Strzępy Notatek do Wykładu

Logika Matematyczna

dla I roku Językoznawstwa i Informacji Naukowej UAM

Semestr Letni 2004-2005

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM

http://www.logic.amu.edu.pl

Spis Treści

Niniejszy plik, tj. krp300.pdf, zawiera notatki stanowiące tymczasowy wstęp do rozdziału III skryptu *Drzewa semantyczne w Klasycznym Rachunku Logicznym.* Rozdział ten to kilkadziesiąt dość szczegółowo, propedeutycznie omówionych przykładów zastosowania metody drzew semantycznych w *Klasycznym Rachunku Predykatów.*

Spis treści materiału z krp300.pdf (strony 1–21):

Tekst właściwy rozdziału III podzielony został na pliki:

Logika Matematyczna

I rok Językoznawstwa i Informacji Naukowej UAM
Semestr Letni 2004–2005

W semestrze letnim roku akademickiego 2004–2005 omawiany będzie Klasyczny Rachunek Predykatów. Skrótu KRP używamy dalej zamiast wyrażenia *klasyczny rachunek predykatów.*

Jedną z wykorzystywanych w wykładzie technik będzie *metoda drzew semantycznych.* Na stronie internetowej Zakładu Logiki Stosowanej UAM zamieszczono pliki zawierające kilkadziesiąt szczegółowo omówionych przykładów zastosowania tej metody. Materiał ten to fragment notatek do rozdziału III przygotowywanego (wspólnie z p. dr Izabelą Bondecką-Krzykowską, Zakład Logiki Matematycznej UAM) skryptu *Metoda drzew semantycznych w klasycznym rachunku logicznym.* Oto spis treści planowanego skryptu:

I. Preliminaria matematyczne

II. Klasyczny rachunek zdań

III. Klasyczny rachunek predykatów

IV. Własności metalogiczne

V. Zastosowania

VI. Zadania.

Materiał rozdziałów I oraz II jest Państwu znany z wykładów *Wstępu do matematyki* oraz *Logiki matematycznej* odbytych w semestrze zimowym roku akademickiego 2004–2005. Materiał rozdziałów IV i V, nieco bardziej zaawansowany, nie będzie Państwu potrzebny do egzaminu. Wybrane zadania z rozdziału VI omawiane będą podczas zajęć.

Wspomniane pliki zawierają następujący materiał:

krp311.pdf : o budowaniu drzew semantycznych w KRP;

krp322.pdf : tautologie KRP;

krp333.pdf : spełnialność (semantyczna niesprzeczność) zbiorów formuł języka KRP;

krp344.pdf : wynikanie logiczne w KRP;

krp355.pdf : KRP z identycznością.

Podręczniki w języku polskim wykorzystujące (różne odmiany) metody drzew semantycznych to np.:

Mordechai Ben-Ari: *Logika matematyczna w informatyce.* Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 2005.

Małgorzata Porębska, Wojciech Suchoń: *Elementarne wprowadzenie w logikę formalną.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1991.

Polecenia godna jest także domena calculemus.org, gdzie w *Lectorium* Profesora Witolda Marciszewskiego znaleźć można materiały dydaktyczne wykorzystujące metodę drzew semantycznych.

1. O składni i semantyce KRP

Poniżej podajemy, w możliwie najbardziej zwięzły sposób, podstawowe definicje dotyczące języka klasycznego rachunku predykatów, najważniejszych pojęć składniowych i semantycznych. Wzorujemy się na odpowiednich definicjach podanych w:

Tadeusz Batóg: *Podstawy logiki.* Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2003 (strony 109–112 oraz 238–261).

Igor A. Ławrow, Łarisa L. Maksimowa: *Zadania z teorii mnogości, logiki matematycznej i teorii algorytmów.* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2004 (strony 85–89 oraz 95–96, a zwłaszcza przypis tłumacza na stronach 87–88).

Pierwsza z tych pozycji jest dostępna (w liczbie kilkudziesięciu egzemplarzy) w Bibliotece Instytutu Językoznawstwa UAM. Pozycja druga została przez piszącego te słowa zgłoszona Bibliotece jako zalecana w dydaktyce prowadzonej w Instytucie Językoznawstwa UAM.

1.1. Składnia języka KRP

Niech I, J, K będą dowolnymi zbiorami. Rozpatrzmy alfabet $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3 \cup \Sigma_4 \cup \Sigma_5 \cup \Sigma_6$, gdzie
$\Sigma_1 = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ — *zmienne indywiduowe*,
$\Sigma_2 = \{P_i^{n_i}\}_{i \in I}$ $(n_i \in \mathcal{N})$ — *predykaty*,
$\Sigma_3 = \{f_j^{n_j}\}_{j \in J}$ $(n_j \in \mathcal{N})$ — *symbole funkcyjne*,
$\Sigma_4 = \{a_k\}_{k \in K}$ — *stałe indywiduowe*,
$\Sigma_5 = \{\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \equiv, \forall, \exists\}$ — *stałe logiczne*,
$\Sigma_6 = \{, \ , (,)\}$ — *symbole pomocnicze*.

$P_i^{n_i}$ nazywamy n_i-*argumentowym predykatem*, $f_j^{n_j}$ nazywamy n_j-*argumentowym symbolem funkcyjnym*, symbol $\forall$ nazywamy *kwantyfikatorem generalnym*, a symbol $\exists$ *kwantyfikatorem egzystencjalnym*. Symbole: $\wedge$ (*koniunkcja*), $\vee$ (*alternatywa*), $\rightarrow$ (*implikacja*), $\neg$ (*negacja*) i $\equiv$ (*równoważność*) znane są z wykładu semestru zimowego.

Zbiór $\sigma = \Sigma_2 \cup \Sigma_3 \cup \Sigma_4$ nazwiemy *sygnaturą*. W dalszym ciągu mówić będziemy o pewnej ustalonej sygnaturze σ.

Wyrażeniem języka KRP nazywamy każdy skończony ciąg symboli alfabetu tego języka.

Definicja *termu* języka KRP jest indukcyjna:

(i) wszystkie zmienne indywiduowe x_n oraz wszystkie stałe indywiduowe a_k są termami;

(ii) jeśli $t_1, \ldots, t_{n_j}$ są dowolnymi termami, to wyrażenie $f_j^{n_j}(t_1, \ldots, t_{n_j})$ jest termem;

(iii) nie ma innych termów (języka KRP) prócz zmiennych indywiduowych oraz stałych indywiduowych oraz tych termów, które można skonstruować wedle reguły (ii).

Formułą atomową języka KRP nazywamy każde wyrażenie postaci $P_i^{n_i}(t_1, \ldots, t_{n_i})$, gdzie $t_1, \ldots, t_{n_i}$ są dowolnymi termami.

Definicja *formuły* języka KRP jest indukcyjna:

(i) każda formuła atomowa jest formułą;

(ii) jeśli A jest dowolną formułą, to wyrażenia $\neg(A)$, $\forall x_n\ (A)$, $\exists x_n\ (A)$ są formułami;

(iii) jeśli A i B są dowolnymi formułami, to wyrażenia $(A) \wedge (B)$, $(A) \vee (B)$, $(A) \rightarrow (B)$, $(A) \equiv (B)$ są formułami;

(iv) nie ma innych formuł (języka KRP) prócz tych, które można utworzyć wedle reguł (i)–(iii).

Wyrażenie A w dowolnej formule o postaci $\forall x_n\ (A)$ lub o postaci $\exists x_n\ (A)$ nazywamy *zasięgiem* odpowiedniego kwantyfikatora.

Zmienna x_n występująca na danym miejscu w formule A jest *na tym miejscu związana*, jeżeli jest ona podpisana pod którymś z kwantyfikatorów lub też znajduje się w zasięgu jakiegoś kwantyfikatora, pod którym podpisana jest również zmienna x_n.

Jeżeli zmienna x_n, występująca na danym miejscu w formule A, nie jest na tym miejscu związana, to mówimy, że jest ona *na tym miejscu wolna w A*.

Mówimy, że x_n jest *zmienną wolną w A* wtedy i tylko wtedy, gdy przynajmniej na jednym miejscu zmienna ta jest wolna w A.

Formuły nie zawierające żadnych zmiennych wolnych nazywamy *zdaniami* (języka KRP).

1.2. Semantyka języka KRP

Nazwiemy *interpretacją języka o sygnaturze* σ dowolny układ $\langle M, \sigma, \triangle\rangle$, gdzie M jest zbiorem, a $\triangle$ funkcją (*funkcją denotacji*) o dziedzinie σ, która przyporządkowuje:

- każdej stałej indywiduowej a_k element $\triangle(a_k) \in M$;
- każdemu predykatowi $P_i^{n_i}$ relację n_i-argumentową $\triangle(P_i^{n_i}) \subseteq M^{n_i}$;
- każdemu symbolowi funkcyjnemu $f_j^{n_j}$ funkcję n_j-argumentową $\triangle(f_j^{n_j}) : M^{n_j} \to M$.

Wtedy *strukturami relacyjnymi sygnatury* σ są dowolne układy $\langle M, \triangle[\sigma]\rangle$, gdzie $\triangle$ jest funkcją denotacji, a $\triangle[\sigma]$ oznacza ciąg (indeksowany elementami zbioru $I \cup J \cup K$) wszystkich wartości funkcji σ. Jeśli $\mathfrak{M} = \langle M, \triangle[\sigma]\rangle$ jest strukturą relacyjną, to M nazywamy uniwersum $\mathfrak{M}$.

Wartościowaniem zmiennych w uniwersum M nazywamy dowolny nieskończony przeliczalny ciąg $w = \langle w_n\rangle$ elementów zbioru M. Gdy
$w = \langle w_n\rangle = \langle w_0, w_1, \ldots, w_{i-1}, w_i, w_{i+1}, \ldots\rangle$
jest wartościowaniem w M oraz $m \in M$, to przez w_m^i oznaczamy wartościowanie
$\langle w_0, w_1, \ldots, w_{i-1}, m, w_{i+1}, \ldots\rangle$.

Jeśli t jest termem sygnatury σ, $\langle M, \triangle[\sigma]\rangle$ strukturą relacyjną sygnatury σ oraz $w = \langle w_i\rangle$ jest wartościowaniem zmiennych w M, to *wartość termu t w strukturze $\langle M, \triangle[\sigma]\rangle$ przy wartościowaniu w*, oznaczana przez $\triangle_w(t)$ określona jest indukcyjnie:

- gdy t jest zmienną x_i, to $\triangle_w(t) = w_i$;
- gdy t jest stałą a_k, to $\triangle_w(t) = \triangle(a_k)$;
- gdy t jest termem złożonym postaci $f_j^{n_j}(t_1, \ldots, t_{n_j})$, gdzie $t_1, \ldots, t_{n_j}$ są termami, to $\triangle_w(t) = \triangle(f_j^{n_j})(\triangle_w(t_1), \ldots, \triangle_w(t_{n_j}))$.

Można pokazać, że wartość termu przy danym wartościowaniu zmiennych zależy jedynie od wartości nadanych przy tym wartościowaniu zmiennym występującym w rozważanym termie.

Niech $\mathfrak{M} = \langle M, \triangle[\sigma]\rangle$ będzie strukturą relacyjną sygnatury σ, w wartościowaniem w M, a A formułą sygnatury σ. Definicja relacji $\mathfrak{M} \models_w A$ *spełniania formuły A w strukturze $\mathfrak{M}$ przez wartościowanie w* ma następującą postać indukcyjną:

(a*) $\mathfrak{M} \models_w P_i^{n_i}(t_1, \ldots, t_{n_i})$ wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi $\triangle(P_i^{n_i})(\triangle_w(t_1), \ldots, \triangle_w(t_{n_i}))$;

(b*) $\mathfrak{M} \models_w (A) \wedge (B)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_w A$ oraz $\mathfrak{M} \models_w B$;

(c*) $\mathfrak{M} \models_w (A) \vee (B)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_w A$ lub $\mathfrak{M} \models_w B$;

(d*) $\mathfrak{M} \models_w (A) \to (B)$ wtedy i tylko wtedy, gdy nie zachodzi $\mathfrak{M} \models_w A$ lub zachodzi $\mathfrak{M} \models_w B$;

(e*) $\mathfrak{M} \models_w \neg(A)$ wtedy i tylko wtedy, gdy nie zachodzi $\mathfrak{M} \models_w A$;

(f*) $\mathfrak{M} \models_w \forall x_i\ (A)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_{w_m^i} A$ dla każdego $m \in M$;

(g*) $\mathfrak{M} \models_w \exists x_i\ (A)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_{w_m^i} A$ dla pewnego $m \in M$.

Ćwiczenie. Podaj definicję dla przypadku $\mathfrak{M} \models_w (A) \equiv (B)$.

Jeśli $\mathfrak{M} \models_w A$ dla każdego wartościowania w, to mówimy, że formuła A jest *prawdziwa* w $\mathfrak{M}$ i piszemy wtedy $\mathfrak{M} \models A$. Piszemy $\mathfrak{M} \not\models A$, gdy nie zachodzi $\mathfrak{M} \models A$. Łatwo pokazać, że gdy A jest zdaniem (tj. formułą bez zmiennych wolnych), to A jest prawdziwa w $\mathfrak{M}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_w A$ dla co najmniej jednego wartościowania w. Mówimy, że zdanie A jest *fałszywe* w $\mathfrak{M}$, gdy nie jest ono prawdziwe w $\mathfrak{M}$.

Tautologią (klasycznego rachunku predykatów sygnatury σ) nazywamy każdą formułę (sygnatury σ), która jest prawdziwa we wszystkich strukturach relacyjnych (sygnatury σ).

Jeśli $\mathfrak{M} \models A$ dla wszystkich A ze zbioru Ψ, to mówimy, że $\mathfrak{M}$ jest *modelem* Ψ i piszemy $\mathfrak{M} \models \Psi$. Mówimy, że A *wynika logicznie* z Ψ wtedy i tylko wtedy, gdy każdy model Ψ jest też modelem $\{A\}$.

Uwaga terminologiczna. W polskiej literaturze przedmiotu terminów *struktura relacyjna*, *system relacyjny* oraz *struktura algebraiczna* używa się wymiennie. Gdy sygnatura nie zawiera predykatów, to mówimy o *algebrach*, gdy zaś sygnatura nie zawiera ani stałych ani symboli funkcyjnych, to mówimy o strukturach relacyjnych *czystych*.

Uwaga notacyjna. W dalszym ciągu będziemy używać pewnych, powszechnie stosowanych, uproszczeń notacyjnych. Omówione zostaną one podczas wykładów.

1.3. Uniwersa Herbranda

Podane wyżej pojęcia semantyczne należą do standardu logiki matematycznej. Omawiana na wykładzie metoda drzew semantycznych czyni użytek z *podstawieniowej interpretacji kwantyfikatorów*. Związane są z nią pewne szczególne interpretacje języka KRP.

Jeśli S jest dowolnym zbiorem formuł języka KRP (ustalonej sygnatury), to przez *uniwersum Herbranda* dla S rozumiemy zbiór H_S określony indukcyjnie następująco:

(i) jeśli stała indywiduowa a_k występuje w jakiejś formule ze zbioru S, to $a_k \in H_S$

(ii) jeśli $t_1, \ldots, t_{n_j}$ są dowolnymi termami należącymi do H_S, to $f_j^{n_j}(t_1, \ldots, t_{n_j})$ także należy do H_S, dla dowolnego symbolu funkcyjnego $f_j^{n_j}$.

Jeśli w formułach z S nie występuje żadna stała indywiduowa, to warunek (i) definicji zbioru H_S zastępujemy warunkiem: $a_k \in H_S$ dla dowolnie wybranej stałej indywiduowej a_k.

Jeśli w formułach z S występuje co najmniej jeden symbol funkcyjny, to H_S jest zbiorem nieskończonym.

Uniwersum Herbranda dla danego zbioru formuł S jest zatem zbiorem wszystkich termów bez zmiennych utworzonych (z użyciem symboli funkcyjnych) ze stałych indywiduowych występujących w formułach zbioru S.

Interpretacją Herbranda dla zbioru formuł S nazywamy interpretację $\langle H_S, \Delta_S \rangle$ spełniającą następujące warunki:

$\Delta_S(a_k) = a_k$ dla dowolnej stałej indywiduowej a_k należącej do H_S;

$\Delta_S(f_j^{n_j}(t_1, \ldots, t_{n_j})) = f_j^{n_j}(t_1, \ldots, t_{n_j})$ dla dowolnych termów $t_1, \ldots, t_{n_j}$ należących do H_S.

Modelem Herbranda dla zbioru formuł S nazywamy każdą interpretację Herbranda dla S, w której prawdziwe są wszystkie formuły z S.

Zauważmy, że uniwersa Herbranda tworzone są z wyrażeń języka KRP.

1.4. Zbiory Hintikki

W metodzie drzew semantycznych wykorzystuje się także podany niżej ważny Lemat Hintikki.

Niech S będzie dowolnym zbiorem formuł języka KRP (ustalonej sygnatury). Mówimy, że S jest *zbiorem Hintikki*, wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzą następujące warunki:

(i) jeśli A jest formułą atomową bez zmiennych wolnych, to A nie należy do S lub $\neg(A)$ nie należy do S

(ii) jeśli $(A) \wedge (B)$ należy do S, to A należy do S oraz B należy do S

(iii) jeśli $(A) \vee (B)$ należy do S, to A należy do S lub B należy do S

(iv) jeśli $\forall x_n\ (A)$ należy do S, to $A(a_k/x_n)$ należy do S, dla każdej stałej indywiduowej a_k

(v) jeśli $\exists x_n\ (A)$ należy do S, to $A(a_k/x_n)$ należy do S, dla co najmniej jednej stałej indywiduowej a_k.

W powyższych punktach (iv) oraz (v) wyrażenie $A(a_k/x_n)$ jest wyrażeniem powstającym z formuły A poprzez zastąpienie w niej wszystkich wolnych wystąpień zmiennej x_n stałą indywiduową a_k.

Lemat Hintikki. *Każdy zbiór Hintikki ma model.*

Dowód Lematu Hintikki podany zostanie w rozdziale IV skryptu. Jego znajomość nie będzie wymagana na egzaminie.

2. Propedeutycznie o metodzie drzew semantycznych

Uwagi tego punktu mają charakter jedynie tymczasowy, w związku z planowanym umieszczeniem niniejszych notatek na stronie internetowej Zakładu Logiki Stosowanej UAM, dla ewentualnego pożytku studentek i studentów. Pozwolę sobie dodać, że w przygotowaniu (do umieszczenia na wymienionej stronie internetowej) są także odpowiedzi do zestawów egzaminacyjnych z *Logiki Matematycznej* z lat akademickich 2000–2001, 2001–2002, 2003–2004 oraz 2004–2005.[1] Materiały te zawierają nieco standardowych zadań dotyczących zastosowań metody drzew semantycznych w klasycznym rachunku zdań.

2.1. Drzewa w logice

Drzewa to *grafy* pewnej szczególnej postaci. O grafach mówiono Wam na zajęciach ze *Wstępu do matematyki.* Z różnego typu grafami oraz drzewami spotykaliście się Państwo także na wykładach ze *Wstępu do językoznawstwa.* Każde z Was ma też swoje *drzewo genealogiczne*; niektórzy się nimi szczycą, inni się ich wstydzą, większości to oczywiście zwisa.

2.1.1. Drzewa — kilka definicji

W rozdziałach II oraz III przygotowywanego skryptu wykład ma charakter *propedeutyczny*, natomiast w rozdziale IV prezentacja podlega większym rygorom ścisłości. Podamy teraz podstawowe definicje dotyczące drzew, jako pewnych konstruktów matematycznych. W dalszej części niniejszych notatek, tj. w podrozdziałach III.1.–III.5. stosowane będą pewne uproszczenia, omawiane na bieżąco.

Grafem nazywamy dowolną parę $\langle X, R\rangle$, gdzie X jest zbiorem, a R jest podzbiorem $X \times X$. Elementy zbioru X nazywamy ***wierzchołkami***, a elementy zbioru R ***krawędziami*** grafu $\langle X, R\rangle$.

Drzewem (o korzeniu x_0) nazwiemy każdy układ $\langle X, R, x_0\rangle$ taki, że:

- $\langle X, R\rangle$ jest grafem;
- x_0 jest elementem R-najmniejszym w X;
- R jest przechodnia w X;
- R jest asymetryczna w X;
- R każdy element zbioru $X - \{x_0\}$ ma dokładnie jeden bezpośredni R-poprzednik.

Niech $D = \langle X, R, x_0\rangle$ będzie drzewem o korzeniu x_0.

Liśćmi drzewa D nazywamy wszystkie te jego wierzchołki, które nie mają R-następników.

Jeśli $(x, y) \in R$ jest krawędzią w D, to x nazywamy ***przodkiem*** y, a y nazywamy ***potomkiem*** x. Jeśli $(x, y) \in R - R^2$ jest krawędzią w D, to x nazywamy ***bezpośrednim przodkiem*** y, a y nazywamy ***bezpośrednim potomkiem*** x.

[1] W roku akademickim 2002–2003 studentki i studenci w Instytucie Językoznawstwa UAM mieli przyjemność nie oglądać piszącego te słowa, w związku z jego wyjazdem służbowym. Także w roku akademickim 2005–2006 studentki i studenci w IJ UAM będą mieli podobną przyjemność.

Każdy podzbiór zbioru wierzchołków drzewa D, który jest uporządkowany liniowo przez R nazywamy ***łańcuchem*** w D. Każdy łańcuch maksymalny (względem inkluzji) w D nazywamy ***gałęzią*** w D.

Pniem drzewa D nazywamy część wspólną wszystkich gałęzi D.

Rzędem wierzchołka x nazywamy moc zbioru wszystkich potomków x. ***Rzędem*** drzewa D jest kres górny rzędów wszystkich wierzchołków drzewa D.

Drzewo D jest ***skończone***, jeśli zbiór jego wierzchołków jest skończony. Drzewo D jest ***nieskończone***, jeśli zbiór jego wierzchołków jest nieskończony. Drzewo D jest ***rzędu skończonego***, jeśli jego rząd jest liczbą skończoną.

Każde drzewo, w którym każdy wierzchołek nie będący liściem ma najwyżej dwóch bezpośrednich potomków nazywamy ***drzewem nierozwojowym w sensie watykańskim***, w skrócie: ***nw-drzewem***. Każde drzewo, w którym każdy wierzchołek nie będący liściem ma dokładnie dwóch bezpośrednich potomków nazywamy ***drzewem dwójkowym***.

Ważnym twierdzeniem, wykorzystywanym w metodzie drzew semantycznych jest następujący:

Lemat Königa.

Jeśli D jest drzewem rzędu skończonego i dla każdej liczby naturalnej n w D istnieją łańcuchy o co najmniej n elementach, to D ma łańcuch nieskończony.

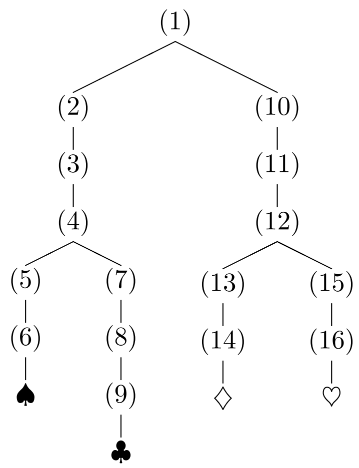
Mówimy, że $\langle Y, Q, y_0 \rangle$ jest ***poddrzewem*** drzewa $\langle X, R, x_0 \rangle$, gdy:

1) $Y \subseteq X$, $Q = R \cap Y^2$

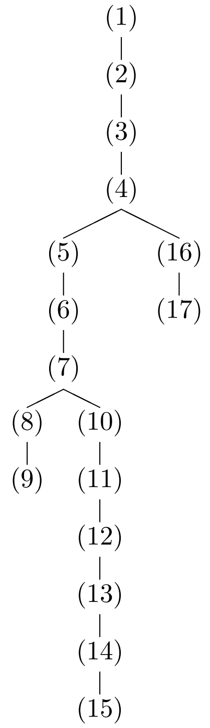
2) $\langle Y, Q, y_0 \rangle$ jest drzewem o wierzchołku y_0.

Graficzne reprezentacje drzew są rysunkami, na których wierzchołki (jakoś znakowane — punktami, liczbami, formułami, itd.) połączone są liniami, odpowiadającymi krawędziom. Przy tym, jeśli $\langle X, R, x_0 \rangle$ jest drzewem, to na rysunku zaznaczamy tylko krawędzie należące do $R - R^2$ (przy tym, poprzedniki R umieszczane są nad następnikami).

Dla przykładu, pokażmy dwa rysunki drzew:



W tym drzewie są cztery gałęzie, zaczynające się w korzeniu drzewa (wierzchołek oznaczony przez (1)) i kończące się liśćmi drzewa: ♣, ♢, ♡ oraz ♠. Pień drzewa jest tu zbiorem jednoelementowym: $\{(1)\}$.



W drzewie powyższym są trzy gałęzie, zaczynające się w korzeniu drzewa (wierzchołek oznaczony przez (1)), kończące się liśćmi: (9), (15) oraz (17). Pień drzewa stanowią wierzchołki o numerach: (1), (2), (3) oraz (4).

Wspomnijmy na marginesie, że dla dowolnego drzewa można liniowo uporządkować wszystkie jego wierzchołki (odpowiednio je kodując). Wiele algorytmów kombinatorycznych może mieć zastosowanie w metodzie drzew semantycznych.

W rozdziałach II i III skryptu, w związku z ich propedeutycznym charakterem, będziemy używali sformułowań intuicyjnych, przyjaznych dla Humanistek.[2] W rozdziale IV metoda drzew semantycznych zostanie opisana beznamiętnym językiem fachowym.

2.1.2. Drzewa syntaktyczne

Drzewa syntaktyczne są reprezentacjami budowy składniowej formuł. Jak pamiętają Państwo z wykładów, formuły używane w językach logiki są *jednoznaczne składniowo*.

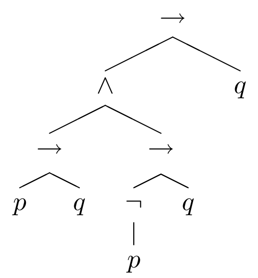
Rozważmy na przykład formułę, która od lat zajmuje pierwsze miejsce na liście najważniejszych aplikacyjnie tautologii w Instytucie Językoznawstwa UAM:[3]

$$((p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)) \rightarrow q$$

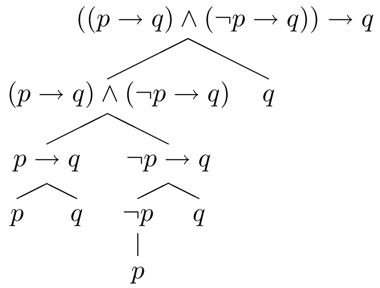
(zgodnie ze zwyczajem, piszemy $\neg p$ zamiast $\neg(p)$). Jej budowa składniowa reprezentowana jest w powyższym zapisie przez nawiasy. Może być także reprezentowana poprzez drzewo. W wierzchołku umieszczamy spójnik główny formuły, a poszczególne wierzchołki drzewa znakowane są albo spójnikami głównymi kolejnych podformuł rozważanej formuły, albo formułami syntaktycznie prostymi — w tym przypadku, zmiennymi zdaniowymi p oraz q. Zauważmy, że te ostatnie są liśćmi drzewa:

[2] Używany *passim* w tych notatkach zwrot *Humanistka* (zawsze z dużej litery!) ***nie ma*** pejoratywnego znaczenia. Stosujemy to określenie na wyraźne, stanowcze i szczere (?) życzenie naszego audytorium.

[3] Pozwalamy sobie, nie bez powodu, nadać jej uroczystą nazwę prawa *Demokratycznego Upoważnienia Poprzez Aplauz.*



Inną jeszcze reprezentacją drzewową rozważanej formuły będzie drzewo, w którego korzeniu umieszczamy całą wyjściową formułę, a w poszczególnych pozostałych wierzchołkach — jej podformuły:



Każda z powyższych reprezentacji ma swoje odpowiedniki np. w analizach składniowych wyrażeń języków naturalnych: proszę wspomnieć np. drzewa dependencji, drzewa składników bezpośrednich, itp.

2.1.3. Drzewa dowodowe

Jak pamiętamy z wykładów, *dowodem* (w danym systemie logicznym, wyznaczonym przez aksjomaty Ax oraz reguły inferencji RI) jakiejś formuły A ze zbioru formuł X oraz aksjomatów Ax jest dowolny *ciąg* formuł $\langle A_1, A_2, \ldots, A_n \rangle$ taki, że:

- A jest tożsama z A_n;
- każda z formuł A_k tego ciągu jest jednej z trzech postaci:
  - jest elementem zbioru X;
  - jest jednym z aksjomatów z Ax;
  - jest wnioskiem reguły wnioskowania z RI, której przesłankami są formuły występujące w powyższym ciągu przed A_i.

Dowody również można reprezentować za pomocą drzew. Dotyczy to nie tylko dowodów w stylu hilbertiańskim, ale także dowodów innych rodzajów (posługujących się np. dedukcją naturalną lub rachunkami sekwentów). Ograniczymy się do jednego przykładu — reprezentacji dowodu formuły $A \to A$ w rachunku zdań z regułą *modus ponens* jako jedyną regułą inferencji oraz schematami aksjomatów:[4]

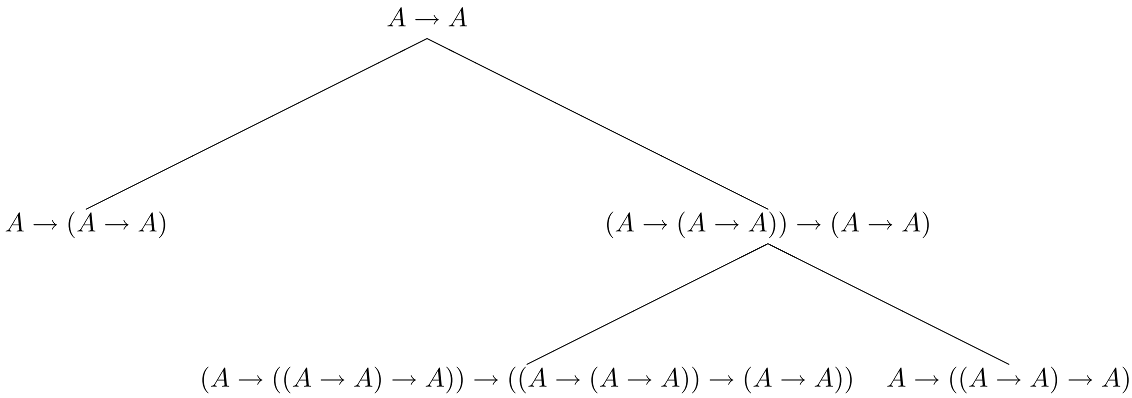
$A \to (B \to A)$	prawo poprzednika
$\neg A \to (A \to B)$	prawo Dunsa Scotusa
$(\neg A \to A) \to A$	prawo Claviusa
$(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$	prawo Fregego

[4] Przykład ten cytujemy za: Grażyna Mirkowska *Elementy matematyki dyskretnej.* Wydawnictwo Polsko-Japońskiej Wyższej Szkoły Technik Komputerowych, Warszawa 2003, strony 122–123. Od tego momentu stosujemy zwyczajowe uproszczenia dotyczące nawiasów.

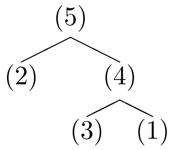
Dowodem formuły $A \to A$ z powyższych aksjomatów jest np. następujący ciąg formuł:

(1)	$A \to ((A \to A) \to A)$	prawo poprzednika
(2)	$A \to (A \to A)$	prawo poprzednika
(3)	$(A \to ((A \to A) \to A)) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$	prawo Fregego
(4)	$(A \to (A \to A)) \to (A \to A)$	z (1) i (3) na mocy *modus ponens*
(5)	$A \to A$	z (2) i (4) na mocy *modus ponens*

Temu dowodowi odpowiada następujące drzewo, w którego korzeniu znajduje się dowodzona formuła, liście są aksjomatami, a pozostałe wierzchołki drzewa otrzymujemy jako wnioski reguły inferencji stosowanej do potomków tego wierzchołka:



Jeśli zamiast formuł tworzących ten dowód użyjemy ich numerów, to stosowne drzewo wygląda tak:



Drzewa dowodowe rysuje się zazwyczaj inaczej niż powyższe: korzeń umieszcza się na dole, liście na górze. Zamiast łączenia formuł liniami, stosuje się też zwykle kreski poziome, umieszczając nad kreskami przesłanki, a pod nimi wnioski używanych reguł. Tak więc, powyższe drzewo dowodowe zapisywane jest zwykle tak:

$$\dfrac{(2) \qquad \dfrac{(1) \qquad (3)}{(4)}}{(5)}$$

Ćwiczenie. Wpisz formuły w miejsce ich numerów i kontempluj otrzymany rysunek.

Także dowody przeprowadzane wedle innych zasad (np. *dedukcji naturalnej* lub *rachunku sekwentów Gentzena*) reprezentować można stosownymi drzewami.

2.1.4. Drzewa semantyczne

Drzewa semantyczne mają wiele wspólnego zarówno z drzewami syntaktycznymi, jak i z drzewami dowodowymi.[5] Właściwie, drzewa semantyczne ***są*** pewnego rodzaju dowodami.

Jak Państwo pamiętają z wykładów semestru zimowego, dla dowolnej formuły A języka KRZ i dowolnego wartościowania w zmiennych zdaniowych, wartość formuły A przy tym wartościowaniu jest jednoznacznie określona.[6] Jeśli pamiętasz tabelki prawdziwościowe spójników logicznych, to obliczenie wartości dowolnej formuły przy danym wartościowaniu wykonać możesz całkiem mechanicznie, bezmyślnie. Jest to przy tym procedura typu *bottom up* — ustalasz kolejno wartości coraz bardziej złożonych formuł. W metodzie drzew semantycznych mamy do czynienia z procedurą odwrotną: *top to bottom*, w tym sensie, że znając wartość pewnej formuły ustalamy jakie są wartości jej podformuł. Dla przykładu, jeśli implikacja $A \rightarrow B$ jest fałszywa przy danym wartościowaniu zmiennych zdaniowych, to przy tymże wartościowaniu formuła A jest prawdziwa, a formuła B fałszywa. A jeśli implikacja $A \rightarrow B$ jest prawdziwa przy danym wartościowaniu zmiennych zdaniowych, to przy tymże wartościowaniu ***nie może*** być tak, aby A była prawdziwa i B fałszywa. To z kolei oznacza, że zachodzi co najmniej jedno z dwojga: bądź A jest fałszywa, bądź B jest prawdziwa.[7]

Podobnie, jeśli alternatywa $A \vee B$ jest prawdziwa przy danym wartościowaniu zmiennych zdaniowych, to przy tymże wartościowaniu bądź A jest prawdziwa, bądź B jest prawdziwa. Jeśli natomiast alternatywa $A \vee B$ jest fałszywa przy danym wartościowaniu zmiennych, to przy tymże wartościowaniu zarówno A jak i B są fałszywe.

Drzewo semantyczne formuły A jest drzewem nierozwojowym w sensie watykańskim, w którego wierzchołku umieszczamy formułę A i którego pozostałe wierzchołki są podformułami lub negacjami podformuł formuły A; ile jest takich wierzchołków i jak są one połączone krawędziami określają precyzyjne reguły, omówione w podrozdziale III.1. Ograniczmy się w tym miejscu do jednego przykładu; rozważmy mianowicie zaprzeczenie podanego wyżej prawa *Demokratycznego Upoważnienia Poprzez Aplauz*, czyli rozważmy formułę:

$$\neg(((p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)) \rightarrow q).$$

Jeśli przypuścimy, że jest ona prawdziwa (przy jakimś wartościowaniu zmiennych), to musimy kolejno uznać, że (przy tymże wartościowaniu):

(1) formuła $((p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)) \rightarrow q$ jest fałszywa;

(2.1) formuła $(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)$ jest prawdziwa, a jednocześnie (2.2) formuła q jest fałszywa;

(3.1) formuła $p \rightarrow q$ jest prawdziwa oraz (3.2) formuła $\neg p \rightarrow q$ jest prawdziwa;

(4) skoro $p \rightarrow q$ prawdziwa, to bądź: (4.1) p fałszywa, bądź (4.2) q prawdziwa;

(5) warunki (2.2) oraz (4.2) są wzajem sprzeczne;

(6) skoro $\neg p \rightarrow q$ prawdziwa, to bądź: (6.1) $\neg p$ fałszywa, bądź (6.2) q prawdziwa;

(7) warunki (2.2) oraz (6.2) są wzajem sprzeczne;

(8) skoro $\neg p$ fałszywa (z (6.1)), to (8.1) p prawdziwa;

(9) warunki (4.1) oraz (8.1) są wzajem sprzeczne;

(10) przypuszczenie (1) musimy odrzucić;

(11) nie ma wartościowania, przy którym formuła: $\neg(((p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)) \rightarrow q)$ byłaby prawdziwa;

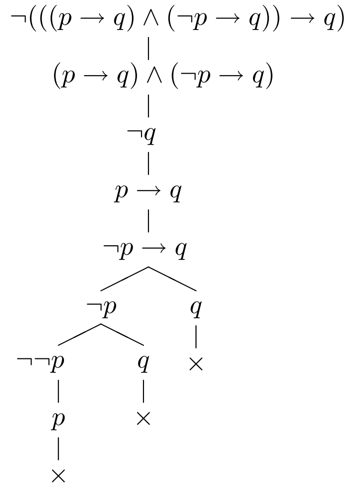
(12) zatem formuła $((p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)) \rightarrow q$ jest prawdziwa przy każdym wartościowaniu.

Powyższe rozumowanie reprezentowane może być poprzez drzewo następującej postaci:

[5] Związki między drzewami semantycznymi a systemami dowodowymi, w tym także tymi wykorzystującymi *metodę rezolucji*, są omawiane w rozdziale IV skryptu.

[6] Zobacz zamieszczoną poniżej, w punkcie 4, ściągę z semantyki KRZ.

[7] Nie jest jednak konieczne uwzględnianie ***trzech*** odpowiadających tej sytuacji przypadków — wystarczą nam drzewa nierozwojowe w sensie watykańskim.



Gałęzie tego drzewa odpowiadają ciągom kroków przeprowadzanego wyżej rozumowania. W miejscach, gdzie dany wierzchołek ma dwóch potomków, odpowiadający tej sytuacji krok rozumowania polegał na rozpatrzeniu alternatywy przypadków. Każda gałąź tego drzewa kończy się liściem $\times$, umownie oznaczającym, iż na gałęzi jest para formuł wzajem sprzecznych.

Proszę zauważyć, że krok (8) w powyższym rozumowaniu jest zbędny: skoro ustaliliśmy w (4.1), że p jest fałszywa oraz w (6.1), że $\neg p$ jest fałszywa, to już w tym momencie otrzymaliśmy sprzeczność: nie ma wartościowania, przy którym p oraz $\neg p$ są obie prawdziwe.

Rozpatrzmy jeszcze jeden tylko przykład: sprawdźmy, czy formuła

$$(p \to q) \wedge (p \vee q)$$

jest prawdziwa przy jakimś wartościowaniu. Rozumujemy wtedy tak:

(1) jeśli $(p \to q) \wedge (p \vee q)$ prawdziwa, to (1.1) $p \to q$ prawdziwa oraz (1.2) $p \vee q$ prawdziwa;

(2) skoro $p \to q$ prawdziwa, to bądź: (2.1) p fałszywa, bądź (2.2) q prawdziwa;

(3) w przypadku (2.1) mamy, skoro $p \vee q$ prawdziwa, to bądź: (3.1.) p prawdziwa, bądź (3.2) q prawdziwa;

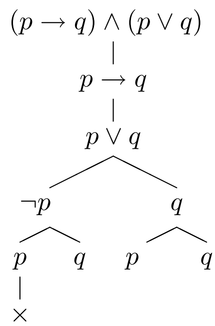
(4) w przypadku (2.2) mamy, skoro $p \vee q$ prawdziwa, to bądź: (4.1) p prawdziwa, bądź (4.2) q prawdziwa;

(5) przypadki (2.1) oraz (3.1) są wzajem sprzeczne;

(6) wszystkie (trzy) pozostałe powyższe przypadki są możliwe;

(7) formuła $(p \to q) \wedge (p \vee q)$ jest prawdziwa przy pewnych wartościowaniach zmiennych zdaniowych.

Rozumowanie to reprezentowane jest przez drzewo:



Jak z takiego drzewa odszukać *wszystkie* wartościowania, przy których formuła z korzenia jest prawdziwa piszemy w rozdziale II.

Dodajmy jeszcze parę ogólnych uwag o metodzie drzew semantycznych. Dwie najważniejsze cechy tej metody to:[8]

- apagogiczność;
- analityczność.

Apagogiczność polega na tym, że omawiana metoda jest ***metodą nie wprost***: sprowadza się do ***wykluczania*** zajścia pewnych sytuacji. W pierwszym z rozważanych wyżej przykładów ***wykluczyliśmy***, że prawo *Demokratycznego Upoważnienia Poprzez Aplauz* jest przy jakimkolwiek wartościowaniu zmiennych zdaniowych fałszywe. W drugim z powyższych przykładów ***wykluczyliśmy***, że formuła $(p \rightarrow q) \wedge (p \vee q)$ jest fałszywa przy wszystkich wartościowaniach. O różnicach między metodami wprost i nie wprost (i o przewagach tych drugich) słyszeliście Państwo na wykładach w ponure piątkowe przedpołudnia semestru zimowego.

Analityczność metody polega na tym, że przy ustalaniu własności semantycznych formuł (tu: wykluczaniu, że są prawdziwe lub wykluczaniu, że są fałszywe) odwołujemy się jedynie do własności semantycznych ***podformuł*** (oraz negacji podformuł) badanej formuły.

Jest pewien problem natury terminologicznej. To, co nazywamy w tych notatkach *metodą drzew semantycznych* nazywane bywa także (a właściwie: *częściej* jest nazywane) *metodą tablic analitycznych*, *metodą tablic semantycznych*, *metodą tablic Smullyana*, itd. W niektórych ujęciach, termin *drzewo semantyczne* ma nieco inne od przyjętego tutaj znaczenie. O sprawach tych mówimy w rozdziale IV.[9]

Stosowana w tych notatkach notacja omówiona jest szczegółowo w podrozdziale III.1. (plik krp311.pdf). Ma swoje zalety i wady (względem innych używanych w literaturze notacji). Jak dotąd, sprawdzała się dość dobrze w praktyce dydaktycznej.[10] Więcej o kwestiach notacji — w rozdziale I skryptu.

2.2. O historii i zastosowaniach metody

Pierwsze użycia omawianej metody (około pół wieku temu) wiąże się zwykle z nazwiskami E. Betha, K. Schütte'go, J. Hintikki oraz S. Kripke'go. Informacje historyczne znaleźć można np. w podanych niżej (w 2.3.) pozycjach bibliograficznych: *Handbook of Tableau Methods* 1999, Marciszewski, Murawski 1995, Annelis 1990. Największą popularność omawiana metoda (pod nazwą *tablic analitycznych*) zyskała dzięki pracom Raymonda Smullyana (np. Smullyan 1968). Logicy polscy także dość wcześnie zajmowali się (różnymi odmianami) tablic analitycznych (zobacz np. Rasiowa, Sikorski 1960, Lis 1960, Pawlak 1965).

W rozdziale IV skryptu staramy się m.in. skromnie zwrócić uwagę na związki omawianej metody z niektórymi wcześniejszymi konstrukcjami używanymi podczas tworzenia się paradygmatu logiki pierwszego rzędu w wieku dwudziestym.

W części V skryptu omawiamy nieco dokładniej zastosowania metody drzew semantycznych (np. w automatycznym dowodzeniu twierdzeń oraz w badaniu poprawności programów). O problematyce tej informuje obszernie np. *Handbook of Automated Reasoning* 2001. Zwięzłe informacje znaleźć można np. w Ben-Ari 2005.

2.3. Wybrane pozycje bibliograficzne

Obszerną bibliografię zawiera np. *Handbook of Tableau Methods* 1999 (zobacz na poniższej liście). Tu ograniczymy się do wyliczenia niektórych opracowań o charakterze przede wszystkim podręcznikowym oraz wybranych prac związanych z początkami omawianej metody.

[8] W przypadku KRZ dochodzi jeszcze *algorytmiczność*, w przypadku KRP jedynie *półalgorytmiczność*.

[9] Choć jestem *ortodoksyjnym ateistą staczającym się niekiedy (np. w piątkowe wieczory) w agnostycyzm*, to nie uważam się za ortodoksa w kwestiach terminologicznych i dopuszczam zmianę terminologii, pod naciskiem ewentualnych Czytelników tych notatek.

[10] W rozdziale III, tj. w niniejszych notatkach stosujemy notację nieco redundantną, ale przyjazną (jak mniemamy) dla Czytelniczek. W rozdziale IV bardziej przydatna jest notacja zaproponowana przez Smullyana: tzw. α-, β-, γ- δ-formuły.

Annelis, I.A. 1990. From Semantic Tableaux to Smullyan Trees: A History of the Development of the Falsifiability Tree Method. *Modern Logic* **1**, 36–69.

Bell, J.L., Machover, M. 1977. *A Course in Mathematical Logic.* North-Holland Publishing Company, Amsterdam New York Oxford.

Ben-Ari, M. 2005. *Logika matematyczna w informatyce.* Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa.

Beth, E.W. 1995. *Semantic Entailment and Formal Derivability.* Mededelingen der Koninklijke Nederlandse Akademie van wetenschapen, afd. letterkunde, new series, vol. **18**, no. **13**, Amsterdam.

Fitting, M. 1990. *First-Order Logic and Automated Theorem Proving.* Springer Verlag, New York Berlin Heidelberg London Paris Tokyo Hong Kong.

Gentzen, G. 1935. Untersuchungen über das logische Schliessen. *Mathematische Zeitschrift* **39**, 176–210, 405–431.

Georgacarakos, G.N., Smith, R. 1979. *Elementary Formal Logic.* McGraw-Hill Book Company.

Handbook of Automated Reasoning. 2001. A. Robinson, A. Voronkov (eds.), Elsevier, Amsterdam London New York Oxford Paris Shannon Tokyo, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts.

Handbook of Tableau Methods. 1999. Edited by: D'Agostino, M., Gabbay, D.M., Hähnle, R., Posegga, J., Kluwer Academic Publishers, Dordrecht Boston London.

Hintikka, J. 1955. Form and Content in Quantification Theory. *Acta Philosophica Fennica* **8**, 7–55.

Hodges, W. 1977. *Logic.* Pelican Books.

Howson, C. 1997. *Logic with trees.* Routledge, London and New York.

Jeffrey, R. 1991. *Formal Logic: Its Scope and Limits.* McGraw-Hill, New York.

Kleene, S.C. 1967. *Mathematical Logic.* John Wiley & Sons, Inc. New York London Sydney.

Kripke, S. 1959. A Completeness Theorem in Modal Logic. *Journal of Symbolic Logic* **24**, 1–14.

Lis, Z. 1960. Wynikanie semantyczne a wynikanie formalne. *Studia Logica* **X**, 39–60.

Lorenzen, P. 1960. Logik und Agon. *Atti del XII Congresso Internationale di Filosofia* vol. **IV**, Firenze.

Marciszewski, W. (red.) 1987. *Logika formalna. Zarys encyklopedyczny z zastosowaniem do informatyki i lingwistyki.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Marciszewski, W. (red.) 1988^2. *Mała Encyklopedia Logiki.* Zakład Narodowy imienia Ossolińskich – Wydawnictwo, Wrocław Warszawa Kraków Gdańsk Łódź.

Marciszewski, W. 2002. On going beyond the first-order logic in testing the validity of its formulas. A case study. *Mathesis Universalis*, nr **11**: *On the Decidability of First Order Logic.*
www.calculemus.org/MathUniversalis/NS/11/Beyond.pdf

Marciszewski, W. 2004–2005. *Logika 2004/2005.* Teksty wykładów zamieszczone na stronie:
www.calculemus.org/lect/logika04-05/index.html

Marciszewski, W., Murawski, R. 1995. *Mechanization of Reasoning in a Historical Perspective.* Rodopi, Amsterdam – Atlanta.

Pawlak, Z. 1965. *Automatyczne dowodzenie twierdzeń.* Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, Warszawa (seria: *Biblioteczka Matematyczna*, **19**).

Porębska, M., Suchoń, W. 1991. *Elementarne wprowadzenie w logikę formalną.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Priest, G. 2001. *An Introduction to Non-Classical Logic.* Cambridge University Press.

Quine, W.V. 1955. A proof procedure for quantification theory. *The Journal of Symbolic Logic* Volume **20**, Number **2**, 191–149.

Rasiowa, H., Sikorski, R. 1960. On the Gentzen Theorem. *Fundamenta Mathematicae* **48**, 58–69.

Rasiowa, H., Sikorski, R. 1963. *The Mathematics of Metamathematics.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Smullyan, R. 1968. *First-Order Logic.* Springer Verlag, Berlin.

Schütte, K. 1956. Ein System des verknüpfenden Schliessens. *Archiv für mathematische Logik und Grundlagenforschungen* **2**, 56–67.

Wang, H. 1960. Toward Mechanical Mathematics. *IBM Journal Research and Development* **4**, 2–22.

3. Uwagi organizacyjne — semestr letni 2004-2005 i egzamin

Uprzejmie zwracam uwagę, że materiał przewidziany do omówienia w semestrze letnim jest nieco trudniejszy od omówionego w semestrze zimowym. Pozwolę sobie zatem zalecić systematyczność i pilność w nauce. Ci z Państwa, którzy przebrną przez egzaminy i ukończą studia na naszej Uczelni tworzyć będą elitę intelektualną Rzeczpospolitej Polskiej, Unii Europejskiej i kto wie, czego jeszcze.

* * *

Zaleca się próbę samodzielnego rozwiązania zadań związanych z materiałem z punktów 1.1. oraz 1.2. powyżej zawartych w:

Barbara Stanosz: *Ćwiczenia z logiki.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa [kilkanaście wydań], zadania 58–77 oraz 93–103.

Igor A. Ławrow, Łarisa L. Maksimowa: *Zadania z teorii mnogości, logiki matematycznej i teorii algorytmów.* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2004, zadania 1–30 ze stron 89–95 oraz 1–45 ze stron 96–105.

Rozwiązanie zadań z pierwszej z wymienionych pozycji jest w zasięgu Państwa możliwości intelektualnych. Zadania z pozycji drugiej mogą wydawać się Państwu nieco trudniejsze.

* * *

Zaleca się także uczestnictwo w zajęciach. Przypominam, że od 6 do 10 czerwca 2005 roku przeprowadzę dodatkowe zajęcia przygotowujące do egzaminu. Pisemny egzamin proponuję przeprowadzić 13 lub 14 czerwca 2005 roku.

4. Tymczasowy dodatek: ściąga z semantyki KRZ

Dla kompletności niniejszych notatek dołączam do nich definicje wybranych podstawowych pojęć dotyczących semantyki klasycznego rachunku zdań.[11] Przypominam, że planowany skrypt ***nie jest*** podręcznikiem logiki; jego celem jest jedynie popularyzacja jednej z metod w logice (i jej zastosowaniach) używanych. Drzewom semantycznym w klasycznym rachunku zdań poświęcony jest rozdział II przygotowywanego skryptu.

4.1. Klasyczny rachunek zdań: semantyka

Język ***klasycznego rachunku zdań*** (w skrócie: KRZ) charakteryzujemy przez podanie jego ***alfabetu*** oraz zbioru [poprawnych] ***formuł***.

4.1.1. Alfabet

- zmienne zdaniowe, w nieograniczonej ilości: $p_1, p_2, p_3, \ldots$;
- spójniki (funktory) prawdziwościowe: $\neg$ (negacja), $\wedge$ (koniunkcja), $\vee$ (alternatywa), $\rightarrow$ (implikacja materialna), $\equiv$ (równoważność materialna);
- symbole pomocnicze — nawiasy: (oraz).

Wyrażeniem języka KRZ jest dowolny skończony ciąg symboli alfabetu KRZ. ***Wynikiem podstawienia*** w wyrażeniu

$$x_1x_2\ldots x_{i-1}x_ix_{i+1}\ldots x_n$$

wyrażenia $y_1y_2\ldots y_k$ za symbol x_i nazywamy wyrażenie

$$x_1x_2\ldots x_{i-1}y_1y_2\ldots y_kx_{i+1}\ldots x_n.$$

4.1.2. Formuły języka KRZ

1. Każda zmienna zdaniowa KRZ jest formułą języka KRZ.
2. Jeśli A oraz B są formułami języka KRZ, to formułami języka KRZ są również:
   $\neg(A), (A) \wedge (B), (A) \vee (B), (A) \rightarrow (B)$ oraz $(A) \equiv (B)$.
3. Nie ma innych formuł języka KRZ niż te, które powstają na mocy powyższych punktów 1 i 2.

4.1.3. UWAGI

- $\neg(A)$ nazywamy ***negacją*** formuły A. Gdy A jest zmienną zdaniową, to opuszczamy nawiasy.
- Formuły $(A) \wedge (B), (A) \vee (B), (A) \rightarrow (B)$ oraz $(A) \equiv (B)$ nazywamy, odpowiednio, ***koniunkcją, alternatywą, implikacją*** oraz ***równoważnością*** formuł A i B. Pierwszy argument implikacji nazywamy jej ***porzednikiem***, drugi ***następnikiem***. Argumenty koniunkcji, alternatywy oraz równoważności nazywamy ich ***członami***.
- Nie ma ograniczenia na długość formuł. Każda formuła jest skończonym ciągiem symboli. W praktyce, zamiast zmiennych z indeksami używamy kilku małych literek łacińskich (np.: p, q, r, s, t).
- Wybór takich, a nie innych spójników (spośród wszystkich dwudziestu) w prezentacji semantyki KRZ jest motywowany tradycją oraz względami pragmatycznymi.

[11] Pełniejsze omówienie tej problematyki znajdą Państwo np. w podręczniku: Tadeusz Batóg *Podstawy logiki.* Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2003, którego kilkadziesiąt egzemplarzy znajduje się w Bibliotece Instytutu Językoznawstwa UAM.

- Używamy tu notacji ***infiksowej*** (symbol spójnika stawiamy między symbolami argumentów, podobnie jak kazano nam to robić w wyrażeniach arytmetycznych w szkole. Używane są też inne systemy notacji — np. *prefiksowa* (zwana też ***polską***), w której symbol spójnika poprzedza jego argumenty; zbędne są wtedy nawiasy.
- ***Spójnikiem głównym*** formuły nazywamy ten z jej spójników, który nie występuje w argumencie żadnego innego spójnika w tej formule.
- Dla przejrzystości zapisu używać można kilku rodzajów nawiasów. Ich kształt nie jest istotny. W każdej formule liczba lewych nawiasów równa jest liczbie prawych nawiasów.
- Wszystkie formuły rachunku zdań są jednoznaczne składniowo: nie jest poprawną formułą np. $p \vee q \wedge r$; poprawne są natomiast zarówno $(p \vee (q \wedge r))$ jak i $((p \vee q) \wedge r)$.
- Dla prostoty zapisu, niektóre nawiasy zwykle opuszczamy. Stosujemy umowy dotyczące siły wiązania spójników.
- Używamy ***metazmiennych*** dla formuł języka KRZ — jak np. w indukcyjnej definicji formuł podanej wyżej.

4.1.4. Wartości logiczne

Zakładamy, że mamy do dyspozycji dwa różne obiekty. Nazywamy je ***wartościami logicznymi***: PRAWDĄ oraz FAŁSZEM. Nie pytamy, czym one są. Oczywiście, motywacja do takiego właśnie ich nazwania jest jasna: interesują nas związki między wyrażeniami językowymi określone przez ich prawdziwośś bądź fałszywość. Powszechnie przyjęta jest wygodna konwencja używania 1 oraz 0 na oznaczenie, odpowiednio, PRAWDY oraz FAŁSZU.

4.1.5. Wartościowania zmiennych

Wartościowaniem zmiennych zdaniowych w KRZ nazywamy dowolny ciąg nieskończony (a więc taki, którego elementy ponumerowane mogą byś liczbami $1, 2, 3, \ldots$) wartości logicznych.

4.1.6. Funkcje prawdziwościowe

Dowolną funkcję, która każdemu skończonemu ciągowi wartości logicznych przyporządkowuje wartość logiczną nazywamy ***funkcją prawdziwościową***. Zatem, funkcje prawdziwościowe mogą być jedno-, dwu-, trój-, itd. argumentowe.

Wszystkie funkcje prawdziwościowe jedno- oraz dwuargumentowe podają poniższe tabele.

arg	1	2	3	4
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Pierwsza kolumna tabeli podaje wszystkie wartości argumentu, kolumny o numerach 1–4 podają wartość dla tego argumentu każdej z czterech jednoargumentowych funkcji prawdziwościowych. Funkcja o wartościach z kolumny 3 nazywana jest NEGACJĄ. Oznaczmy ją symbolem Ng. Zatem:

$$Ng(0) = 1, \qquad Ng(1) = 0.$$

arg1	arg2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Pierwsze dwie kolumny podają wszystkie układy wartości argumentów, kolumny o numerach 1–16 podają wartość dla tego układu argumentów każdej z szesnastu dwuargumentowych funkcji prawdziwościowych.

Wprowadzamy oznaczenia dla niektórych z tych funkcji:

Funkcja o wartościach z kolumny	nazywana jest	i oznaczana
2	Koniunkcją	Kn
8	Alternatywą	Al
14	Implikacją	Im
10	Równoważnością	Rw

Zapamiętanie wartości wymienionych funkcji ułatwić powinna poniższa tabelka:

$Kn(x, y) = 1$	wtedy i tylko wtedy, gdy	$x = y = 1$
$Al(x, y) = 0$	wtedy i tylko wtedy, gdy	$x = y = 0$
$Im(x, y) = 0$	wtedy i tylko wtedy, gdy	$x = 1$ oraz $y = 0$
$Rw(x, y) = 1$	wtedy i tylko wtedy, gdy	$x = y$

4.1.7. UWAGI

- Symetria. Mamy: $Kn(x, y) = Kn(y, x)$ (podobnie dla Al oraz Rw). Natomiast $Im(1, 0) \neq Im(0, 1)$.
- Dla celów elementarza logicznego nie ma potrzeby rozważania funkcji prawdziwościowych więcej niż dwuargumentowych.
- Zamiast terminu ***alternatywa*** używa się też terminu ***alternatywa niewykluczająca***. Przez ***alternatywę wykluczającą*** rozumiemy negację równoważności: $Alw(x, y) = Ng(Rw(x, y))$. $Alw(x, y)$ ma więc wartość 1 wtedy i tylko wtedy, gdy dokładnie jeden z argumentów ma wartość 1 (lub, co na jedno wychodzi, gdy argumenty mają różne wartości).
- Poszczególne funkcje prawdziwościowe mogą być otrzymane jako złożenia innych. Na przykład, *każda* funkcja prawdziwościowa może być otrzymana z funkcji Ng oraz Kn, albo z Ng i Im, albo z Ng oraz Al.
- Widać, że istnieje odpowiedniość między spójnikami prawdziwościowymi a funkcjami prawdziwościowymi.

4.1.8. Wartość formuły

Niech For oznacza zbiór wszystkich formuł języka KRZ, a 2^ω zbiór wszystkich wartościowań. Jeśli w jest wartościowaniem, to niech w_i oznacza i-ty element ciągu w.

Funkcja $Val : For \times 2^\omega \longrightarrow \{0, 1\}$ przyporządkowuje każdej parze (A, w) złożonej z formuły A oraz wartościowania w jednoznacznie wyznaczoną wartość logiczną, nazywaną ***wartością formuły A przy wartościowaniu w***.

Definicja funkcji Val jest indukcyjna (tzw. ***indukcja strukturalna*** po budowie formuły A):

- $Val(p_i, w) = w_i$;
- $Val(\neg(A), w) = Ng(Val(A, w))$;
- $Val((A) \wedge (B), w) = Kn(Val(A, w), Val(B, w))$;
- $Val((A) \vee (B), w) = Al(Val(A, w), Val(B, w))$;
- $Val((A) \rightarrow (B), w) = Im(Val(A, w), Val(B, w))$;
- $Val((A) \equiv (B), w) = Rw(Val(A, w), Val(B, w))$.

Wartość formuły przy danym wartościowaniu zależy tylko od skończonej liczby elementów tego wartościowania (bo każda formuła zawiera jedynie skończoną liczbę zmiennych). Ustalanie wartości formuły przy danym wartościowaniu jest procedurą ***obliczalną***: dla dowolnej formuły oraz wartościowania można w skończonej liczbie prostych, mechanicznych kroków (jawnie opisanych w tabelkach prawdziwościowych dla spójników logicznych) ustalić wartość tej formuły przy tym wartościowaniu. Przy tym, jeśli formuła A zawiera n zmiennych zdaniowych, to przy ustalaniu jej wartości wystarczy brać pod uwagę najwyżej 2^n wartościowań.

4.1.9. Wynikanie logiczne w KRZ

> Formuła A ***wynika logicznie*** ze zbioru formuł X wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego wartościowania w dla którego wszystkie formuły ze zbioru X mają wartość 1 (Prawda), również formuła A ma przy tym wartościowaniu wartość 1.

Zatem, formuła A ***nie*** wynika logicznie ze zbioru formuł X wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje co najmniej jedno wartościowanie, przy którym wszystkie formuły ze zbioru X mają wartość 1 (Prawda), a formuła A ma wartość 0 (Fałsz).

4.1.10. Semantyczna niesprzeczność

> Zbiór formuł X jest ***semantycznie niesprzeczny***, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje wartościowanie, przy którym wszystkie formuły z tego zbioru mają wartość 1. W przeciwnym przypadku mówimy, że zbiór ten jest ***semantycznie sprzeczny***.

Zatem, zbiór formuł jest semantycznie sprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje wartościowanie przy którym wszystkie formuły z tego zbioru mają wartość 1.

4.1.11. Reguły wnioskowania

> Dowolna para złożona ze zbioru formuł (***przesłanek***) oraz z formuły (***wniosku***) nazywana jest ***regułą wnioskowania***.

Regułę o przesłankach $A_1, \ldots, A_n$ oraz wniosku B zapisujemy symbolicznie jako $\frac{A_1, \ldots, A_n}{B}$.

4.1.12. Niezawodne reguły wnioskowania

> Reguła wnioskowania jest ***niezawodna*** wtedy i tylko wtedy, gdy jej wniosek wynika logicznie z jej przesłanek. W przeciwnym przypadku mówimy, że reguła jest ***zawodna***.

Zatem:

- reguła jest niezawodna wtedy i tylko wtedy, gdy przy każdym wartościowaniu, przy którym wszystkie jej przesłanki mają wartość 1 również jej wniosek ma wartość 1;
- reguła jest zawodna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje co najmniej jedno wartościowanie przy którym wszystkie jej przesłanki mają wartość 1, a wniosek ma wartość 0;
- reguła jest niezawodna wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje wartościowanie przy którym wszystkie jej przesłanki mają wartość 1, a wniosek ma wartość 0.

W praktyce (w elementarzu logicznym) rozważamy jedynie takie reguły wnioskowania, których zbiory przesłanek są zbiorami skończonymi.

4.1.13. Tautologie KRZ

Formuła A jest ***tautologią*** KRZ (Prawem Logiki KRZ) wtedy i tylko wtedy, gdy $Val(A, w) = 1$ dla każdego wartościowania w.

Formuła A jest ***kontrtautologią*** KRZ wtedy i tylko wtedy, gdy $Val(A, w) = 0$ dla każdego wartościowania w.

4.1.14. Semantyczna równoważność formuł

Formuły A oraz B są ***semantycznie równoważne*** wtedy i tylko wtedy, gdy tautologią KRZ jest formuła $(A) \equiv (B)$.

Zatem, formuły A oraz B są semantycznie równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy $Val(A, w) = Val(B, w)$ dla każdego wartościowania w.

4.1.15. Twierdzenie o dedukcji

Reguła $\frac{A_1, \ldots, A_n}{B}$ jest niezawodna wtedy i tylko wtedy, gdy formuła $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow B$ jest tautologią KRZ.

Zatem, aby sprawdzić czy reguła $\frac{A_1, \ldots, A_n}{B}$ jest niezawodna wystarcza sprawdzić, czy jedna formuła, a mianowicie podana wyżej implikacja (której poprzednikiem jest koniunkcja wszystkich przesłanek rozważanej reguły, a następnikiem wniosek tej reguły) jest tautologią KRZ.

* * *

Jerzy Pogonowski
Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl