Ptak Gödla
(AALCS, XI)

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl
pogon@amu.edu.pl

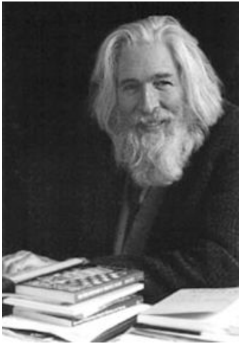
Zakopane, marzec 2007

Pokazujemy wybrane fragmenty tłumaczenia książki Raymonda Smullyana To Mock a Mockingbird, które ukaże się w 2007 roku nakładem *Książki i Wiedzy*, pod tytułem Przedrzeźniać Przedrzeźniacza.

Obok zagadek o Rycerzach (mówiących zawsze prawdę) oraz Łotrach (mówiących zawsze fałsz), książka zawiera zagadki logiczne, w których w formie popularnej przedstawia się logikę kombinatoryczną.

Zarówno logika kombinatoryczna, jak i rachunek lambda należą do niezbędnika teoretycznego każdego, kto zajmuje się zastosowaniami logiki w informatyce. Tak więc, nie dowiedzą się Państwo niczego, co nie byłoby Wam wcześniej znane. Proszę traktować niniejszą prezentację jako rozrywkę. Chciałbym przede wszystkim zwrócić uwagę na mistrzostwo Smullyana w popularyzowaniu wiedzy logicznej.

To Mock a Mockingbird



Raymond Smullyan

Spis treści „To Mock a Mockingbird”

Spis treści „To Mock a Mockingbird”

Spis treści „To Mock a Mockingbird”

Przedrzeźniacz — The Mockingbird — Mimus Polyglottos

Przedrzeźniacz

Mimus polyglottos

Plan odczytu:

- O historii logiki kombinatorycznej;
- Ptaki Smullyana jako interpretacje kombinatorów;
- Kilka ważnych Ptaków;
- Przykład: paradoks Curry'ego;
- Ptak Gödla;
- Dodatek: śpiewy Ptaków.

W prezentacji wykorzystujemy, obok fotografii i nagrań własnych, również materiały dostępne powszechnie w sieci.

O historii logiki kombinatorycznej: kilka tekstów klasycznych

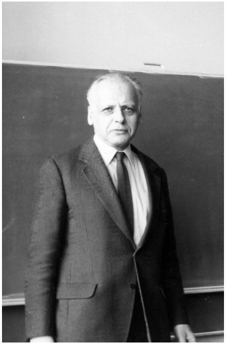
- Church, A. 1941. *Calculi of Lambda-conversion.* (Annals of Mathematical Studies 6), Princeton University Press, Princeton.
- Curry, H.B. 1930. Grundlagen der kombinatorischen Logik. *American Journal of Mathematics* **52**, 509–536, 789–834.
- Curry, H.B., Feys, R. 1958. *Combinatory Logic, Vol. 1.* North-Holland, Amsterdam. Klasyczna monografia z logiki kombinatorycznej.
- Schönfinkel, M. 1924. Über die Bausteine der mathematischen Logik. *Mathematische Annalen* **92**, 305–316. Pierwsza praca o logice kombinatorycznej. Przekład angielski (On the building blocks of mathematical logic) w: van Heijenoort, J. (ed.) 1967. *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic.* Harvard University Press, Cambridge, 355–366. Przekład francuski (Sur les éléments de construction de la logique mathématique), z komentarzem, w: *Math. Inform. Sci. Humaines* No. **112**, 1990, 5–26, 59.

O historii logiki kombinatorycznej

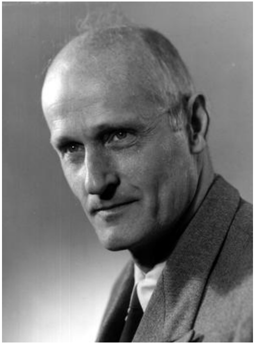
Alonzo Church

Haskell Brooks Curry

O historii logiki kombinatorycznej



Martin Hugo Löb



Stephen Cole Kleene

O historii logiki kombinatorycznej

Kilka słów o historii.

- Moses Schönfinkel.
- Alonzo Church.
- Haskell Curry.
- Stephen Cole Kleene.
- John Barkley Rosser.
- Henk Barendregt.
- Rachunek lambda. Rachunki typów.
- Zastosowania (m.in., informatyczne).

O historii logiki kombinatorycznej

Kilka nowszych opracowań:

- Barendregt, H.P. 1981. *The Lambda Calculus.* North-Holland, Amsterdam. [1984 (rev. ed.)].
- Hindley, J.R., Lercher, B., Seldin, J.P. 1972. *Introduction to Combinatory Logic.* Cambridge University Press, London.
- Hindley, J.R., Seldin, J.P. 1986. *Introduction to Combinators and λ-Calculus.* Cambridge University Press, Cambridge.
- Révész, G.E.1988. *Lambda-Calculus, Combinators and Functional Programming.* Cambridge University Press, Cambridge.

W sieci dostępne są dość liczne nowsze opracowania. W szczególności, znaleźć można programy wyprowadzające jedne kombinatory z innych. Może warto dodać, że stworzenie niektórych z tych programów było bezpośrednio inspirowane książką To Mock a Mockingbird.

O historii logiki kombinatorycznej

Moses Schönfinkel

Henk Barendregt

O historii logiki kombinatorycznej

Nowsze opracowania dotyczące historii logiki kombinatorycznej:

- Cardone, F., Hindley, J.R. 2006. History of lambda-calculus and combinatory logic. *Handbook of the History of Logic* vol. **5**. [Nie miałem dostępu do tego tekstu.]
- Seldin, J.P. 2006. The Logic of Curry and Church. *Handbook of the History of Logic* vol. **5**. [Korzystałem z tekstu dostępnego w sieci.]

Ptaki Smullyana jako interpretacje kombinatorów

Pewien czarujący las jest zamieszkany przez gadające ptaki. Dla dowolnych ptaków A oraz B, jeśli wypowiesz nazwę ptaka B do ptaka A, to A odpowie, wypowiadając do ciebie nazwę jakiegoś ptaka; będziemy ptaka z tej odpowiedzi oznaczać AB. Zamiast stale używać dziwacznego zwrotu: „odpowiedź A na usłyszenie nazwy B" będziemy mówić krótko „odpowiedź A na B".

Nadto, dla dowolnych trzech ptaków A, B oraz C, ptak $A(BC)$ niekoniecznie jest tym samym ptakiem, co ptak $(AB)C$. Ptak $A(BC)$ jest odpowiedzią A na ptaka BC, podczas gdy ptak $(AB)C$ jest odpowiedzią ptaka AB na ptaka C.

Złożenie. Dla dowolnych ptaków A, B oraz C (niekoniecznie różnych) mówimy, że ptak C **składa** A z B, jeśli dla każdego ptaka x zachodzi następujący warunek: $Cx = A(Bx)$.

Prozą, oznacza to, że odpowiedź C na x jest taka sama, jak odpowiedź A na odpowiedź B na x.

Ptaki Smullyana jako interpretacje kombinatorów

Przedrzeźniacze. Przez *przedrzeźniacza* rozumiemy ptaka M takiego, że dla dowolnego ptaka x zachodzi następujący warunek:

$$Mx = xx$$

M jest nazywany przedrzeźniaczem z tego prostego powodu, że jego odpowiedź na dowolnego ptaka x jest taka sama, jak odpowiedź ptaka x na siebie samego — innymi słowy, *M naśladuje* x jeśli chodzi o odpowiedź na x. Oznacza to, że jeśli wypowiesz x do M lub wypowiesz x do niego samego, to otrzymasz w każdym przypadku taką samą odpowiedź.
Może się zdarzyć, że gdy wypowiesz B do A, to A wypowie do ciebie tego samego ptaka B. Jeśli tak jest, to oznacza to, że A **lubi** B. Symbolicznie, to, że A lubi B znaczy, że $AB = B$.
Ptak x jest nazywany **egocentrycznym** (czasami *narcystycznym*), jeśli lubi samego siebie, tj. gdy odpowiedź x na x brzmi x. Symbolicznie, x jest egocentryczny, gdy $xx = x$.

Ptaki Smullyana jako interpretacje kombinatorów

Wiadomo, że nasz las spełnia następujące dwa warunki:

- C_1 *Warunek składania*. Dla dowolnych dwóch ptaków A oraz B (różnych lub nie) istnieje ptak C taki, że dla dowolnego ptaka x zachodzi $Cx = A(Bx)$. Innymi słowy, dla dowolnych ptaków A i B istnieje ptak C, który składa A z B.
- C_2 *Warunek przedrzeźniacza*. W lesie jest przedrzeźniacz M.

Jedna z plotek głosi, że każdy ptak w lesie lubi co najmniej jednego ptaka. Wedle innej z plotek, istnieje co najmniej jeden ptak, który nie lubi żadnego ptaka.

Jest interesujące, że można ustalić, która z tych plotek jest wiarygodna posługując się wyłącznie warunkami C_1 oraz C_2.

Która z plotek jest prawdziwa?

Rozwiązanie, choć niedługie, jest niezwykle pomysłowe. Opiera się ono na zasadzie wywodzącej się w ostatecznym rozrachunku z prac Kurta Gödla.

Ptaki Smullyana jako interpretacje kombinatorów

Pierwsza pogłoska jest prawdziwa: każdy ptak A lubi co najmniej jednego ptaka.

Dowód.

Weźmy dowolnego ptaka A.
Wtedy, na mocy warunku C_1 istnieje ptak C, który składa A z przedrzeźniaczem M.
Zatem dla dowolnego ptaka x mamy $A(Mx) = Cx$.
Ponieważ równanie to zachodzi dla *każdego* ptaka x, więc możemy podstawić C za x otrzymując równanie $A(MC) = CC$.
Ale $MC = CC$, ponieważ M jest przedrzeźniaczem, a więc w równaniu $A(MC) = CC$ możemy podstawić CC za MC otrzymując w ten sposób równanie $A(CC) = CC$.

Oznacza to, że A lubi ptaka CC!

Ptaki Smullyana jako interpretacje kombinatorów

W skrócie, jeśli C jest dowolnym ptakiem, który składa A z M, to A lubi ptaka CC.
Nadto, A lubi MC, ponieważ MC jest tym samym ptakiem, co CC.
Oznacza to, w szczególności, że przedrzeźniacz M lubi co najmniej jednego ptaka E.
Pokażemy, że E musi być egocentryczny.

Po pierwsze, $ME = E$, ponieważ M lubi E.
Ale także $ME = EE$, ponieważ M jest przedrzeźniaczem.
Tak więc E oraz EE są oba identyczne z ptakiem ME, a zatem $EE = E$.

Oznacza to, że E lubi E, tj. że E jest egocentryczny.

Kto jest kim wśród Ptaków

Bluebird	Drozd	$Bxyz = x(yz)$
Cardinal	Kardynał	$Cxyz = xzy$
Dove	Gołąb	$Dxyzw = xy(zw)$
Eagle	Orzeł	$Exyzwv = xy(zwv)$
Finch	Zięba	$Fxyz = zyx$
Goldfinch	Szczygieł	$Gxyzw = xw(yz)$
Hummingbird	Koliber	$Hxyz = xyzy$
Identity bird	Ptak identycznościowy	$Ix = x$
Jay	Sójka	$Jxyzw = xy(xwz)$
Kestrel	Pustułka	$Kxy = x$
Lark	Skowronek	$Lxy = x(yy)$
Mockingbird	Przedrzeźniacz	$Mx = xx$

Kto jest kim wśród Ptaków

Owl	Sowa	$Oxy = y(xy)$
Queer bird	Dziwoptak	$Qxyz = y(xz)$
Quixotic bird	Donkiszotówka	$Q_1xyz = x(zy)$
Quirky bird	Dziwolągwa	$Q_3xyz = z(xy)$
Robin	Rudzik	$Rxyz = yzx$
Sage bird	Ptak Mędrzec	$\Theta x = x(\Theta x)$
Starling	Szpak	$Sxyz = xz(yz)$
Thrush	Drozdon	$Txy = yx$
Turing bird	Ptak Turinga	$Uxy = y(xxy)$
Vireo	Wireonek	$Vxyz = zxy$
Warbler	Gajówka	$Wxy = xyy$
Converse warbler	Gajówka odwrotna	$W'xy = yxx$

Kto jest kim wśród Ptaków

Ptaki ogwiazdkowane

Kardynał jednokrotnie usunięty	$C^{*}xyzw = xywz$
Kardynał dwukrotnie usunięty	$C^{**}xyzwv = xyzvw$
Gajówka jednokrotnie usunięta	$W^{*}xyz = xyzz$
Gajówka dwukrotnie usunięta	$W^{**}xyzw = xyzww$

Smullyan omawia jeszcze wiele innych Ptaków. Pokazuje, jak jedne kombinatory mogą być definiowane w terminach innych.

Jak (obecnie) wiadomo, wszystkie kombinatory mogą zostać wyprowadzone z K oraz S. Dla przykładu: $((SKK)x) = (SKKx) = (Kx(Kx)) = x$, czyli $Ix = SKKx$ dla dowolnych x. (To ekstensjonalna równość termów).

Smullyan jednak wcześniej pokazuje inne wyprowadzenia, przygotowując czytelnika do wizyty w Lesie Mistrzów (rozdział 18), gdzie objaśnia ogólne zasady wyprowadzania wszystkich kombinatorów z S oraz K.

Oto niektóre przykłady (tylko wyniki):

Niektóre wyprowadzenia

Wyprowadzenia z B oraz T

Drozd	$Bxyz = x(yz)$	BBT
Kardynał	$Cxyz = xzy$	$B(T(BBT))(BBT)$
Zięba	$Fxyz = zyx$	$B(TT)(B(BBB)T)$
Wireonek	$Vxyz = zxy$	BCT
Dziwoptak	$Qxyz = y(xz)$	CB
Donkiszotówka	$Q_1xyz = x(zy)$	BCB
Dziwolągwa	$Q_3xyz = z(xy)$	BT
Szczygieł	$Gxyzw = xw(yz)$	BBC

W tekście pokazuje się, że $C = B(T(BBT))(BBT)$.
Nadto, $C = RRR$ oraz $F = ETTET$ i $V = CF$.

Niektóre wyprowadzenia

Wyprowadzenie z B, T oraz M

Podwójny przedrzeźniacz	$M_2xy = xy(xy)$	BM
Skowronek	$Lxy = x(yy)$	QM
Gajówka	$Wxy = xyy$	$C(BMR)$
Gajówka odwrotna	$W'xy = yxx$	BMR
Koliber	$Hxyz = xyzy$	$BW(BC)$
Szpak	$Sxyz = xz(yz)$	$B(BW)(BBC)$
Sowa	$Oxy = y(xy)$	QQW
Ptak Turinga	$Uxy = y(xxy)$	LO

W tekście pokazuje się, że $R = BBT$. Nadto, $Q = CB$, $W' = CWS$, $S = BW^*G$, $O = BWQ$, $O = SI$, $U = L(SI)$.

Niektóre własności Ptaków

Oprócz wyprowadzeń jednych Ptaków z innych, Smullyan podaje w swoich zagadkach pewne ogólne zasady, obowiązujące w rachunku kombinatorów. Dla przykładu:

- pokazuje się, co „robią" poszczególne Ptaki: permutowanie, nawiasowanie, składanie, lubienie (punkty stałe);
- pokazuje się różne bazy — układy kombinatorów, z których wyprowadzić można wszystkie pozostałe;
- rozważa się tworzenie różnego rodzaju reduktów kombinatorów;
- pokazuje się specjalną rolę, pełnioną przez Ptaki mędrców; ogólniej: pokazuje się rolę zasady punktu stałego; itd.

Zasada punktu stałego

Aby sformułować zasadę punktu stałego w jej najbardziej ogólnej postaci, przypuśćmy, że bierzemy dowolną liczbę zmiennych $x, y, z, \ldots$ i piszemy dowolne równanie postaci:

$$Axyz \ldots = (- - -)$$

gdzie $(- - -)$ jest dowolnym wyrażeniem zbudowanym z tych zmiennych oraz litery A.

Zasada punktu stałego mówi, że takie równanie zawsze można rozwiązać względem A — innymi słowy, istnieje ptak A taki, że dla dowolnych ptaków $x, y, z, \ldots$ jest prawdą, że:

$$Axyz \ldots = (- - -).$$

Smullyan podaje dwie metody uzasadnienia zasady punktu stałego.

Zasada punktu stałego

Dla przykładu, istnienie Ptaka mędrca jest tylko szczególnym przypadkiem zasady punktu stałego — przypadkiem, gdzie $(- - -)$ jest wyrażeniem $x(Ax)$.
Z zasady punktu stałego, istnieje wtedy Ptak A taki, że dla każdego Ptaka x:

$$Ax = x(Ax).$$

Taki Ptak A jest Ptakiem mędrcem.

Szczególnym przypadkiem zasady punktu stałego jest także to, że każdy Ptak lubi co najmniej jednego Ptaka (jak widzieliśmy przed chwilą).

Z zasady punktu stałego będziemy korzystać kilkakrotnie nieco później.

Przykłady wyprowadzeń z bazy S, K

Na początku leśni bogowie stworzyli las z dwoma jedynie Ptakami — szpakiem S oraz pustułką K.
W lesie byli już ludzie.

Nowe Ptaki stale powoływane były do istnienia w następujący sposób. Człowiek wyśpiewywał imię pewnego istniejącego już Ptaka y do istniejącego Ptaka x; wtedy x odpowiadał wyśpiewując imię istniejącego już bądź jeszcze nieistniejącego Ptaka, ale cudowne w tym było to, że gdy x nazywał nieistniejącego Ptaka, to Ptak taki zaczynał istnieć!
Tak generowane były stale nowe Ptaki.

Bogowie lasu postąpili mądrze rozpoczynając od szpaka i pustułki, ponieważ z tych dwóch Ptaków można wygenerować wszystkie ptaki kombinatoryczne.

Przykłady wyprowadzeń z bazy S, K

Oczywiście, to tylko legenda, ale dostarcza strawy duchowej. Niektórzy historycy ornitologii łączyli ją z historią Adama i Ewy, choć to, którym z Ptaków S i K był Adam, a którym Ewa, bywało przedmiotem ostrych kontrowersji. Historycy mężczyźni chcieli widzieć w S Adama, ale wiele kobiet historyków uważało to za męski szowinizm. Potrzeba dalszych badań, aby dokonać ostatecznych rozstrzygnięć w tej materii.

Starożytni historycy chińscy myślą o S jako o *yang*, o K jako o *yin*, a o ich połączeniu jako o wszechogarniającym *Tao*.

Legenda w pewnym stopniu *jakoś* polega na prawdzie, ponieważ istotnie wszystkie Ptaki kombinatoryczne są wyprowadzalne właśnie jedynie z dwóch Ptaków S oraz K.

Przykłady wyprowadzeń z bazy S, K

Wyrażenia budowane są z liter S, K, I oraz zmiennych x, y, z, w, v i być może dalszych, w razie potrzeby. Niech α oznacza dowolną ze zmiennych. Dla dowolnego wyrażenia X, nazwijmy wyrażenie X_1 α-reduktem X, jeśli zachodzą następujące dwa warunki:

1. Zmienna α nie występuje w X_1.
2. Relacja $X_1\alpha = X$ musi zachodzić.

Nie oznacza to, że $X_1\alpha$ koniecznie **jest** wyrażeniem X, ale tylko to, że równanie $X_1\alpha = X$ jest wyprowadzalne z warunków definiujących S oraz K. Dla przykładu, „$KK\alpha$" oraz „K" są różnymi wyrażeniami, ale relacja $KK\alpha = K$ zachodzi, na mocy warunku definiującego pustułkę — mianowicie dla *dowolnych* x oraz y, $Kxy = x$.

Przykłady wyprowadzeń z bazy S, K

Dla danego wyrażenia X oraz zmiennej α, w jaki sposób znajdujemy α-redukt X? Można to zawsze uczynić poprzez skończoną liczbę zastosowań następujących czterech zasad:

Zasada 1. Jeśli X składa się jedynie ze zmiennej α występującej samotnie, to I jest α-reduktem X.

W innym sformułowaniu, I jest α-reduktem α.
Powód: Zmienna α nie jest oczywiście częścią wyrażenia I oraz $I\alpha = \alpha$ zachodzi. Zatem I spełnia oba warunki dla bycia α-reduktem α.

Przykłady wyprowadzeń z bazy S, K

Zasada 2. Jeśli X jest wyrażeniem, w którym zmienna α nie występuje, to KX jest α-reduktem X.
Powód jest oczywisty: ponieważ α nie występuje w X, więc nie występuje w KX, a relacja $KX\alpha = X$ zachodzi.

Zasada 3. Jeśli X jest wyrażeniem złożonym $Y\alpha$ i α nie występuje w Y, to samo Y jest α-reduktem X.
W innym sformułowaniu, jeśli α nie występuje w Y, to Y jest α-reduktem $Y\alpha$. Powody są oczywiste.
Dla przykładu, yz jest x-reduktem yzx, ponieważ x nie występuje w yz oraz yz *jest* wyrażeniem E takim, że $Ex = yzx$. Także KyI jest x-reduktem $KIyx$, ale KIy *nie* jest y-reduktem $KIyx$!

Przykłady wyprowadzeń z bazy S, K

Zasada 4. Przypuśćmy, że X jest wyrażeniem złożonym YZ i że Y_1 jest α-reduktem Y, a Z_1 jest α-reduktem Z. Wtedy wyrażenie SY_1Z_1 jest α-reduktem X.

Powód: Relacje $Y_1\alpha = Y$ oraz $Z_1\alpha = Z$ obie zachodzą, z założenia, i relacja $SY_1Z_1\alpha = Y_1\alpha(Z_1\alpha)$ zachodzi, a stąd zachodzi relacja $SY_1Z_1\alpha = YZ = X$. Nadto α nie występuje ani w Y_1 ani w Z_1 — z założenia, że Y_1 oraz Z_1 są odpowiednio α-reduktami Y oraz Z — stąd α nie występuje w SY_1Z_1. Zatem SY_1Z_1 jest wyrażeniem X_1, w którym α nie występuje i które ma tę własność, że relacja $X_1\alpha = X$ musi zachodzić.

Zauważmy, że Zasada 4 redukuje problem znajdowania α-reduktu wyrażenia złożonego YZ do problemu znalezienia α-reduktów krótszych wyrażeń Y oraz Z. Aby znaleźć jeden z nich bądź oba, może być znowu potrzebna Zasada 4, a może znów i znów, ale ponieważ rozważane wyrażenia są coraz krótsze, więc proces ten musi się zakończyć.

Przykłady wyprowadzeń z bazy S, K

Rozważmy pewne przykłady. Przypuśćmy, że chcemy znaleźć x-redukt wyrażenia $yx(xy)$. W notacji nieskróconej jest to $(yx)(xy)$.

Widzimy, że Zasada 4 jest jedyną, którą można bezpośrednio zastosować, a więc musimy najpierw znaleźć x-redukt yx oraz x-redukt xy.

Na mocy Zasady 3, y jest x-reduktem yx. Jeśli chodzi o xy, to musimy znowu skorzystać z Zasady 4: ponieważ I jest x-reduktem x oraz Ky jest x-reduktem y, więc, na mocy Zasady 4, $SI(Ky)$ jest x-reduktem xy.

A więc y jest x-reduktem yx, a $SI(Ky)$ jest x-reduktem xy; zatem, na mocy Zasady 4, $Sy(SI(Ky)))$ jest x-reduktem $yx(xy)$. Można sprawdzić, że $Sy(SI(Ky))x = yx(xy)$.

Przykłady wyprowadzeń z bazy S, K

Z drugiej strony, przypuśćmy, że chcielibyśmy znaleźć y-redukt $(yx)(xy)$. Musimy najpierw znaleźć y-redukt yx oraz y-redukt xy. Jeśli chodzi o pierwszy z nich, to ponieważ I jest y-reduktem y oraz Kx jest y-reduktem x, więc $SI(Kx)$ jest y-reduktem yx. Jeśli chodzi o drugi z nich, to x jest y-reduktem xy. A więc $SI(Kx)$ jest y-reduktem yx oraz x jest y-reduktem xy, a stąd, na mocy Zasady 4, $S(SI(Kx))x$ jest y-reduktem $yx(xy)$. Łatwo sprawdzić, że relacja $S(SI(Kx))xy = yx(xy)$ musi zachodzić.

Gdy wiemy teraz, jak znaleźć α-redukt X, dla dowolnej zmiennej α i dowolnego wyrażenia X, to możemy z S, K oraz I wyprowadzić dowolny kombinator potrzebny do wykonania dowolnego wymaganego działania. Jeśli X ma tylko jedną zmienną — powiedzmy x — i życzymy sobie znaleźć kombinator A taki, że zachodzi relacja $Ax = X$, to za A bierzemy dowolny x-redukt X.

Przykłady wyprowadzeń z bazy S, K

Przypuśćmy, że mamy wyrażenie X z dwiema zmiennymi — powiedzmy x oraz y — i szukamy kombinatora A takiego, że zachodzi $Axy = X$.

Najpierw znajdujemy y-redukt X — nazwijmy go X_1 — a następnie znajdujemy x-redukt X_1 — nazwijmy go X_2, a wtedy X_2 jest kombinatorem, którego szukamy.

Dla przykładu, przypuśćmy, że potrzebujemy kombinatora A takiego, że dla dowolnych x oraz y, $Axy = yx(xy)$. Znaleźliśmy już y-redukt $yx(xy)$ — a mianowicie $S(SI(Kx))x$. Musimy teraz znaleźć x-redukt $S(SI(Kx))x$. Możemy zorganizować pracę następująco:

1. 1. $K(SI)$ jest x-reduktem SI.
2. 2. K jest x-reduktem Kx.
3. 3. Zatem $S(SI)K$ jest x-reduktem $SI(Kx)$.
4. 4. KS jest x-reduktem S.
5. 5. Stąd, zgodnie z krokami 4 i 3 oraz Zasadą 4,

$$S(S(KS)(S(SI)K))I$$

jest x-reduktem $S(SI(Kx))x$.

6. 6. I jest x-reduktem x
7. 7. Zatem, zgodnie z krokami 5 i 6 oraz Zasadą 4,

$$S(S(KS)(S(SI)K))I$$

jest x-reduktem $S(SI(Kx))x$ i jest kombinatorem A działającym tak jak sobie życzyliśmy: $Axy = yx(xy)$.

Przykłady wyprowadzeń z bazy S, K

W skrócie, jeśli X jest wyrażeniem o dokładnie dwóch zmiennych x oraz y, to kombinator, który nadaje się dla X — przez co rozumiemy, że relacja $Axy = X$ zachodzi — jest odnajdywany przez wyszukanie x-reduktu dla y-reduktu dla X — takie wyrażenie nazywamy $x - y$-reduktem X.

Jeśli X zawiera trzy zmienne x, y oraz z, to znajdujemy A przez odszukanie x-reduktu dla y-reduktu dla z-reduktu X — takie wyrażenie nazywamy $x - y - z$-reduktem X.

Opisaną wyżej redukcję można przeprowadzić dla dowolnej skończonej liczby zmiennych.

Ptaki logiczne

Propozycja Barendregta.
Wartości logiczne (Ptaki zdaniowe):

- t (Prawda) — Pustułka K
- f (Fałsz) — Ptak KI.

Wtedy $txy = Kxy = x$ oraz $fxy = KIxy = Iy = y$. Ptaka x nazywamy zdaniowym, jeśli $x = t$ lub $x = f$. (Ekstensjonalna równość termów.)

Jeśli p, q oraz r są Ptakami zdaniowymi, to mamy np.:
$pqr = (p\&q) \vee (\neg p\&r)$ lub, co jest tym samym,
$pqr = (p \rightarrow q)\&(\neg p \rightarrow r)$.
Odczytać to można jako: 'jeśli p, to q; w przeciwnym razie r.
Dokładniej, można zdefiniować kombinatory odpowiadające funktorom prawdziwościowym.

Ptaki logiczne

Funktory prawdziwościowe jako kombinatory.

- Ptak negacji. $Nx = xft$. Za N można wziąć Vft, gdzie V jest wireonkiem. $Vxyz = zxy$.
- Ptak koniunkcji. $cxy = xyf$. Za c można wziąć Rf, gdzie R jest rudzikiem. $Rxyz = yzx$.
- Ptak alternatywy. $dxy = xty$. Za d można wziąć Tt, gdzie T jest drozdonem. $Txy = yx$.
- Ptak implikacji. $ixy = xyt$. Za i można wziąć Rt, gdzie R jest rudzikiem.
- Ptak równoważności. $exy = xy(Ny)$. Za e można wziąć CSN, gdzie C jest kardynałem, S jest szpakiem, a N jest Ptakiem negacji. $Sxyz = xz(yz)$, $Cxyz = xzy$.

Ptaki biegłe w arytmetyce

Liczebniki i operacja następnika.
Niech σ będzie Ptakiem Vf (tj. Ptakiem $V(KI)$). Nazwijmy σ Ptakiem następnika. Dla każdej liczby naturalnej n określimy Ptaka $\bar{n}$, reprezentującego tę liczbę.

Za $\bar{0}$ bierzemy Ptaka identycznościowego I. Za $\bar{1}$ bierzemy Ptaka $\sigma\bar{0}$; za $\bar{2}$ bierzemy $\sigma\bar{1}$; za $\bar{3}$ bierzemy $\sigma\bar{2}$ i tak dalej.
Stąd $\bar{0} = I$; $\bar{1} = \sigma\bar{0}$; $\bar{2} = \sigma(\sigma\bar{0})$; $\bar{3} = \sigma(\sigma(\sigma\bar{0}))$ i tak dalej.
Tak więc, $\bar{0} = I$; $\bar{1} = VfI$; $\bar{2} = Vf(VfI)$; $\bar{3} = Vf(Vf(VfI))$ i tak dalej.

Ptak Z (wykrywacz zera) określony jest jako Tt. Wtedy:
$Z\bar{0} = TtI = It = t$ oraz $Z\overline{n^+} = Tt\overline{n^+} = \overline{n^+}t = Vf\bar{n}t = tf\bar{n} = f$.

Ptak P (poprzednika) określony jest jako Tf. Wtedy dla dowolnej liczby n, $P\overline{n^+} = Tf\overline{n^+} = \overline{n^+}f = Vf\bar{n}f = ff\bar{n} = \bar{n}$.

Ptaki biegłe w arytmetyce

Dodawanie $\oplus$.

Operacja dodawania jest jednoznacznie określona poprzez następujące dwa warunki, dla dowolnych liczb n oraz m:

1. $n + 0 = n$
2. $n + m^{+} = (n + m)^{+}$. To jest, n plus następnik m jest następnikiem $n + m$.

Szukamy zatem Ptaka A takiego, że dla wszystkich n oraz m:

1. $A\bar{n}\bar{0} = \bar{n}$
2. $A\bar{n}\overline{m^{+}} = \sigma(A\bar{n}\bar{m})$ lub, co jest tym samym, dla dowolnego dodatniego m, $A\bar{n}\bar{m} = \sigma(A\bar{n}(P\bar{m}))$.

Tak więc A musi spełniać warunek, że dla dowolnych n oraz m, będących 0 lub dodatnich, $A\bar{n}\bar{m} = Z\bar{m}\bar{n}(\sigma(A\bar{n}(P\bar{m})))$. Taki Ptak A istnieje na mocy zasady punktu stałego, a więc za $\oplus$ bierzemy dowolnego takiego Ptaka.

Ptaki biegłe w arytmetyce

Mnożenie $\otimes$.
Zauważmy, że mnożenie jest jedyną operacją spełniającą następujące dwa warunki:

1. Dla dowolnej liczby n, $n \cdot 0 = 0$.
2. Dla dowolnych liczb n oraz m, $n \cdot m^{+} = (n \cdot m) + n$.

Chcemy zatem mieć Ptaka A takiego, że dla każdych n oraz m,
$A\bar{n}\bar{m} = (Z\bar{m})\bar{0}((\oplus)(A(\bar{n}(P\bar{m}))\bar{n}))$.

Znowu, taki Ptak A może zostać odnaleziony na mocy zasady punktu stałego i bierzemy za $\otimes$ takiego Ptaka.

Ptaki biegłe w arytmetyce

Potęgowanie $\odot$.
Operacja potęgowania spełnia następujące dobrze znane prawa:

1. $n^0 = 1$
2. $n^{m^+} = n^m \cdot n$.

Szukamy zatem Ptaka $\odot$ takiego, że dla wszystkich n, $\odot\bar{n}\bar{0} = 1$, oraz dla każdej dodatniej liczby m, $\odot\bar{n}\overline{m^+} = \otimes(\odot\bar{n}\bar{m})\bar{n}$.

Równoważnie, szukamy Ptaka $\odot$ takiego, że dla wszystkich n oraz m, $\odot\bar{n}\overline{m^+} = Z\bar{m}\bar{1}(\otimes(\odot\bar{n}\bar{m})\bar{n})$.

Znowu, taki Ptak $\odot$ może zostać odnaleziony na mocy zasady punktu stałego.

Ptaki biegłe w arytmetyce

Smullyan pokazuje, jak wygląda znana procedura arytmetyzacji składni w terminach kombinatorów.

Mamy wtedy możliwość wysłowienia znanych twierdzeń metalogicznych w aparaturze pojęciowej rachunku kombinatorów.

W szczególności, przedstawiony jest dowód, iż nie istnieje Ptak Idealny, tj. nie istnieje efektywna procedura rozstrzygania, czy zachodzi ekstensjonalna równość termów X_1 oraz X_2, dla dowolnych termów X_1, X_2 języka logiki kombinatorycznej.

Ze względu na sporą liczbę pojęć pomocniczych potrzebnych do omówienia tych zagadnień, nie możemy dowodu tego pokazać w tej prezentacji. Zapraszamy do lektury książki!

Kombinatory a rachunek lambda

Smullyan nie pokazuje w swoim tekście związków między rachunkiem kombinatorów a rachunkiem lambda, jak sądzę, z powodów dydaktycznych.

Przypomnijmy, że mamy transformacje między tymi rachunkami, pozwalające przekładać wyrażenia jednego z nich na drugi.

Przekład KL kombinatorów na λ-termy:

- $KL[K] = \lambda x.\lambda y.x$
- $KL[S] = \lambda x.\lambda y.\lambda z.(xz(yz))$
- $KL[(K_1 K_2)] = (KL[K_1]KL[K_2])$.

Dla innych kombinatorów ten przekład jest równie oczywisty; np.: $KL[I] = \lambda x.x$, $KL[C] = \lambda x.\lambda y.\lambda z.(xzy)$, $KL[B] = \lambda x.\lambda y.\lambda z.(x(yz))$.

Kombinatory a rachunek lambda

Przekład LK λ-termów na kombinatory:

- $LK[v] = v$
- $LK[(l_1 L l_2)] = (LK[Ll_1]LK[Ll_2])$
- $LK[\lambda x.l] = (K\ LK[l])$ (jeśli x nie jest wolna w l)
- $LK[\lambda x.x] = I$
- $LK[\lambda x.\lambda y.l] = LK[\lambda x.LK[\lambda y.l]]$ (jeśli x jest wolna w l)
- $LK[\lambda x.(l_1 l_2)] = (S\ LK[\lambda x.l_1]LK[\lambda x.l_2])$.

Uwaga. Przekład KL nie jest odwrotnością przekładu LK.

Przykład: paradoks Curry'ego

„W tym lesie" mówił Byrd [Ptasi socjolog w Lesie Curry'ego] „pewne Ptaki śpiewają w pewne dni. Moim celem było ustalenie, które Ptaki w jakich dniach śpiewają.
„Cóż, mamy tu bardzo szczególnego Ptaka P. Nie znam jego gatunku, ale to nieważne. Ważną zaś rzeczą jest to, że dla dowolnych Ptaków x oraz y, różnych bądź nie, zachodzą następujące prawa:

- *Prawo 1.* Jeśli y śpiewa danego dnia, to Pxy śpiewa tegoż dnia.
- *Prawo 2.* Jeśli x nie śpiewa danego dnia, to Pxy śpiewa tego dnia.
- *Prawo 3.* Jeśli ptak x oraz Ptak Pxy *oba* śpiewają danego dnia, to y śpiewa tego dnia.
- *Prawo 4.* Dla każdego Ptaka x istnieje Ptak y taki, że y śpiewa w te i dokładnie w te dni, gdy śpiewa Pyx."

W Lesie Curry'ego **wszystkie** Ptaki śpiewają we **wszystkie** dni.

Przykład: paradoks Curry'ego

Dowód.

Zauważmy najpierw, że z pierwszych dwóch praw Byrda wynika, iż jeśli y śpiewa we wszystkie dni, w których śpiewa x, to Ptak Pxy musi śpiewać we wszystkie dni.

Powód: Przypuśćmy, że y śpiewa we wszystkie dni, w których śpiewa x.

Rozważmy teraz dowolny dzień. Albo x śpiewa tego dnia, albo nie.

Jeśli x nie śpiewa, to Pxy śpiewa, na mocy drugiego prawa Byrda.

Przypuśćmy teraz, że x śpiewa tego dnia.

Wtedy y także śpiewa tego dnia (bo założono, że y śpiewa każdego dnia, którego x śpiewa), a stąd Pxy musi śpiewać tego dnia, na mocy pierwszego prawa Byrda.

Dowodzi to, że niezależnie od tego, czy x śpiewa, czy nie śpiewa danego dnia, Ptak Pxy tego dnia śpiewa. Stąd Pxy śpiewa każdego dnia.

Przykład: paradoks Curry'ego

Pokażemy teraz, że dla dowolnego danego Ptaka x, śpiewa on każdego dnia.
Na mocy Prawa 4 istnieje Ptak y który śpiewa w te i dokładnie w te dni, gdy śpiewa Pyx.
Rozważmy teraz dowolny dzień, w którym y śpiewa.
Pyx także śpiewa tego dnia, na mocy Prawa 4, a ponieważ y śpiewa tego dnia, więc x śpiewa tego dnia, na mocy Prawa 3.
Dowodzi to, że x śpiewa we wszystkie dni, w których y śpiewa, a stąd Pyx śpiewa każdego dnia, na mocy rozumowania z poprzedniego paragrafu.
Wtedy, ponieważ y śpiewa w te same dni, co Pyx, więc ptak y śpiewa we wszystkie dni.
Zatem, dowolnego zupełnie dnia, Ptaki y oraz Pyx oba śpiewają, a stąd x też tego dnia śpiewa, na mocy Prawa 3.
Dowodzi to, że x śpiewa każdego dnia.

Przykład: paradoks Curry'ego

- Przypuśćmy, że mamy do dyspozycji pierwsze trzy prawa Byrda, ale zamiast prawa czwartego mamy informację, że w lesie jest skowronek. Czy wtedy wynika stąd, że wszystkie Ptaki śpiewają we wszystkie dni?
- Przypuśćmy, że w miejsce informacji o skowronku podano nam informację, że w lesie jest kardynał; czy wynikałoby stąd, że wszystkie Ptaki śpiewają każdego dnia?
- Przypuśćmy, że wiemy o obecności *obu*: skowronka *oraz* kardynała; czy wynika stąd, że wszystkie Ptaki śpiewają każdego dnia?

Gdybyśmy mieli do dyspozycji jedynie samego L lub jedynie samego C, to nie widać sposobu, aby udowodnić, że wszystkie ptaki śpiewają każdego dnia, jednak gdy mamy jednocześnie *oba* C oraz L, to możemy wyprowadzić Prawo 4 w sposób następujący.

Przykład: paradoks Curry'ego

Ponieważ obecny jest skowronek L, więc każdy Ptak lubi co najmniej jednego Ptaka; [Smullyan podaje dowód, że x lubi $Lx(Lx)$ w jednym z wcześniejszych rozdziałów].

Weźmy teraz dowolnego Ptaka x.
Wtedy ptak CPx lubi pewnego Ptaka y, co oznacza, że $CPxy = y$, a stąd $y = CPxy$.

Ale także $CPxy = Pyx$, a zatem $y = Pyx$.

Wtedy oczywiście y śpiewa w dokładnie te same dni, co Pyx, ponieważ y **jest** Ptakiem Pyx!

Zatem Prawo 4 zachodzi.

Przykład: paradoks Curry'ego

Znowu przypuśćmy, że dysponujemy pierwszymi trzema prawami Byrda, ale nie czwartym.

Czy potrafisz znaleźć **pojedynczego** ptaka kombinatorycznego, którego obecność implikowałaby, że każdego dnia śpiewają wszystkie ptaki?

Przypuśćmy, że zamiast obecności obu C oraz L mamy obecnego Ptaka A spełniającego warunek $Axyz = x(zz)y$.

Wtedy dla dowolnych ptaków x oraz y, $APxy = P(yy)x$.

Stąd $APx(APx) = P(APx(APx))x$, a więc $y = Pyx$, gdzie y jest ptakiem $APx(APx)$.

Przykład: paradoks Curry'ego

Przypuśćmy, że zamiast mówić o ptakach, mówimy o zdaniach. Przypuśćmy też, że zamiast mówić, że ptak śpiewa lub nie śpiewa danego dnia, mówimy, że zdanie jest prawdziwe lub że jest fałszywe. Dla dowolnych zdań x oraz y, niech Pxy będzie zdaniem mówiącym, że x jest fałszywe lub y jest prawdziwe, albo, co jest tym samym, że jeśli x jest prawdziwe, to takie jest też y. Pierwsze trzy prawa Byrda odpowiadają następującym podstawowym prawom logiki:

- *Prawo 1.* Jeśli y jest prawdziwe, to Pxy jest prawdziwe.
- *Prawo 2.* Jeśli x jest fałszywe, to Pxy jest prawdziwe.
- *Prawo 3.* Jeśli x oraz Pxy są oba prawdziwe, to takie jest też y.

Przypuśćmy teraz, że dodamy czwarte prawo, które odpowiada czwartemu prawu Byrda:
Prawo 4. Dla każdego zdania x istnieje zdanie y takie, że zdanie y oraz zdanie Pyx są albo oba prawdziwe albo oba fałszywe.
Otrzymujemy wtedy paradoks: wszystkie zdania są prawdziwe.

Przykład: paradoks Curry'ego

Przypuśćmy, że rozważamy teraz dowolną kolekcję bytów zwanych *obiektami* i przypuśćmy, że dysponujemy pewną operacją, która zastosowana do obiektu x oraz obiektu y daje pewien obiekt xy. Mamy wtedy coś, co nazywa się *systemem aplikacyjnym*, w którym obiekt xy jest nazywany wynikiem *zastosowania (aplikacji)* x do y. W systemach aplikacyjnych w poprzednich rozdziałach naszymi „obiektami" były Ptaki, a za xy braliśmy odpowiedź x na y. Logika kombinatoryczna bada systemy aplikacyjne o pewnych szczególnych własnościach, wśród których jest istnienie rozmaitych kombinatorów, z włączeniem C, którego nazywaliśmy *kardynałem*, oraz L, którego nazywaliśmy *skowronkiem*. Przypuśćmy teraz, że „obiekty", które badamy, obejmują wszystkie zdania, prawdziwe i fałszywe, jak również inne obiekty, *kombinatory*. Przypuśćmy, że mamy obiekt P taki, że dla dowolnych *zdań* x oraz y obiekt Pxy jest zdaniem mówiącym, że albo x jest fałszywe albo y jest prawdziwe. Jeśli x oraz y nie są oba zdaniami, to Pxy jest w dalszym ciągu dobrze określonym obiektem i może być lub nie być zdaniem, zależnie od natury x oraz y.

Przykład: paradoks Curry'ego

Prawa 1, 2 oraz 3 oczywiście zachodzą, *o ile x oraz y są zdaniami!* Nadto, zakładając, że obecne są C oraz L, dla dowolnego obiektu x musi istnieć obiekt y taki, że $y = Pyx$, jak widzieliśmy w rozwiązaniu problemu 2. W szczególności, dla dowolnego *zdania* x musi istnieć *obiekt* y taki, że $y = Pyx$, ale ten y nie musi być zdaniem! W istocie, y *nie może* być zdaniem, ponieważ gdyby był, to Pyx także byłoby zdaniem i to tym samym zdaniem, co y, co znaczyłoby, że zachodzi Prawo 4 i wpadlibyśmy znowu w paradoks Curry'ego. A więc droga wyjścia z paradoksu polega na uświadomieniu sobie, że choć aksjomaty logiki kombinatorycznej implikują, iż istnieje pewien *obiekt* y taki, że $y = Pyx$, to taki y nie może być zdaniem. Niektóre wcześniejsze systemy, które próbowały połączyć logikę zdaniową z logiką kombinatorów były nieostrożne w tym względzie i okazały się być sprzeczne. Jednak, jak zauważył Haskell Curry, paradoksy te nie powstały z winy samej logiki kombinatorycznej, były one wynikiem niewłaściwego zastosowania logiki kombinatorycznej do logiki zdaniowej.

Ptak Gödla

W rozdziale 17 książki Smullyana wędrujemy wraz z inspektorem Craigiem przez **Las Gödla**. Ptasim socjologiem w tym lesie jest niejaki Profesor **Giuseppe Baritoni**.

„A w *tym* lesie" objaśniał Baritoni „nie jest dla nas ważne, które Ptaki śpiewają w jakie dni; ważnym problemem jest, które Ptaki w ogóle potrafią śpiewać! Nie wszystkie Ptaki z tego lasu potrafią śpiewać. Mamy mnóstwo słowików, i wszystkie one śpiewają, jak pewnie zdołałeś zauważyć."

„Czy słowiki są *jedynymi* ptakami, które śpiewają, czy też są jeszcze inne?" — zapytał Craig.

Zanim poznamy odpowiedź na to pytanie, ustalmy pewne fakty dotyczące Lasu Gödla.

Ptak Gödla

Wszystkie Ptaki są zamężne (żonate). Dla dowolnego Ptaka x przez x' oznaczam **współmałżonka** x. Dla dowolnych Ptaków x oraz y, Ptak $x'y$ śpiewa wtedy i tylko wtedy, gdy xy nie śpiewa.

Każdy Ptak x ma pewnego wyróżnionego krewniaka x^* nazywanego **towarzyszem** x. Ptak x^* jest taki, że dla każdego ptaka y, Ptak x^*y śpiewa wtedy i tylko wtedy, gdy Ptak $x(yy)$ śpiewa.

Istnieje **szczególny Ptak** $\mathcal{N}$ taki, że kiedy tylko wyśpiewasz słowika do $\mathcal{N}$, to $\mathcal{N}$ odpowie nazywając Ptaka, który śpiewa, ale gdy wyśpiewasz do $\mathcal{N}$ dowolnego Ptaka, który nie jest słowikiem, to $\mathcal{N}$ odpowie nazywając Ptaka, który nie śpiewa. Innymi słowy, Ptak $\mathcal{N}x$ śpiewa wtedy i tylko wtedy, gdy x jest słowikiem.

Ptak Gödla

Zakładamy zatem, że (w tym lesie):

- *Warunek 1.* Wszystkie słowiki (w tym lesie) śpiewają.
- *Warunek 2.* $x'y$ śpiewa wtedy i tylko wtedy, gdy xy nie śpiewa.
- *Warunek 3.* x^*y śpiewa wtedy i tylko wtedy, gdy $x(yy)$ śpiewa.
- *Warunek 4.* $\mathcal{N}x$ śpiewa wtedy i tylko wtedy, gdy x jest słowikiem.

Szukamy Ptaka śpiewającego $\mathcal{G}$, który nie jest słowikiem.
Ptak $\mathcal{G}$ zaczął potem być znany jako **Ptak Gödlowski**, ponieważ metoda Craiga znajdowania go naśladowała metodę Gödla znajdowania prawdziwego zdania, które nie jest dowodliwe w pewnym systemie aksjomatycznym.
Kluczem do tego naśladownictwa jest to, że Ptaki śpiewające odpowiadają zdaniom prawdziwym, a słowiki odpowiadają zdaniom *dowodliwym*. Tak więc, Ptak śpiewający, który nie jest słowikiem odpowiada zdaniu prawdziwemu, które nie jest dowodliwe w rozważanym systemie aksjomatycznym.

Ptak Gödla

C: Jeśli wiesz jak znaleźć ptaka x i jak znaleźć ptaka y, to czy wiesz, jak znaleźć ptaka xy?
B: Niekoniecznie; jednakże, jeśli wiem jak zlokalizować x i znam *nazwę* y, to mogę znaleźć ptaka xy; po prostu idę do x i wyśpiewuję nazwę y. Wtedy x *nazywa* ptaka xy. A gdy już znam nazwę xy, to potrafię go znaleźć, ponieważ potrafię znaleźć dowolnego ptaka, którego nazwę znam.
C: Jeśli znasz nazwę ptaka x, to czy potrafisz znaleźć nazwę współmałżonka x?
B: Tak; mam kompletną listę, z której wiem, kto z kim jest żonaty.
C: Jeśli znasz nazwę ptaka x, to jesteś zdolny również odnaleźć nazwę jego towarzysza x^*?
B: Tak; mam stosowną listę.
C: Czy znasz nazwę tego szczególnego ptaka $\mathcal{N}$?
B: Tak; jego nazwą jest po prostu litera $\mathcal{N}$.
C: Potrafię cię zaprowadzić do śpiewającego ptaka, który nie jest słowikiem.

Ptak Gödla

Ptaka $\mathcal{G}$ odnaleźli w sposób następujący.
Baritoni znał już nazwę Ptaka $\mathcal{N}$, a stąd po zajrzeniu do swojej pierwszej listy, znał też nazwę Ptaka $\mathcal{N}'$ — współmałżonka $\mathcal{N}$. Wtedy, zaglądając na swoją drugą listę, Baritoni znalazł nazwę Ptaka $\mathcal{N}'^*$.
Dla uniknięcia zamieszania, odwołujmy się do Ptaka $\mathcal{N}'^*$ jako do A. Obaj mężczyźni znaleźli potem Ptaka A, zbliżyli się do niego i wyśpiewali mu jego własne imię. A odpowiedział nazywając Ptaka AA. Wtedy obaj byli w stanie odnaleźć AA.

Udowodnimy teraz, że AA musi być Ptakiem, który śpiewa, a nie jest słowikiem.
Niech $\mathcal{G}$ będzie Ptakiem AA — innymi słowy, $\mathcal{G}$ jest Ptakiem $\mathcal{N}'^*\mathcal{N}'^*$ — i udowodnimy, że $\mathcal{G}$ śpiewa, ale nie jest słowikiem.

Ptak Gödla

Ptak A ma tę własność, że dla dowolnego Ptaka x, Ptak Ax śpiewa wtedy i tylko wtedy, gdy xx nie jest słowikiem. Jest tak z następującego powodu. $\mathcal{N}'^{*}x$ śpiewa wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{N}'(xx)$ śpiewa, na mocy Warunku 3, a $\mathcal{N}'(xx)$ śpiewa wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{N}(xx)$ nie śpiewa, co jest prawdą wtedy i tylko wtedy, gdy xx *nie* jest słowikiem, ponieważ $\mathcal{N}xx$ śpiewa wtedy i tylko wtedy, gdy xx *jest* słowikiem, na mocy Warunku 4. Zbierając razem te trzy fakty widzimy, że $\mathcal{N}'^{*}x$ śpiewa wtedy i tylko wtedy, gdy xx nie jest słowikiem, a ponieważ $\mathcal{N}'^{*}$ jest Ptakiem A, Ax śpiewa wtedy i tylko wtedy, gdy xx nie jest słowikiem.

Ponieważ jest prawdą, że dla *każdego* Ptaka x, Ptak Ax śpiewa wtedy i tylko wtedy, gdy xx nie jest słowikiem, więc jest to prawdą, gdy x jest Ptakiem A, a zatem AA śpiewa wtedy i tylko wtedy, gdy AA nie jest słowikiem. Oznacza to, że albo AA śpiewa i nie jest słowikiem, albo AA nie śpiewa i jest słowikiem. Jednakże wszystkie słowiki śpiewają, jak podano w Warunku 1, czyli drugi człon alternatywy jest wykluczony. Zatem AA śpiewa, lecz nie jest słowikiem.

Ptak Gödla

Spędzili zatem cały dzień w lesie i udało im się znaleźć Ptaka $\mathcal{G}_1$, który śpiewał, a nie był słowikiem. Szczęśliwym trafem $\mathcal{G}_1$ okazał się być Ptakiem różnym od $\mathcal{G}$, choć nie można tego było przewidzieć.

Niech A_1 będzie Ptakiem $\mathcal{N}^{*\prime}$ raczej niż $\mathcal{N}^{\prime *}$. Wtedy A_1 jest niekoniecznie Ptakiem A, ale także ma tę własność, że dla dowolnego Ptaka x, Ptak $A_1 x$ śpiewa wtedy i tylko wtedy, gdy $A_1 x$ nie jest słowikiem.
Wynika z tego na mocy takiego samego rozumowania, że Ptak $A_1 A_1$ — nazwijmy go $\mathcal{G}_1$ — śpiewa, ale nie jest słowikiem.

Sumując, Ptak $\mathcal{N}^{\prime *}\mathcal{N}^{\prime *}$ oraz Ptak $\mathcal{N}^{*\prime}\mathcal{N}^{*\prime}$ są oba Ptakami, które śpiewają i żaden z nich nie jest słowikiem.

Autorstwo tego sprytnego rozumowania przypisać należy w ostatecznym rozrachunku Kurtowi Gödlowi.

Ptasie towarzystwa

Ptaki tworzyły rozmaite towarzystwa. O Ptaku A mówimy, że **reprezentuje** on zbiór Ptaków $\mathcal{S}$ jeśli dla każdego Ptaka x w $\mathcal{S}$ Ptak Ax jest Ptakiem śpiewającym oraz dla każdego Ptaka x spoza $\mathcal{S}$ Ptak Ax jest Ptakiem nieśpiewającym — innymi słowy, dla każdego Ptaka x, Ptak Ax śpiewa wtedy i tylko wtedy, gdy x jest członkiem $\mathcal{S}$. Zbiór Ptaków jest nazywany **towarzystwem**, jeśli jest reprezentowany przez jakiegoś Ptaka. Dla przykładu, zbiór słowików tworzy towarzystwo, ponieważ zbiór ten jest reprezentowany przez Ptaka $\mathcal{N}$.

Czy zbiór wszystkich ptaków śpiewających tworzy towarzystwo? Można na to pytanie odpowiedzieć na podstawie Warunku 2 oraz Warunku 3 Baritoniego. Nadto, z samego Warunku 3 można udowodnić, że każde towarzystwo musi zawierać co najmniej jednego Ptaka, który śpiewa lub nie mieć w swoim gronie co najmniej jednego Ptaka, który nie śpiewa. Jak to udowodnić i jakie to ma znaczenie dla problemu, czy Ptaki śpiewające tworzą towarzystwo?

Ptasie towarzystwa

Najpierw udowodnimy na podstawie Warunku 3, że dowolne towarzystwo musi albo zawierać pewnego śpiewaka albo wykluczać pewnego nieśpiewaka.
Weźmy dowolne towarzystwo $\mathcal{S}$. Wtedy $\mathcal{S}$ jest reprezentowane przez pewnego Ptaka A. Rozważmy teraz Ptaka A^*. Dla każdego Ptaka x, Ptak A^*x śpiewa wtedy i tylko wtedy, gdy $A(xx)$ śpiewa, zgodnie z Warunkiem 3. Nadto, $A(xx)$ śpiewa wtedy i tylko wtedy, gdy xx jest członkiem $\mathcal{S}$, ponieważ A reprezentuje $\mathcal{S}$. Zatem, A^*x śpiewa wtedy i tylko wtedy, gdy xx jest członkiem $\mathcal{S}$. Ponieważ jest to prawdą dla każdego Ptaka x, więc w szczególności A^*A^* śpiewa wtedy i tylko wtedy, gdy A^*A^* jest członkiem $\mathcal{S}$. A więc jeśli A^*A^* śpiewa, to jest on członkiem $\mathcal{S}$, a stąd w $\mathcal{S}$ jest śpiewający Ptak A^*A^*. Z drugiej strony, jeśli A^*A^* nie śpiewa, to A^*A^* nie jest członkiem $\mathcal{S}$, a więc poza $\mathcal{S}$ jest co najmniej jeden nieśpiewający Ptak — a mianowicie A^*A^*. Dowodzi to, że każde towarzystwo $\mathcal{S}$ albo ma za członka co najmniej jednego śpiewającego Ptaka, albo wyklucza członkostwo co najmniej jednego nieśpiewającego Ptaka.

Ptasie towarzystwa

Przypuśćmy teraz, że zbiór wszystkich śpiewających Ptaków tworzy towarzystwo. Otrzymamy stąd następującą sprzeczność.

Zbiór wszystkich śpiewających Ptaków byłby reprezentowany przez jakiegoś Ptaka A. Wtedy z Warunku 2 Ptak A', współmałżonek A, reprezentowałby zbiór wszystkich Ptaków, które *nie* śpiewają.

Oznaczałoby to, że zbiór wszystkich Ptaków nieśpiewających tworzy towarzystwo, ale to jest niemożliwe, ponieważ zbiór ten ani nie zawiera żadnego śpiewającego Ptaka ani nie wyklucza pewnego nieśpiewającego Ptaka. Zatem zbiór wszystkich Ptaków śpiewających nie jest reprezentowany przez żadnego Ptaka — nie jest on towarzystwem.

Rozwiązanie tego problemu, wraz z Warunkiem 1 oraz Warunkiem 4, dostarcza też alternatywnego dowodu, iż istnieje Ptak śpiewający, który nie jest słowikiem. Ponieważ zbiór Ptaków śpiewających nie tworzy towarzystwa, a zbiór słowików tworzy towarzystwo, na mocy Warunku 4, więc owe dwa zbiory nie są identyczne. Jednak wszystkie słowiki śpiewają, na mocy Warunku 1, a stąd pewien śpiewający Ptak nie jest słowikiem.

Koniec

Nie dowiedzieli się Państwo chyba niczego nowego o logice kombinatorycznej z tej prezentacji. Omawiane sprawy są w środowisku logicznym i informatycznym znane od wielu lat.

Proszę jednak zwrócić uwagę, że wciąż niewiele jest **polskich** pomocy dydaktycznych dotyczących logiki kombinatorycznej oraz rachunku lambda.

Można się zastanawiać, czy popularyzacja logiki kombinatorycznej w tej postaci, jak zrobiono to w tłumaczeniu *To Mock a Mockingbird* będzie pożyteczna.

Może już czas na napisanie porządnego **podręcznika** traktującego o tej problematyce?

Dodatek: śpiewy Ptaków

Tu, jeśli starczy czasu, możemy obejrzeć (i posłuchać):

- klip video: Ptaki poranka na Jesieniówce (styczeń 2007);
- klip video: Nocny śpiewak w Kołobrzegu (grudzień 2006).

Niektóre programy w sieci, związane z To Mock a Mockingbird:

- To Dissect a Mockingbird: http://users.bigpond.net.au/d.keenan/Lambda/
- Factasia Logic: http://www.rbjones.com/rbjpub/logic/