Metalogika

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
www.kognitywistyka.amu.edu.pl
http://logic.amu.edu.pl/index.php/Dydaktyka
pogon@amu.edu.pl

Rozstrzygalność

Plan wykładu

Podamy teraz niektóre konsekwencje twierdzeń omówionych w wykładzie poprzednim.

- Związki z teorią rekursji.
- Przykłady zdań prawdziwych w PA, które nie są dowodliwe w PA.
- Informacja o teoriach rozstrzygalnych i nierozstrzygalnych.
- Twierdzenie Churcha o nierozstrzygalności KRP.

Wspomniana problematyka ma olbrzymią literaturę. Zainteresowany czytelnik zechce do niej sięgnąć.

Rekurencyjna nieoddzielalność

- Mówimy, że zbiór X jest ***m-sprowadzalny*** do zbioru Y, gdy istnieje funkcja pierwotnie rekurencyjna f taka, że dla dowolnej n: $n \in X$ dokładnie wtedy, gdy $f(n) \in Y$. Jeśli dodatkowo f jest injekcją, to mówimy, że X jest ***1-sprowadzalny*** do Y.
- Powiemy, że zbiór Y jest ***uniwersalny*** dla klasy zbiorów $\mathcal{X}$, gdy każdy zbiór $X \in \mathcal{X}$ jest m-sprowadzalny do zbioru Y.
- Mówimy, że zbiory X oraz Y są ***rekurencyjnie oddzielalne***, gdy istnieje zbiór rekurencyjny Z taki, że: $X \subseteq Z$ oraz $Y \subseteq \omega - Z$ (czyli $Y \cap Z = \emptyset$).

- Przypominamy też, że wszystkie relacje rekurencyjne (a więc także wszystkie zbiory rekurencyjne) są mocno reprezentowalne w PA.

Rekurencyjna nieoddzielalność

Dla teorii T (która dopuszcza arytmetyzację składni) możemy przeprowadzić takie same konstrukcje, jak dla arytmetyki PA. W szczególności, zdefiniować można (rekurencyjną) relację $\mathrm{Dow}_T(b, a)$ zachodzącą dokładnie wtedy, gdy b jest numerem gödlowskim dowodu (na gruncie T) formuły o numerze gödlowskim a. Dalej, niech:

- $\mathrm{Tw}_T = \{a : \exists x\ \mathrm{Dow}_T(x, a)\}$.
- $\mathrm{NegTw}_T = \{a : \ \mathrm{Form}_T(a) \wedge \neg \exists x\ \mathrm{Fr}(a, x) \wedge \langle sn(\neg), a\rangle \in Tw_T\}$.

- Tw_T jest zatem zbiorem numerów gödlowskich twierdzeń teorii T.
- NegTw_T jest zbiorem numerów gödlowskich tych zdań, których negacje są twierdzeniami teorii T.

Rekurencyjna nieoddzielalność

Twierdzenie. *Nie istnieje rekurencyjny zbiór uniwersalny dla klasy wszystkich zbiorów rekurencyjnych.*

Zarys dowodu.

- Dla dowodu nie wprost przypuśćmy, że Y jest rekurencyjnym zbiorem uniwersalnym dla klasy wszystkich zbiorów rekurencyjnych.
- Niech $F(x, y)$ będzie funkcją rekurencyjną, uniwersalną dla klasy wszystkich jednoargumentowych funkcji pierwotnie rekurencyjnych.
- Niech $X_0 = \{n : F(n, n) \notin Y\}$. Wtedy X_0 jest rekurencyjny.
- Na mocy przypuszczenia dowodu nie wprost istnieje więc funkcja pierwotnie rekurencyjna f taka, że: $n \in X_0$ dokładnie wtedy, gdy $f(n) \in Y$.

Rekurencyjna nieoddzielalność

- Na mocy uniwersalności F istnieje liczba n_0 taka, że dla wszystkich x: $f(x) = F(n_0, x)$.
- Dla dowolnej n mamy więc:
  $n \in X_0$ dokładnie wtedy, gdy $F(n_0, n) \in Y$.
- Dla $n = n_0$ mamy w szczególności:
  - $n_0 \in X_0$ dokładnie wtedy, gdy $F(n_0, n_0) \in Y$ (na mocy definicji funkcji F).
  - $n_0 \in X_0$ dokładnie wtedy, gdy $F(n_0, n_0) \notin Y$ (na mocy definicji X_0).
- Otrzymana sprzeczność każe odrzucić przypuszczenie dowodu nie wprost. Ostatecznie zatem nie istnieje rekurencyjny zbiór uniwersalny dla klasy wszystkich zbiorów rekurencyjnych.

Rekurencyjna nieoddzielalność

Twierdzenie. *Jeśli wszystkie zbiory rekurencyjne są mocno reprezentowalne w T, to zbiory Tw_T oraz $NegTw_T$ nie są rekurencyjnie oddzielalne. W szczególności, zbiór numerów gödlowskich twierdzeń PA oraz negacji twierdzeń PA nie są rekurencyjnie oddzielalne.*

Zarys dowodu.

- Dla każdego zbioru rekurencyjnego X istnieje formuła $\psi_X(x)$ języka teorii T taka, że dla dowolnej n mamy:
- $n \in X$ dokładnie wtedy, gdy $T \vdash \psi_X(\overline{n})$,
- $n \notin X$ dokładnie wtedy, gdy $T \vdash \neg\psi_X(\overline{n})$.
- To z kolei oznacza, że dla dowolnej n:
  - $n \in X$ dokładnie wtedy, gdy $\ulcorner\psi_X(\overline{n})\urcorner \in \mathrm{Tw}_T$
  - $n \notin X$ dokładnie wtedy, gdy $\ulcorner\psi_X(\overline{n})\urcorner \in \mathrm{NegTw}_T$.

Rekurencyjna nieoddzielalność

- Otrzymujemy stąd równoważności:
  - $n \in X$ dokładnie wtedy, gdy $\mathrm{Sub}(\ulcorner \psi_X \urcorner, \ulcorner x \urcorner, \mathrm{num}(n)) \in \mathrm{Tw}_T$,
  - $n \notin X$ dokładnie wtedy, gdy $\mathrm{Sub}(\ulcorner \psi_X \urcorner, \ulcorner x \urcorner, \mathrm{num}(n)) \in \mathrm{NegTw}_T$.

- Funkcja $f(n) = \mathrm{Sub}(\ulcorner \psi_X \urcorner, \ulcorner x \urcorner, \mathrm{num}(n))$ jest pierwotnie rekurencyjna.

- X jest sprowadzalny (za pomocą f) do Tw_T (a $\omega - X$ jest sprowadzalny do NegTw_T), ponieważ:
  - $n \in X$ dokładnie wtedy, gdy $f(n) \in \mathrm{Tw}_T$
  - $n \notin X$ dokładnie wtedy, gdy $f(n) \in \mathrm{NegTw}_T$.

Rekurencyjna nieoddzielalność

- Gdyby istniał rekurencyjny zbiór Y oddzielający zbiory Tw_T i NegTw_T, to mielibyśmy:
  - jeśli $n \in X$, to $f(n) \in Y$
  - jeśli $n \notin X$, to $f(n) \in \omega - Y$.

- Wtedy: $n \in X$ dokładnie wtedy, gdy $f(n) \in Y$, czyli Y byłby uniwersalny dla klasy wszystkich zbiorów rekurencyjnych, co jest niemożliwe. Ostatecznie więc, Tw_T oraz NegTw_T nie są rekurencyjnie oddzielalne.

Na mocy powyższego twierdzenia możemy stwierdzić, jak złożone są zbiory: numerów gödlowskich twierdzeń oraz numerów gödlowskich negacji twierdzeń danej teorii.

Nierekurencyjność zbioru twierdzeń PA

- *Jeśli w teorii T wszystkie relacje rekurencyjne są mocno reprezentowalne, to zbiory: Tw_T numerów gödlowskich twierdzeń teorii T oraz $NegTw_T$ numerów gödlowskich negacji twierdzeń teorii T nie są rekurencyjne.*
- *W szczególności, zbiór numerów gödlowskich twierdzeń arytmetyki PA nie jest rekurencyjny. Podobnie, zbiór numerów gödlowskich negacji twierdzeń arytmetyki PA nie jest rekurencyjny.*

- Niech $\mathbb{T}$ oznacza zbiór numerów gödlowskich zdań języka PA prawdziwych w modelu standardowym $\mathfrak{N}_0$, zaś $\mathbb{F}$ zbiór numerów gödlowskich zdań języka PA fałszywych w tym modelu.
- Wiemy, że $\mathrm{Tw}_{PA} \subset \mathbb{T}$ (inkluzja właściwa). Zbiór Tw_{PA} jest rekurencyjnie przeliczalny, ale nie jest rekurencyjny. A jaki jest zbiór $\mathbb{T}$?

Zbiory zupełne, produktywne i twórcze

Mówimy, że zbiór $X \subseteq \omega$ jest:

- ***produktywny***, gdy istnieje funkcja rekurencyjna f taka, że dla wszystkich x, jeśli $W_x \subseteq X$, to $f(x) \in X - W_x$ (tu $(W_x)_{x \in \omega}$ jest standardowym wyliczeniem zbiorów rekurencyjnie przeliczalnych);
- ***twórczy***, gdy X jest rekurencyjnie przeliczalny, a jego dopełnienie $\omega - X$ jest zbiorem produktywnym.
- ***m-zupełny***, gdy X jest rekurencyjnie przeliczalny i każdy rekurencyjnie przeliczalny zbiór A jest m-sprowadzalny do X.

Wprost z definicji wynika, że:

- Jeśli X jest produktywny, to nie jest rekurencyjnie przeliczalny.
- Jeśli X jest twórczy, to nie jest rekurencyjny.

Twierdzenia a prawdy

- *Zbiór $\mathbb{T}$ jest produktywny. Zbiór $\mathbb{T}$ nie jest zatem rekurencyjnie przeliczalny.*
- *Jeśli PA jest niesprzeczna, to zbiór Tw_{PA} jest twórczy.*
- *Jeśli PA jest niesprzeczna, to zbiór Tw_{PA} jest m-zupełny.*
- Dowody tych twierdzeń znaleźć można np. w: Bell, Machover 1977, Cutland 1980, Hinman 2005, Odifreddi 1989, Rogers 1967, Soare 1987.

Twierdzenia metalogiczne omówione w poprzednim wykładzie pokazują, że istnieje istotna różnica między tym, co można udowodnić w PA, a tym, co jest prawdziwe w modelu standardowym PA. Natomiast wyżej wspomniane wyniki bliżej charakteryzują złożoność obliczeniową zbiorów: twierdzeń PA oraz zdań prawdziwych w modelu standardowym PA.

Twierdzenia a prawdy

- Zbiory produktywne to zbiory, które ***nie są rekurencyjnie przeliczalne „w sposób efektywny"***. Jeśli bowiem X jest produktywny, to istnieje funkcja rekurencyjna f taka, że dla każdego z rekurencyjnie przeliczalnych kandydatów W_x na bycie zbiorem X (czyli dla warunku $W_x \subseteq X$) znajdujemy liczbę $g(x)$ taką, że $g(x) \in X - W_x$, czyli element, którym X różni się od W_x.
- Zbiory twórcze to zbiory rekurencyjnie przeliczalne, które ***nie są rekurencyjne „w sposób efektywny"***. Jeśli bowiem X jest twórczy (a więc jego dopełnienie $\omega - X$ jest produktywne), to – ponieważ $\omega - X$ nie jest rekurencyjnie przeliczalny „w sposób efektywny" – nie ma szans na skorzystanie z Twierdzenia Posta (zbiór A jest rekurencyjny dokładnie wtedy gdy A oraz $\omega - A$ są rekurencyjnie przeliczalne).

Zdania prawdziwe, ale niedowodliwe w PA

Choć zdanie nierozstrzygalne Gödla podane jest w sposób konstruktywny, to uważa się, iż nie jest ono interesujące dla „normalnej" matematyki, gdyż ma „treść metatmatematyczną", a nie dotyczy problemów, którymi zajmujemy się w „zwykłej" teorii liczb.

- Jednym z problemów jest zatem poszukiwanie zdań nierozstrzygalnych na gruncie PA, które miałyby niebanalną treść matematyczną.
- Inny problem to poszukiwanie zdań nierozstrzygalnych metodami semantycznymi (bez odwołania się do procedury arytmetyzacji). Aby wykazać niezupełność PA wystarczy znaleźć zdanie ψ oraz modele $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ dla PA takie, że: $\mathfrak{A} \models \psi$ oraz $\mathfrak{B} \models \neg\psi$.

Twierdzenia Ramseya

- Dla $X \subseteq \omega$ przez $[X]^n$ oznaczamy rodzinę wszystkich n-elementowych podzbiorów X.
- ***Funkcją kolorującą*** nazywamy każdą funkcję $C : [X]^n \to \{0, 1, 2, \ldots, c-1\}$.
- ***Zbiorem jednorodnym*** (względem C) nazywamy taki podzbiór $Y \subseteq X$, dla którego funkcja C ma wartość stałą na $[Y]^n$.

- **Nieskończone Twierdzenie Ramseya.** *Niech $n, c > 0$. Dla dowolnej funkcji kolorującej $C : [\omega]^n \to \{0, 1, 2, \ldots, c-1\}$ istnieje nieskończony zbiór jednorodny względem C.* [Ma dowód w teorii mnogości.]
- **Skończone Twierdzenie Ramseya.** *Niech $m, c > 0$ oraz $s \geqslant n+1$. Istnieje liczba $R(s, c, n)$ taka, że dla każdej $r \geqslant R(s, c, n)$, każdego zbioru r-elementowego X i każdej funkcji kolorującej $C : [X]^n \to \{0, 1, 2, \ldots, c-1\}$ istnieje zbiór jednorodny względem C o s elementach.* [To twierdzenie ma dowód w PA.]

Twierdzenie Parisa-Harringtona

- Zbiór $X \subseteq \omega$ jest ***względnie duży***, gdy jego moc jest niemniejsza od jego najmniejszego elementu.
- ***Zdanie Parisa-Harringtona*** to zdanie φ_0 stwierdzające, że: dla dowolnych s, n, c istnieje liczba $H(s, n, c)$ taka, że dla wszystkich $h \geqslant H(s, n, c)$, dowolnego X o mocy h i dowolnej funkcji kolorującej $C : [X]^n \to \{0, 1, 2, \ldots, c-1\}$ istnieje względnie duży zbiór Y jednorodny względem C, mający co najmniej s elementów.

Twierdzenie Parisa-Harringtona.

- *Zdanie φ_0 jest prawdziwe w modelu standardowym $\mathfrak{N}_0$ (a zatem PA non $\vdash \neg\varphi_0$).*
- *Zdanie φ_0 jest niezależne od PA, czyli PA non $\vdash \varphi_0$.*

Dowód tego twierdzenia wykracza poza ramy niniejszego wykładu.

Ciągi Goodsteina

- ***Reprezentacją liczby*** m ***przy zasadzie*** n nazywamy przedstawienie liczby m jako sumy potęg liczby n tak, aby użyte wykładniki były mniejsze bądź równe n.
- ***Ciągiem Goodsteina dla liczby*** m nazywamy ciąg $(m_k)_{k\in\omega}$ taki, że:
  - $m_0 = m$, $m_k = G_{k+1}(m_{k-1})$ dla $k > 0$, gdzie funkcje $G_n(m)$ definiujemy następująco:
  - jeśli $m = 0$, to $G_n(m) = 0$;
  - jeśli $m \neq 0$, to $G_n(m)$ jest liczbą otrzymaną przez zastąpienie w reprezentacji liczby m przy zasadzie n liczby n przez liczbę $n+1$ i odjęcie 1.

- Reprezentacją 35 przy zasadzie 2 jest: $2^{2^2+1} + 2^1 + 2^0$.
- Reprezentacją 266 przy zasadzie 2 jest: $2^{2^{2+1}} + 2^{2+1} + 2^1$.

Ciągi Goodsteina

Przykład. Ciąg Goodsteina dla liczby 3 wygląda następująco:

- $m_0 = 3 = 2^1 + 1$
- $m_1 = G_2(m_0) = (3^1 + 1) - 1 = 3^1$ (zamieniliśmy 2 na 3)
- $m_2 = G_3(m_1) = 4^1 - 1 = 3$ (zamieniliśmy 3 na 4)
- $m_3 = G_4(m_2) = 3 - 1 = 2$ (tu nie ma 4, więc nie można zmienić 4 na 5)
- $m_4 = G_5(m_3) = 2 - 1 = 1$ (tu nie ma 5)
- $m_5 = G_6(m_4) = 1 - 1 = 0$ (tu nie ma 6)
- $m_n = 0$ dla wszystkich $n \geqslant 5$.

Ciągi Goodsteina

Przykład. (Tradycyjnie, rozważmy liczbę 266.)

- $m_0 = 266 = 2^{2^{2+1}} + 2^{2+1} + 2^1$
- $m_1 = G_2(m_0) = (3^{3^{3+1}} + 3^{3+1} + 3^1) - 1 = 3^{3^{3+1}} + 3^{3+1} + 3^1 + 2 \approx 10^{38}$
- $m_2 = G_3(m_1) = (4^{4^{4+1}} + 4^{4+1} + 2) - 1 = 4^{4^{4+1}} + 4^{4+1} + 1 \approx 10^{616}$
- $m_3 = G_4(m_2) = (5^{5^{5+1}} + 5^{5+1} + 1) - 1 = 5^{5^{5+1}} + 5^{5+1} \approx 10^{10000}$
- $\ldots$

- Choć ciągi Goodsteina początkowo „rosną bardzo szybko", to jednak każdy taki ciąg ma od pewnego miejsca wszystkie wyrazy równe 0. Dla $m_0 = 4$ mamy $m_k = 0$ od $k = 3 \cdot 2^{402653211} - 3 \approx 10^{121000000}$.

Twierdzenie Parisa-Kirby'ego

Zdaniem Parisa-Kirby'ego nazwiemy zdanie φ_1 o postaci: $\forall m \exists k \; m_k \doteq 0$.

Twierdzenie Parisa-Kirby'ego.

- *Zdanie φ_1 jest prawdziwe w modelu standardowym $\mathfrak{N}_0$ (a zatem PA non $\vdash \neg\varphi_1$).*
- *Zdanie φ_1 jest niezależne od PA, czyli PA non $\vdash \varphi_1$.*

Funkcja $g(m) = \mu k \; (m_k = 0)$ jest całkowita, ale w PA nie można tego dowieść.

Dowód tego twierdzenia również wykracza poza ramy niniejszego wykładu. Zauważmy, że zdania φ_0 i φ_1 mają (niebanalną) treść matematyczną: pierwsze dotyczy kombinatoryki, drugie teorii liczb.

Twierdzenie Kruskala

Twierdzenie Kruskala, głoszące, że zbiór drzew skończonych znakowanych symbolami dobrze (częściowo) uporządkowanego alfabetu sam jest dobrze (częściowo) uporządkowany, ma (podaną przez Friedmana) wersję, która nie jest dowodliwa w PA.

- Niech $\phi(\overline{n})$ będzie zdaniem (które można wyrazić w języku PA): Istnieje m taka, że jeśli $T_1, \ldots, T_m$ jest skończonym ciągiem drzew, gdzie T_k ma $n + k$ wierzchołków, to dla pewnych i oraz j takich, że $i < j$ mamy: $T_i \sqsubseteq T_j$ (gdzie $\sqsubseteq$ jest stosownie określonym porządkiem na zbiorze drzew).
  - Dla każdej n: $PA \vdash \phi(\overline{n})$.
  - $PA \; non \vdash \forall x \; \phi(x)$.
  - Niech $f(n) =$ długość najkrótszego dowodu $\phi(\overline{n})$ w PA. Wtedy f rośnie szybciej niż funkcja Ackermanna.

Zdania prawdziwe, ale niedowodliwe w PA

- Tak więc, mamy przykłady twierdzeń (nie tylko o treści metamatematycznej), o których wiemy, iż są prawdziwe, lecz niedowodliwe w PA.
- Dowody tych twierdzeń wykorzystują zatem pewne metody niefinitarne.
- W szczególności, dowody pewnych własności obiektów ***finitarnych*** (liczby, skończone ciągi liczb) wymagają środków, które istotnie wykraczają poza metody dowodowe arytmetyki PA.

Rozstrzygalność i nierozstrzygalność

Rozważamy teorie pierwszego rzędu T w językach takich, że zbiór numerów gödlowskich stałych pozalogicznych T jest rekurencyjny. Język teorii T oznaczamy przez $L(T)$.

- Teoria T_2 w języku $L(T_2)$ jest ***rozszerzeniem*** teorii T_1 w języku $L(T_1)$, gdy każdy aksjomat teorii T_1 jest twierdzeniem teorii T_2. Rozszerzenie takie nazywamy prostym, gdy $L(T_1) = L(T_2)$. Jeśli T_2 jest rozszerzeniem T_1, to T_1 nazywamy ***podteorią*** T_2.
- T jest ***istotnie nierozstrzygalna***, gdy jest nierozstrzygalna oraz każde jej niesprzeczne rozszerzenie proste jest nierozstrzygalne.
- T jest ***dziedzicznie nierozstrzygalna***, gdy każda jej podteoria T' taka, że $L(T) = L(T')$ jest nierozstrzygalna.
- Struktura relacyjna $\mathfrak{A}$ jest ***mocno nierozstrzygalna***, gdy każda teoria T taka, że $\mathfrak{A} \models T$ jest nierozstrzygalna.
- T jest ***mocno nierozstrzygalna***, gdy jest niesprzeczna i każdy jej model jest mocno nierozstrzygalny.

Rozstrzygalność i nierozstrzygalność

- Poniżej podajemy (bez dowodów) wybrane fakty dotyczące teorii rozstrzygalnych oraz teorii nierozstrzygalnych, korzystając z ich przedstawienia (wraz z dowodami) w monografii:
- Murawski, R. 2000[3]. *Funkcje rekurencyjne i elementy metamatematyki. Problemy zupełności, rozstrzygalności, twierdzenia Gödla.* Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań.

Dowodzi się, że:

- Arytmetyka PA jest istotnie nierozstrzygalna.
- Każda teoria niesprzeczna, w której mocno reprezentowane są wszystkie zbiory rekurencyjne jest istotnie nierozstrzygalna.
- Model standardowy PA jest mocno nierozstrzygalny.
- Arytmetyka PA jest mocno nierozstrzygalna.

Rozstrzygalność i nierozstrzygalność

- Jeśli T jest niesprzeczna, zupełna i aksjomatyzowalna, to T jest rozstrzygalna.
- Jeśli T jest niesprzeczna, aksjomatyzowalna i nierozstrzygalna, to jest niezupełna.
- Dla każdej teorii rozstrzygalnej i niezupełnej istnieje jej rozszerzenie rozstrzygalne, niesprzeczne i zupełne.
- Jeśli T jest aksjomatyzowalna, to następujące warunki są równoważne:
  - T jest istotnie nierozstrzygalna.
  - T jest niesprzeczna i każde jej niesprzeczne i aksjomatyzowalne rozszerzenie jest niezupełne.
  - T jest niesprzeczna i żadne jej niesprzeczne i zupełne rozszerzenie nie jest aksjomatyzowalne.

Jeśli PA jest niesprzeczna, to żadne jej niesprzeczne i zupełne rozszerzenie nie jest aksjomatyzowalne.

Rozstrzygalność i nierozstrzygalność

- Struktura $\mathfrak{A}$ jest mocno nierozstrzygalna dokładnie wtedy, gdy jej teoria $Th(\mathfrak{A})$ jest dziedzicznie nierozstrzygalna.
- Jeśli T ma model nierozstrzygalny, to T jest dziedzicznie nierozstrzygalna.
- Każda teoria mocno nierozstrzygalna jest dziedzicznie nierozstrzygalna.

W dalszym ciągu podamy przykłady:

- teorii rozstrzygalnych,
- teorii nierozstrzygalnych.

Teorie rozstrzygalne

Metody dowodzenia rozstrzygalności teorii:

- metoda eliminacji kwantyfikatorów,
- metoda teoriomodelowa,
- metoda interpretacji.

- Wykazanie rozstrzygalności teorii wcale nie przesądza o tym, iż przestaje ona być interesująca (w tym sensie, że dowodzenie jej twierdzeń okazuje się czysto mechanicznym procesem).
- Znane metody rozstrzygania mają dużą złożoność obliczeniową. Jednym z najważniejszych problemów współczesnej informatyki teoretycznej jest problem $P = NP$, czyli pytanie o to, czy klasa funkcji obliczalnych za pomocą wielotaśmowych deterministycznych maszyn Turinga jest równa klasie funkcji obliczalnych za pomocą wielotaśmowych niedeterministycznych maszyn Turinga.

Teorie rozstrzygalne

Metodą eliminacji kwantyfikatorów pokazać można, że np. następujące teorie są rozstrzygalne:

- Teoria struktury $(\omega, s, +, 0)$.
- Teoria struktury $(\omega, s, 0)$.
- Teoria struktury $(\omega, s, \cdot, 0)$.
- Elementarna teoria identyczności.
- Teoria skończenie wielu zbiorów.
- Teoria porządku dyskretnego.
- Teoria porządku liniowego liczb wymiernych.
- Teoria ciał algebraicznie domkniętych.
- Teoria algebr Boole'a.
- Teoria liczb rzeczywistych.

Teorie rozstrzygalne

Twierdzenie Łosia-Vaughta głosi, że jeśli teoria T ma tylko modele nieskończone i jest kategoryczna w pewnej mocy nieskończonej, to T jest zupełna.

Metodą teoriomodelową pokazano, że np. następujące teorie są rozstrzygalne:

- Teoria przeliczalnego gęstego liniowego porządku bez końców
- Teoria ciał algebraicznie domkniętych o danej charakterystyce.
- Teoria wszystkich ciał skończonych.
- Teoria ciał domkniętych w sensie rzeczywistym.
- Teoria zbiorów liniowo uporządkowanych.
- Teoria grup abelowych.

Teorie rozstrzygalne

- **Metoda interpretacji**. Dana jest rozstrzygalna teoria T_1, badamy czy T_2 jest rozstrzygalna. Określamy rekurencyjne odwzorowanie f formuł z $L(T_2)$ na formuły z $L(T_1)$ takie, że: $T_1 \vdash f(\psi)$ dokładnie wtedy, gdy $T_2 \vdash \psi$.
- To daje metodę rozstrzygania dla T_2.

Metodą interpretacji pokazano, że np. następujące teorie są rozstrzygalne:

- Monadyczna teoria następnika drugiego rzędu.
- Teoria drugiego rzędu dwóch następników.
- Teoria zbiorów liniowo uporządkowanych.
- Monadyczna teoria drugiego rzędu przeliczalnych zbiorów dobrze uporządkowanych.

Teorie nierozstrzygalne

Dwie podstawowe metody dowodzenia nierozstrzygalności teorii:

- wykorzystanie twierdzeń Gödla o niezupełności PA,
- redukcja zagadnienia rozstrzygalności jednej teorii do (już rozwiązanego) zagadnienia rozstrzygalności innej teorii.

- T_2 jest ***nieistotnym rozszerzeniem*** T_1, gdy każda stała pozalogiczna z $L(T_2)$, która nie występuje w $L(T_1)$ jest stałą indywidualną oraz każde zdanie φ z $L(T_2)$, które jest twierdzeniem T_2 można udowodnić w oparciu o aksjomaty z T_1.
- T_2 jest ***skończonym rozszerzeniem*** T_1, gdy T_2 jest rozszerzeniem T_1 oraz istnieje skończony zbiór Φ twierdzeń teorii T_2 taki, że dla dowolnego zdania φ: jeśli $T_2 \vdash \varphi$, to $T_1 \cup \Phi \vdash \varphi$.
- T_1 i T_2 są ***zgodne***, gdy mają wspólne niesprzeczne rozszerzenie.

Teorie nierozstrzygalne

- T_2 jest ***interpretowalna*** w T_1, gdy istnieje teoria T oraz rekurencyjny zbiór Φ zdań, które traktujemy jako aksjomaty teorii T takie, że:
  - T jest wspólnym rozszerzeniem T_1 i T_2
  - każda stała języka $L(T)$ jest stałą $L(T_1)$ lub $L(T_2)$
  - elementy Φ są definicjami na gruncie T_1 stałych pozalogicznych języka $L(T_2)$
  - każda stała pozalogiczna języka $L(T_2)$ występuje w dokładnie jednym zdaniu ze zbioru Φ
  - każde twierdzenie teorii T wynika logicznie ze zbioru zdań, z których każde jest albo twierdzeniem T_1 albo należy do Φ.
- T_2 jest ***słabo interpretowalna*** w T_1, gdy T_2 jest interpretowalna w pewnym niesprzecznym rozszerzeniu prostym teorii T_1.

Teorie nierozstrzygalne

Zakładamy, że czytelnik pamięta pojęcie relatywizacji $\psi^{(P)}$ formuły ψ do predykatu P.

- ***Relatywizacją*** teorii T do predykatu P nazywamy teorię $T^{(P)}$ zdefiniowaną następująco:
  - $L(T^{(P)}) = L(T) \cup \{P\}$
  - φ jest twierdzeniem $T^{(P)}$ dokładnie wtedy, gdy φ wynika logicznie z formuł $\psi^{(P)}$, gdzie ψ jest twierdzeniem teorii T.
- Teoria T jest ***relatywnie interpretowalna*** (***relatywnie słabo interpretowalna***) w teorii T_1, gdy istnieje jednoargumentowy predykat P nie należący do języka $L(T_2)$ taki, że teoria $T_2^{(P)}$ jest interpretowalna (słabo interpretowalna) w teorii T_1.

Teorie nierozstrzygalne

Mamy m.in. następujące wyniki dotyczące nierozstrzygalności teorii:

- Jeśli T_1 jest niesprzecznym rozszerzeniem T_2 i T_2 jest istotnie nierozstrzygalna, to T_1 jest istotnie nierozstrzygalna.
- Jeśli T_2 jest nieistotnym rozszerzeniem T_1, to:
  - T_1 jest nierozstrzygalna dokładnie wtedy, gdy T_2 jest nierozstrzygalna.
  - T_1 jest istotnie nierozstrzygalna dokładnie wtedy, gdy T_2 jest istotnie nierozstrzygalna.
- Niech T_1 i T_2 będą teoriami w tym samym języku takimi, że T_2 jest skończonym rozszerzeniem T_1. Wtedy: jeśli T_2 jest nierozstrzygalna, to T_1 jest nierozstrzygalna.
- (★) Niech T_1 i T_2 będą teoriami zgodnymi i niech $L(T_2) \subseteq L(T_1)$. Wtedy: jeśli T_2 jest istotnie nierozstrzygalna i skończenie aksjomatyzowalna, to T_1 jest dziedzicznie nierozstrzygalna.

Teorie nierozstrzygalne

- Jeżeli T_2 jest rozszerzeniem definicyjnym T_1 oraz T_2 jest nierozstrzygalna, to T_1 jest nierozstrzygalna.
- Niech T_1 niesprzeczna, a T_2 interpretowalna w T_1 lub w pewnym nieistotnym rozszerzeniu T_1. Wtedy:
  - Jeśli T_2 jest istotnie nierozstrzygalna, to T_1 jest istotnie nierozstrzygalna.
  - Jeśli T_2 ma podteorię skończenie aksjomatyzowalną oraz istotnie nierozstrzygalną, to również T_1 ma taką podteorię.
- Niech T_2 słabo interpretowalna w T_1. Jeśli T_2 jest istotnie nierozstrzygalna i skończenie aksjomatyzowalna, to:
  - T_1 jest dziedzicznie nierozstrzygalna
  - istnieje skończone rozszerzenie teorii T_1 w tym samym języku co T_1, które jest istotnie nierozstrzygalne.

Teorie nierozstrzygalne

- Niech T_2 słabo interpretowalna w pewnym nieistotnym rozszerzeniu teorii T_1. Jeśli T_2 jest istotnie nierozstrzygalna i skończenie aksjomatyzowalna, to:
  - T_1 jest dziedzicznie nierozstrzygalna
  - istnieje istotnie nierozstrzygalne skończone rozszerzenie teorii T_1.
- Niech predykat jednoargumentowy P nie należy do $L(T)$. Wtedy:
  - Teoria $T^{(P)}$ jest aksjomatyzowalna dokładnie wtedy, gdy T jest aksjomatyzowalna.
  - Jeśli w języku $L(T)$ występuje skończenie wiele symboli funkcyjnych, to $T^{(P)}$ jest skończenie aksjomatyzowalna dokładnie wtedy, gdy T jest skończenie aksjomatyzowalna.
- Niech predykat jednoargumentowy P nie należy do $L(T)$. Wtedy: $T^{(P)}$ jest istotnie nierozstrzygalna dokładnie wtedy, gdy T jest istotnie nierozstrzygalna.

Teorie nierozstrzygalne

Przypominamy, że Arytmetyka Robinsona Q jest teorią w tym samym języku co PA, której aksjomatami są aksjomaty PA (A1)–(A6) (a więc bez schematu indukcji) oraz (A0) $\neg x \doteq \underline{0} \rightarrow \exists y (x \doteq \underline{s}(y))$.

- Q jest skończenie aksjomatyzowalna.
- W Q reprezentowalne sa wszystkie funkcje rekurencyjne.
- Q jest istotnie nierozstrzygalna.
- Żadna podteoria Q otrzymana przez usunięcie jednego z aksjomatów (A0), (A1)–(A6) nie jest istotnie nierozstrzygalna.

Teoria Q jest zatem w pewnym sensie minimalną teorią istotnie nierozstrzygalną, w której reprezentowalne sa wszystkie funkcje rekurencyjne.

Teorie nierozstrzygalne

Teorię Q wykorzystujemy w dowodach nierozstrzygalności różnych teorii:

- Teoria modelu standardowego PA jest dziedzicznie nierozstrzygalna.
- Każda teoria T zgodna z Q i taka, iż każda stała pozalogiczna języka $L(Q)$ jest stałą pozalogiczną języka $L(T)$ jest nierozstrzygalna.
- Model standardowy $\mathfrak{N}_0$ jest mocno nierozstrzygalny.
- Teoria Q jest mocno nierozstrzygalna.
- Arytmetyka PA jest mocno nierozstrzygalna.
- Teoria Q jest dziedzicznie nierozstrzygalna.
- Każdy model teorii Q jest mocno nierozstrzygalny.
- Arytmetyka PA jest dziedzicznie nierozstrzygalna.

Teorie nierozstrzygalne

Ustalono nierozstrzygalność niektórych ważnych teorii matematycznych:

- Teoria liczb całkowitych (z dodawaniem i mnożeniem) jest nierozstrzygalna.
- Teoria liczb całkowitych (z dodawaniem i mnożeniem oraz relacją mniejszości) jest nierozstrzygalna.
- Istnieją skończenie aksjomatyzowalne podteorie teorii liczb całkowitych (z dodawaniem i mnożeniem), które są istotnie nierozstrzygalne.
- Istnieją skończenie aksjomatyzowalne podteorie teorii liczb całkowitych (z dodawaniem i mnożeniem oraz relacją mniejszości), które są istotnie nierozstrzygalne.
- Nierozstrzygalne są elementarne teorie: pierścieni, pierścieni przemiennych, pierścieni całkowitych, pierścieni uporządkowanych, pierścieni uporządkowanych przemiennych, z jedynką lub bez jedynki.

Teorie nierozstrzygalne

- Teoria grup jest dziedzicznie nierozstrzygalna. Istnieje skończenie aksjomatyzowalne rozszerzenie teorii grup, które jest istotnie nierozstrzygalne. Teoria grup nie jest istotnie nierozstrzygalna.
- Teoria grupoidów oraz teoria semigrup (z jedynką lub bez jedynki) są nierozstrzygalne.
- Teoria liczb wymiernych z dodawaniem i mnożeniem jest dziedzicznie nierozstrzygalna.
- Teoria krat jest nierozstrzygalna.
- Teoria krat rozdzielnych jest nierozstrzygalna.
- Teoria krat modularnych jest nierozstrzygalna.
- Geometria rzutowa jest nierozstrzygalna.
- Teoria mnogości ZF jest nierozstrzygalna.

Twierdzenie Churcha

Twierdzenie Churcha.

Klasyczny Rachunek Predykatów I rzędu jest dziedzicznie nierozstrzygalny.

Zarys dowodu.

- Arytmetyka Robinsona Q oraz KRP są teoriami zgodnymi.
- Nadto, każda stała pozalogiczna teorii Q jest oczywiście stałą pozalogiczną KRP.
- Ponieważ Q jest skończenie aksjomatyzowalna oraz istotnie nierozstrzygalna, więc na mocy twierdzenia ($\bigstar$) KRP jest dziedzicznie nierozstrzygalny.

KRP ma jednak fragmenty rozstrzygalne, jak pokazuje następne twierdzenie.

Rozstrzygalność monadycznego KRP

Twierdzenie.

Klasyczny monadyczny rachunek predykatów I rzędu jest rozstrzygalny.

Zarys dowodu.

- Niech φ będzie formułą klasycznego monadycznego rachunku predykatów I rzędu i niech $P_1, \ldots, P_n$ będą wszystkimi predykatami występującymi w φ.
- Wtedy φ jest tezą klasycznego monadycznego rachunku predykatów I rzędu dokładnie wtedy, gdy φ jest prawdziwa w każdej strukturze zawierającej co najwyżej 2^n elementów.
- Dowód implikacji prostej jest oczywisty.

Rozstrzygalność monadycznego KRP

- Dla dowodu implikacji odwrotnej, niech $\mathfrak{A}$ będzie dowolną strukturą.
- Określamy relację równoważności $\sim$ w uniwersum $\mathfrak{A}$ następująco: $a \sim b$ dokładnie wtedy, gdy $\mathfrak{A} \models (P_i(x) \equiv P_i(y))[a, b]$ dla wszystkich $i = 1, \ldots, n$.
- Wtedy: $a \sim b$ dokładnie wtedy, gdy następujące warunki są równoważne, dla wszystkich $i = 1, \ldots, n$:
  - $\mathfrak{A} \models P_i(x)[a]$
  - $\mathfrak{A} \models P_i(y)[b]$.
- Niech $\mathfrak{B}$ będzie strukturą ilorazową $\mathfrak{A}/\sim$. Wtedy $\mathfrak{B}$ ma co najwyżej 2^n elementów, gdyż każdy predykat P_i wyznacza dwa elementy w strukturze ilorazowej $\mathfrak{B}$, a mamy n różnych predykatów.
- Przez indukcję strukturalną po budowie formuły φ łatwo pokazujemy, że $\mathfrak{A} \models \varphi$ dokładnie wtedy, gdy $\mathfrak{B} \models \varphi$, co kończy dowód.

Wykorzystywana literatura

- Barwise, J. (ed.) 1977. *Handbook of mathematical logic.* North-Holland Publishing Company, Amsterdam, New York Oxford.
- Bell, J.L., Machover, M. 1977. *A course in mathematical logic.* North Holland Publishing Company, Amsterdam, New York, Oxford.
- Cutland, N. 1980. *Computability. An introduction to recursive function theory.* Cambridge University Press, Cambridge.
- Hinman, P.G. 2005. *Fundamentals of Mathematical Logic.* A K Peters, Wellesley.
- Mendelson, E. 1997. *Introduction to mathematical logic.* Chapman & Hall, London.
- Murawski, R. 2000^3. *Funkcje rekurencyjne i elementy metamatematyki. Problemy zupełności, rozstrzygalności, twierdzenia Gödla.* Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań.

Wykorzystywana literatura

- Odifreddi, P.G. 1989. *Classical recursion theory.* North-Holland Publishing Company, Amsterdam.
- Rogers, H. 1987. *Theory of recursive functions and effective computability.* MIT Press, Cambridge.
- Shoenfield, J.R. 1967. *Mathematical logic.* Addison-Wesley, Reading, MA.
- Smorynski, C. 1977. *The incompleteness theorems.* W: J. Barwise (ed.) 1977. *Handbook of mathematical logic.* North-Holland Publishing Company, Amsterdam, New York Oxford, 821–866.
- Smullyan, R. 1992. *Gödel's incompleteness theorems.* The Clarendon Press, Oxford University Press, New York.
- Smullyan, R. 1993. *Recursion theory for metamathematics.* Oxford University Press.
- Soare, R.I. 1987. *Recursively enumerable sets and degrees.*, Springer.