Patologie Matematyczne

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl
pogon@amu.edu.pl

Matematycy używają terminu *patologiczny* w odniesieniu do niektórych obiektów, które bądź pojawiają się (jako początkowo niechciane) w trakcie badań, bądź są konstruowane specjalnie, dla ukazania ograniczeń zakresu obowiązywania twierdzeń oraz dla wysubtelnienia lub modyfikacji dotychczas żywionych intuicji matematycznych. Nie można podać precyzyjnej definicji terminu *patologia matematyczna* – jego rozumienie jest historycznie zmienne i w dużej mierze subiektywne. Aby uzyskać miano patologii, obiekt musi powodować jakieś poważniejsze kolizje z uznawanymi dotąd intuicjami matematycznymi. Ustalanie, co warto nazywać patologią wymaga w miarę jasnego określenia, co jest obiektem *standardowym* (normalnym, zwyczajnym, prototypowym, naturalnym), a to także nie jest całkiem proste. Patologie odróżniamy od *wyjątków* (obiektów nie mieszczących się w jakiejś ustalonej klasyfikacji) oraz *niespodzianek* (obiektów „dziwnych" lecz „przyjaznych"). Patologie pełnią często rolę *kontrprzykładów* (ale nie każdy kontrprzykład nazywamy patologicznym). Ważnym faktem dotyczącym patologii jest to, że są one z reguły *oswajane*, co prowadzi do rozwoju wiedzy matematycznej. Pomyślmy np. o (trwającym kilka stuleci) oswajaniu liczb ujemnych oraz zespolonych. Definicja Dedekinda zbiorów nieskończonych czyni z własności uważanej za paradoksalną własność oswojoną. Klasyczny zbiór trójkowy Cantora jest przykładem oswojonej patologii skonstruowanej specjalnie. Obiekty patologiczne często stanowią większość, w sensie miary lub topologii – np. większość funkcji ciągłych nie jest nigdzie różniczkowalna. Oczywiście nie każdy nowy „dziwny" obiekt nazywany jest patologią. W konstrukcjach obiektów patologicznych czasami wykorzystuje się nieefektywne środki dowodowe.

Paradoksy i patologie nie są nieszczęściem w matematyce. Wręcz przeciwnie, rozwiązywanie paradoksów oraz oswajanie patologii twórczo kształtuje myślenie matematyczne. Czasem zauważona uciążliwa własność badanych obiektów (np. brak rozkładu na elementy pierwsze) motywuje do powoływania do istnienia nowych bytów matematycznych (liczby idealne Kummera, ideały Dedekinda). Całe mnóstwo obiektów nazywanych patologicznymi skonstruowano w teorii funkcji (funkcje Peana, Hilberta, Cantora-Lebesgue'a, Thomae, Volterry, Minkowskiego), topologii (sfera rogata Alexandera, krzywa Knastera, jeziora Wady, łuk Artina-Foxa, naszyjnik Antoine'a, sfery egzotyczne), teorii miary (zbiory Bernsteina i Vitalego, paradoksalny rozkład kuli). Niektóre własności implikacji oraz równoważności materialnej określane jako paradoksalne stanowiły motywację do stworzenia nowych rachunków logicznych.

Podkreśla się często, że szkoła ma wykształcać intuicje matematyczne. Uważamy, że nie wystarczy w tym celu przemocą wpoić uczniom pożyteczne regułki algorytmiczne, wykorzystywane w rachowaniu, konstruowaniu, planowaniu. Uczeń powinien być także *zaciekawiany* matematyką, gdyż stanowi to najlepszą motywację do uczenia się. Ciekawostki dotyczące obiektów patologicznych mogą spełnić tę rolę, o ile będą przedstawiane z rozwagą i klarownie: matematyka nie ma straszyć, lecz ma frapować.