METODY DOWODZENIA TWIERDZEŃ I AUTOMATYZACJA ROZUMOWAŃ

KONWERSATORIUM 8: KOLOKWIUM

V rok kognitywistyki UAM

Podajemy rozwiązania wszystkich zadań z kolokwium przeprowadzonego 1 grudnia 2015.

Zgodnie z ustaleniami podanymi w syllabusie przedmiotu, za poprawne odpowiedzi na wszystkie pytania można było uzyskać maksymalnie 30 punktów. Uzyskanie łącznie co najmniej 15 punktów oznacza zaliczenie kolokwium.

Za poprawne rozwiązanie zadania:	1	2	3	4	5
Można otrzymać punktów:	5	6	8	6	5

Przypominamy zasady tworzenia składników α-formuł oraz β-formuł:

α	α_1	α_2
$\varphi \wedge \psi$	φ	ψ
$\neg(\varphi \vee \psi)$	$\neg\varphi$	$\neg\psi$
$\neg(\varphi \rightarrow \psi)$	φ	$\neg\psi$
$\neg(\varphi \leftarrow \psi)$	$\neg\varphi$	ψ
$\neg(\varphi \uparrow \psi)$	φ	ψ
$\varphi \downarrow \psi$	$\neg\varphi$	$\neg\psi$
$\varphi \nrightarrow \psi$	φ	$\neg\psi$
$\varphi \nleftarrow \psi$	$\neg\varphi$	ψ

β	β_1	β_2
$\neg(\varphi \wedge \psi)$	$\neg\varphi$	$\neg\psi$
$\varphi \vee \psi$	φ	ψ
$\varphi \rightarrow \psi$	$\neg\varphi$	ψ
$\varphi \leftarrow \psi$	φ	$\neg\psi$
$\varphi \uparrow \psi$	$\neg\varphi$	$\neg\psi$
$\neg(\varphi \downarrow \psi)$	φ	ψ
$\neg(\varphi \nrightarrow \psi)$	$\neg\varphi$	ψ
$\neg(\varphi \nleftarrow \psi)$	φ	$\neg\psi$

Imię i Nazwisko .... ZESTAW A

1. Dokonaj przekładu z notacji infiksowej na prefiksową oraz narysuj drzewo składniowe formuły:

$$\neg(p \vee q) \rightarrow (\neg\neg r \wedge s)$$

2. Znajdź koniunkcyjną postać normalną formuły:

$$(r \vee s) \rightarrow (\neg p \wedge q)$$

3. Ustal czy zdanie $\exists x(S(x) \wedge P(x))$ wynika tablicowo ze zdania:

$$\forall x(M(x) \rightarrow P(x)) \wedge \exists x(S(x) \wedge M(x))$$

4. Ustal czy jest rezolucyjnie sprzeczny zbiór formuł:

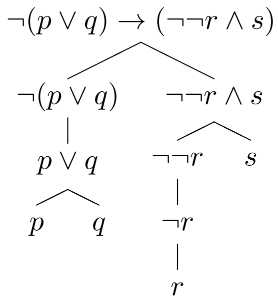
$$\{\ q \rightarrow p,\ \neg r \vee q,\ s \rightarrow r,\ \neg(s \rightarrow p)\ \}$$

5. Podaj definicję *zdaniowego zbioru Hintikki*.

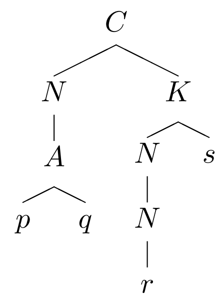
ROZWIĄZANIA

1. Formuła $\neg(p \vee q) \rightarrow (\neg\neg r \wedge s)$ przekształcona do postaci prefiksowej wygląda następująco: $CNApqKNNrs$.

Pełne drzewo składniowe tej formuły (w notacji infiksowej) wygląda następująco:



Skrócone drzewo składniowe tej formuły (w notacji prefiksowej) wygląda następująco:



2. Działamy wedle podanego algorytmu:

$$\begin{array}{l}\langle[(r \vee s) \to (\neg p \wedge q)]\rangle \\ \langle[\neg(r \vee s), \neg p \wedge q]\rangle \\ \langle[\neg(r \vee s), \neg p], [\neg(r \vee s), q]\rangle \\ \langle[\neg r, \neg p], [\neg s, \neg p], [\neg(r \vee s), q]\rangle \\ \langle[\neg r, \neg p], [\neg s, \neg p], [\neg r, q], [\neg s, q]\rangle\end{array}$$

Zauważmy, że badana formuła nie jest tautologią KRZ, ponieważ nie jest tak, iżby każda alternatywa elementarna wchodząca w skład powyższej koniunkcji zawierała parę literałów komplementarnych.

3. Budujemy tablicę analityczną rozpoczynającą się od przesłanki oraz zaprzeczonego wniosku:

$$\forall x(M(x) \to P(x)) \wedge \exists x(S(x) \wedge M(x))\ 1.^{\wedge}$$

$$\neg\exists x(S(x) \wedge P(x))\ 3.^{*a}$$

$$(1_g)\ \forall x(M(x) \to P(x))\ 4.^{*a}$$

$$(1_d)\ \exists x(S(x) \wedge M(x))\ 2.^{\surd a}$$

$$(2)\ S(a) \wedge M(a)\ 5.^{\wedge}$$

$$(3)\ \neg(S(a) \wedge P(a))\ 7.^{\neg\wedge}$$

$$(4)\ M(a) \to P(a)\ 6.^{\to}$$

$$(5_g)\ S(a)$$

$$(5_d)\ M(a)$$

$$(6_l)\ \neg M(a) \qquad (6_p)\ P(a)$$

$$\times_{5_d,6_l} \qquad (7_l)\ \neg S(a) \qquad (7_p)\ \neg P(a)$$

$$\times_{5_g,7_l} \qquad \times_{6_p,7_p}$$

Ponieważ tablica analityczna dla przesłanki oraz zaprzeczonego wniosku jest zamknięta, więc wniosek wynika tablicowo z przesłanki.

4. Pokażemy, że z podanego zbioru formuł można wyprowadzić rezolucyjnie klauzulę pustą:

1.	$[q \rightarrow p]$	
2.	$[\neg r \vee q]$	
3.	$[s \rightarrow r]$	
4.	$[\neg(s \rightarrow p)]$	
5.	$[\neg q, p]$	β,1
6.	$[\neg r, q]$	β,2
7.	$[\neg s, r]$	β,3
8.	$[s]$	α,4
9.	$[\neg p]$	α,4
10.	$[r]$	RR:7,8
11.	$[\neg q]$	RR:5,9
12.	$[\neg r]$	RR:6,11
13.	$[\,]$	RR:10,12

5. Zbiór $\mathbf{H}$ formuł języka KRZ nazywamy *zdaniowym zbiorem Hintikki*, jeśli:

1. Dla dowolnej zmiennej zdaniowej p, zachodzi co najmniej jedno z dwojga: $p \notin \mathbf{H}$ lub $\neg p \notin \mathbf{H}$.
2. $\bot \notin \mathbf{H}$ oraz $\neg\top \notin \mathbf{H}$.
3. Jeśli $\neg\neg\psi \in \mathbf{H}$, to $\psi \in \mathbf{H}$.
4. Jeśli $\alpha \in \mathbf{H}$, to $\alpha_1 \in \mathbf{H}$ oraz $\alpha_2 \in \mathbf{H}$.
5. Jeśli $\beta \in \mathbf{H}$, to $\beta_1 \in \mathbf{H}$ lub $\beta_2 \in \mathbf{H}$.

Imię i Nazwisko . . . . ZESTAW B

1. Dokonaj przekładu z notacji infiksowej na prefiksową oraz narysuj drzewo składniowe formuły:

$$\neg(p \to q) \wedge (s \vee \neg\neg r)$$

2. Znajdź koniunkcyjną postać normalną formuły:

$$\neg(r \to s) \vee (p \wedge \neg q)$$

3. Ustal czy zdanie $\exists x(Q(x) \wedge M(x))$ wynika tablicowo ze zdania:

$$\exists x(\neg P(x) \wedge Q(x)) \wedge \forall x(\neg M(x) \to P(x))$$

4. Ustal czy jest rezolucyjnie sprzeczny zbiór formuł:

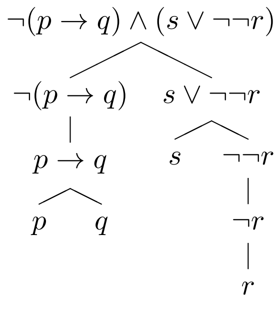
$$\{\ \neg q \vee p,\ s \wedge \neg p,\ r \to q,\ s \to r\ \}$$

5. Podaj definicję *zdaniowej własności niesprzeczności*.

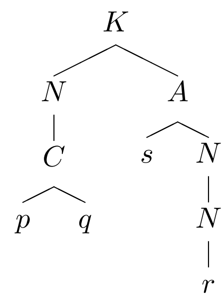
ROZWIĄZANIA

1. Formuła $\neg(p \to q) \wedge (s \vee \neg\neg r)$ przekształcona do postaci prefiksowej wygląda następująco: $KNCpqAsNNr$.

Pełne drzewo składniowe tej formuły (w notacji infiksowej) wygląda następująco:



Skrócone drzewo składniowe tej formuły (w notacji prefiksowej) wygląda następująco:



2. Działamy wedle podanego algorytmu:

$$
\begin{array}{l}
\langle[\neg(r \to s) \vee (p \wedge \neg q)]\rangle \\
\langle[\neg(r \to s), p \wedge \neg q]\rangle \\
\langle[\neg(r \to s), p], [\neg(r \to s), \neg q]\rangle \\
\langle[r, p], [\neg s, p], [\neg(r \to s), \neg q]\rangle \\
\langle[r, p], [\neg s, p], [r, \neg q], [\neg s, \neg q]\rangle
\end{array}
$$

Zauważmy, że badana formuła nie jest tautologią KRZ, ponieważ nie jest tak, iżby każda alternatywa elementarna wchodząca w skład powyższej koniunkcji zawierała parę literałów komplementarnych.

3. Budujemy tablicę analityczną rozpoczynającą się od przesłanki oraz zaprzeczonego wniosku:

$$\exists x(\neg P(x) \wedge Q(x)) \wedge \forall x(\neg M(x) \to P(x))\ 1.^{\wedge}$$

$$\neg\exists x(Q(x) \wedge M(x)) 3.^{*a}$$

$$(1_g)\ \exists x(\neg P(x) \wedge Q(x))\ 2.^{\surd a}$$

$$(1_d)\ \forall x(\neg M(x) \to P(x))\ 4.^{*a}$$

$$(2)\ \neg P(a) \wedge Q(a)\ 5.^{\wedge}$$

$$(3)\ \neg(Q(a) \wedge M(a))\ 6.^{\neg\wedge}$$

$$(4)\ \neg M(a) \to P(a)\ 7.^{\to}$$

$$(5_g)\ \neg P(a)$$

$$(5_d)\ Q(a)$$

$$\begin{array}{cc}
(6_l)\ \neg Q(a) & (6_p)\ \neg M(a) \\
\times_{5_d,6_l} & \begin{array}{cc} (7_l)\ \neg\neg M(a) & (7_p)\ P(a) \\ \times_{6_p,7_l} & \times_{5_g,7_p} \end{array}
\end{array}$$

Ponieważ tablica analityczna dla przesłanki oraz zaprzeczonego wniosku jest zamknięta, więc wniosek wynika tablicowo z przesłanki.

4. Pokażemy, że z podanego zbioru formuł można wyprowadzić rezolucyjnie klauzulę pustą:

1.	$[\neg q \lor p]$	
2.	$[s \land \neg p]$	
3.	$[r \to q]$	
4.	$[s \to r]$	
5.	$[\neg q, p]$	β,1
6.	$[s]$	α,2
7.	$[\neg p]$	α,2
8.	$[\neg r, q]$	β,3
9.	$[\neg s, r]$	β,4
10.	$[r]$	RR:6,9
11.	$[q]$	RR:8,10
12.	$[p]$	RR:5,11
13.	$[\,]$	RR:7,12

5. Niech $\mathcal{C}$ będzie rodziną zbiorów formuł języka KRZ. Mówimy, że $\mathcal{C}$ jest *zdaniową własnością niesprzeczności*, jeśli dla każdego zbioru $S \in \mathcal{C}$:

1. Dla każdej zmiennej zdaniowej p: albo $p \notin S$ albo $\neg p \notin S$.
2. $\bot \notin S$ oraz $\neg \top \notin S$.
3. Jeśli $\neg\neg\psi \in S$, to $S \cup \{\psi\} \in S$.
4. Jeśli $\alpha \in S$, to $S \cup \{\alpha_1, \alpha_2\} \in \mathcal{C}$.
5. Jeśli $\beta \in S$, to $S \cup \{\beta_1\} \in \mathcal{C}$ lub $S \cup \{\beta_2\} \in \mathcal{C}$.

Imię i Nazwisko . . . . ZESTAW C

1. Dokonaj przekładu z notacji infiksowej na prefiksową oraz narysuj drzewo składniowe formuły:

$$\neg(p \vee q) \wedge (\neg\neg r \to s)$$

2. Znajdź koniunkcyjną postać normalną formuły:

$$\neg(p \to r) \vee \neg(q \vee s)$$

3. Ustal czy zdanie $\exists x(S(x) \wedge P(x))$ wynika tablicowo ze zdania:

$$\neg\forall x(M(x) \to \neg P(x)) \wedge \neg\exists x(\neg S(x) \wedge M(x))$$

4. Ustal czy jest rezolucyjnie sprzeczny zbiór formuł:

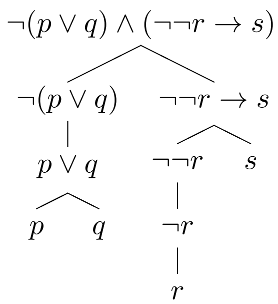
$$\{\ s \wedge \neg p,\ \neg q \vee p,\ \neg r \vee q,\ \neg s \vee r\ \}$$

5. Podaj definicję *zbioru Hintikki pierwszego rzędu*.

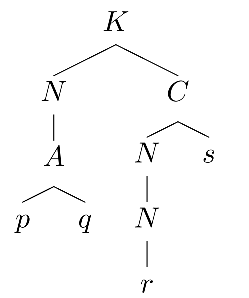
ROZWIĄZANIA

1. Formuła $\neg(p \vee q) \wedge (\neg\neg r \to s)$ przekształcona do postaci prefiksowej wygląda następująco: $KNApqCNNrs$.

Pełne drzewo składniowe tej formuły (w notacji infiksowej) wygląda następująco:



Skrócone drzewo składniowe tej formuły (w notacji prefiksowej) wygląda następująco:



2. Działamy wedle podanego algorytmu:

$$\begin{array}{l}
\langle[\neg(p \rightarrow r) \vee \neg(q \vee s)]\rangle \\
\langle[\neg(p \rightarrow r), \neg(q \vee s)]\rangle \\
\langle[\neg(p \rightarrow r), \neg q], [\neg(p \rightarrow r), \neg s]\rangle \\
\langle[p, \neg q], [\neg r, \neg q], [\neg(p \rightarrow r), \neg s]\rangle \\
\langle[p, \neg q], [\neg r, \neg q], [p, \neg s], [\neg r, \neg s]\rangle
\end{array}$$

Zauważmy, że badana formuła nie jest tautologią KRZ, ponieważ nie jest tak, iżby każda alternatywa elementarna wchodząca w skład powyższej koniunkcji zawierała parę literałów komplementarnych.

3. Budujemy tablicę analityczną rozpoczynającą się od przesłanki oraz zaprzeczonego wniosku:

$$\neg\forall x(M(x) \to \neg P(x)) \wedge \neg\exists x(\neg S(x) \wedge M(x))\ 1.^{\wedge}$$

$$\neg\exists x(S(x) \wedge P(x))\ 3.^{*a}$$

$$(1_g)\ \neg\forall x(M(x) \to \neg P(x))\ 2.^{\surd a}$$

$$(1_d)\ \neg\exists x(\neg S(x) \wedge M(x))\ 4.^{*a}$$

$$(2)\ \neg(M(a) \to \neg P(a))\ 5.^{\neg\to}$$

$$(3)\ \neg(S(a) \wedge P(a))\ 6.^{\neg\wedge}$$

$$(4)\ \neg(\neg S(a) \wedge M(a))\ 7.^{\neg\wedge}$$

$$(5_g)\ M(a)$$

$$(5_d)\ \neg\neg P(a)$$

$$\begin{array}{ccc} \multicolumn{2}{c}{(6_l)\ \neg S(a)} & (6_p)\ \neg P(a) \\ (7_l)\ \neg\neg S(a) & (7_p)\ \neg M(a) & \times_{5_d,6_p} \\ \times_{6_l,7_l} & \times_{5_g,7_p} & \end{array}$$

Ponieważ tablica analityczna dla przesłanki oraz zaprzeczonego wniosku jest zamknięta, więc wniosek wynika tablicowo z przesłanki.

4. Pokażemy, że z podanego zbioru formuł można wyprowadzić rezolucyjnie klauzulę pustą:

1.	$[s \wedge \neg p]$	
2.	$[\neg q \vee p]$	
3.	$[\neg r \vee q]$	
4.	$[\neg s \vee r]$	
5.	$[s]$	α,1
6.	$[\neg p]$	α,1
7.	$[\neg q, p]$	β,2
8.	$[\neg r, q]$	β,3
9.	$[\neg s, r]$	β,4
10.	$[\neg q]$	RR:6,7
11.	$[\neg r]$	RR:8,10
12.	$[\neg s]$	RR:9,11
13.	[ ]	RR:5,12

5. Zbiór $\mathbf{H}$ formuł języka L logiki pierwszego rzędu nazywamy *zbiorem Hintikki pierwszego rzędu* (dla L), jeśli:

1. Dla dowolnej zmiennej zdaniowej p, zachodzi co najmniej jedno z dwojga: $p \notin \mathbf{H}$ lub $\neg p \notin \mathbf{H}$.

2. $\bot \notin \mathbf{H}$ oraz $\neg\top \notin \mathbf{H}$.

3. Jeśli $\neg\neg\psi \in \mathbf{H}$, to $\psi \in \mathbf{H}$.

4. Jeśli $\alpha \in \mathbf{H}$, to $\alpha_1 \in \mathbf{H}$ oraz $\alpha_2 \in \mathbf{H}$.

5. Jeśli $\beta \in \mathbf{H}$, to $\beta_1 \in \mathbf{H}$ lub $\beta_2 \in \mathbf{H}$

6. Jeśli $\gamma \in \mathbf{H}$, to $\gamma(t) \in \mathbf{H}$, dla każdego termu domkniętego języka L.

7. Jeśli $\delta \in \mathbf{H}$, to $\delta(t) \in \mathbf{H}$, dla pewnego termu domkniętego języka L.

Imię i Nazwisko . . . . ZESTAW D

1. Dokonaj przekładu z notacji infiksowej na prefiksową oraz narysuj drzewo składniowe formuły:

$$\neg(p \rightarrow q) \vee (s \wedge \neg\neg r)$$

2. Znajdź koniunkcyjną postać normalną formuły:

$$(r \vee s) \rightarrow (q \wedge \neg p)$$

3. Ustal czy zdanie $\exists x(P(x) \wedge \neg M(x))$ wynika tablicowo ze zdania:

$$\forall x(M(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \exists x(\neg Q(x) \wedge P(x))$$

4. Ustal czy jest rezolucyjnie sprzeczny zbiór formuł:

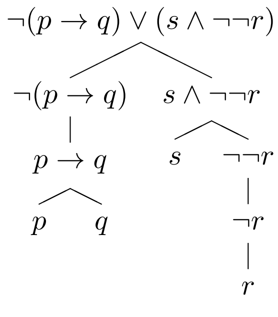
$$\{\ s \rightarrow r,\ q \rightarrow p,\ \neg(s \rightarrow p),\ q \vee \neg r\ \}$$

5. Podaj definicję *własności niesprzeczności pierwszego rzędu*.

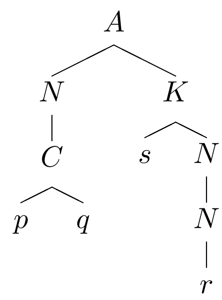
ROZWIĄZANIA

1. Formuła $\neg(p \rightarrow q) \vee (s \wedge \neg\neg r)$ przekształcona do postaci prefiksowej wygląda następująco: $ANCpqKsNNr$.

Pełne drzewo składniowe tej formuły (w notacji infiksowej) wygląda następująco:



Skrócone drzewo składniowe tej formuły (w notacji prefiksowej) wygląda następująco:



2. Działamy wedle podanego algorytmu:

$$\begin{array}{l}
\langle[(r \vee s) \rightarrow (q \wedge \neg p)]\rangle \\
\langle[\neg(r \vee s), q \wedge \neg p]\rangle \\
\langle[\neg(r \vee s), q], [\neg(r \vee s), \neg p]\rangle \\
\langle[\neg r, q], [\neg s, q], [\neg(r \vee s), \neg p]\rangle \\
\langle[\neg r, q], [\neg s, q], [\neg r, \neg p], [\neg s, \neg p]\rangle
\end{array}$$

Zauważmy, że badana formuła nie jest tautologią KRZ, ponieważ nie jest tak, iżby każda alternatywa elementarna wchodząca w skład powyższej koniunkcji zawierała parę literałów komplementarnych.

3. Budujemy tablicę analityczną rozpoczynającą się od przesłanki oraz zaprzeczonego wniosku:

$$\forall x(M(x) \to Q(x)) \wedge \exists x(\neg Q(x) \wedge P(x))\ 1.^{\wedge}$$

$$\neg \exists x(P(x) \wedge \neg M(x))\ 3.^{*a}$$

$$(1_g)\ \forall x(M(x) \to Q(x))\ 4.^{*a}$$

$$(1_d)\ \exists x(\neg Q(x) \wedge P(x))\ 2.^{\surd a}$$

$$(2)\ \neg Q(a) \wedge P(a)\ 5.^{\wedge}$$

$$(3)\ \neg(P(a) \wedge \neg M(a))\ 7.^{\neg\wedge}$$

$$(4)\ M(a) \to Q(a)\ 6.{\to}$$

$$(5_g)\ \neg Q(a)$$

$$(5_d)\ P(a)$$

$$\begin{array}{cc} (6_l)\ \neg M(a) & (6_p)\ Q(a) \\ \begin{array}{cc} (7_l)\ \neg P(a) & (7_p)\ \neg\neg M(a) \\ \times_{5_d, 7_l} & \times_{6_l, 7_p} \end{array} & \times_{5_g, 6_p} \end{array}$$

Ponieważ tablica analityczna dla przesłanki oraz zaprzeczonego wniosku jest zamknięta, więc wniosek wynika tablicowo z przesłanki.

4. Pokażemy, że z podanego zbioru formuł można wyprowadzić rezolucyjnie klauzulę pustą:

1.	$[s \to r]$	
2.	$[q \to p]$	
3.	$[\neg(s \to p)]$	
4.	$[q \vee r]$	
5.	$[\neg s, r]$	β,1
6.	$[\neg q, p]$	β,2
7.	$[s]$	α,3
8.	$[\neg p]$	α,3
9.	$[q, \neg r]$	β,4
10.	$[r]$	RR:5,7
11.	$[q]$	RR:9,10
12.	$[p]$	RR:6,11
13.	$[\,]$	RR:8,12

5. Niech $\mathcal{C}$ będzie rodziną zbiorów formuł języka logiki pierwszego rzędu L oraz niech $L^{\mathbf{par}}$ będzie rozszerzeniem języka L o zbiór parametrów $\mathbf{par}$. Mówimy, że $\mathcal{C}$ jest *własnością niesprzeczności pierwszego rzędu*, jeśli dla każdego zbioru $S \in \mathcal{C}$:

1. Dla każdej zmiennej zdaniowej p: albo $p \notin S$ albo $\neg p \notin S$.
2. $\bot \notin S$ oraz $\neg\top \notin S$.
3. Jeśli $\neg\neg\psi \in S$, to $S \cup \{\psi\} \in S$.
4. Jeśli $\alpha \in S$, to $S \cup \{\alpha_1, \alpha_2\} \in \mathcal{C}$.
5. Jeśli $\beta \in S$, to $S \cup \{\beta_1\} \in \mathcal{C}$ lub $S \cup \{\beta_2\} \in \mathcal{C}$.
6. Jeśli $\gamma \in S$, to $S \cup \{\gamma(t)\} \in \mathcal{C}$ dla każdego termu domkniętego języka $L^{\mathbf{par}}$.
7. Jeśli $\delta \in S$, to $S \cup \{\delta(a)\} \in \mathcal{C}$ dla pewnego parametru a języka $L^{\mathbf{par}}$.

Jerzy Pogonowski
Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
www.kognitywistyka.amu.edu.pl
http://logic.amu.edu.pl/index.php/Dydaktyka
pogon@amu.edu.pl