Logik musi wierzyć, że ona śpi. (Wedle tego samego wzorca musi też wierzyć, że Czerwony Król śpi.)

3. Lustrzany Logik wierzy, że Czerwony Król śpi, co w istocie oznacza, że Czerwony Król jest obudzony. To nie mówi nam nic o tym, czy Czerwona Królowa śpi czy też nie, a więc nie mamy sposobu, aby wiedzieć, czy Lustrzany Logik wierzy, że ona śpi.

4. To inna historia! Ponieważ Lustrzany Logik wierzy, że Czerwony Król śpi, więc jest fałszem, że Czerwony Król śpi. Stąd jest z pewnością fałszem, że Czerwony Król i Czerwona Królowa oboje śpią! A zatem Lustrzany Logik musi wierzyć, że oboje śpią.

A więc osobliwą rzeczą jest to, że niekoniecznie wierzy on, że Czerwona Królowa śpi, a jednak wierzy on, że Czerwony Król i Czerwona Królowa oboje śpią!

5. Lustrzany Logik wierzy, że oboje śpią, z czego wynika tylko, że co najmniej jedno z nich jest obudzone. Nie wiemy, które, a więc nie możemy ustalić, czy Lustrzany Logik wierzy, że Król śpi.

6. Ponieważ Lustrzany Logik wierzy, że albo oboje śpią, albo oboje są obudzeni, to nie jest prawdą, że albo oboje śpią, albo oboje są obudzeni. Oznacza to, że jedno

z nich śpi, a drugie jest obudzone. Lustrzany Logik wierzy, że to, które śpi, jest obudzone i wierzy, że to, które jest obudzone, śpi.

7. Ponieważ przekonanie Lustrzanego Logika jest fałszywe, więc w rzeczywistości Lew musi być w lesie, bez Jednoroźca. Zatem Lew jest w lesie. A więc Lustrzany Logik musi wierzyć, że Lwa nie ma w lesie.

8. Ponieważ przekonanie Lustrzanego Logika jest fałszywe, więc Dżabersmok nigdy w swoim życiu nie wypowiedział jakiegokolwiek prawdziwego stwierdzenia; wszystkie stwierdzenia wypowiedziane przez Dżabersmoka były fałszywe. A zatem Lustrzany Logik musi wierzyć w każde z nich!

9. Ponieważ Lustrzany Logik wierzy, że wszystkie gryfy mają skrzydła, więc jest fałszem, że wszystkie gryfy mają skrzydła, co oznacza, że musi istnieć gryf bez skrzydeł. A zatem musi istnieć co najmniej jeden gryf.

10. To jest podchwytliwe pytanie, ponieważ nie jest możliwe, aby Lustrzany Logik wierzył w oba te fakty!

Przypuśćmy, że wierzy on, że Alicja nie osiągnie ósmego kwadratu bez zostania królową. Wtedy jest fałszem, że Alicja nie osiągnie ósmego kwadratu bez zostania królową, co oznacza, że Alicja osiągnie ósmy kwadrat bez zostania królową. Stąd jest prawdą, że Alicja osiągnie ósmy kwadrat, a więc jest niemożliwe, aby Lustrzany Logik wierzył, że ona to zrobi.