

Funkcje rekurencyjne (7)

(JiNoI III)

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl
pogon@amu.edu.pl

11 kwietnia 2007

Plan na dziś:

- definicja funkcji pierwotnie, częściowo i ogólnie rekurencyjnych;
- przykłady i proste własności funkcji rekurencyjnych;
- definicje przez schematy rekursji;
- funkcje kodujące liczby naturalne.

Będziemy korzystać z definicji oraz przykładów zamieszczonych w:

- I.A. Ławrow, L.L. Maksimowa *Zadania z teorii mnogości, logiki matematycznej i teorii algorytmów*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2004. Z języka rosyjskiego przełożył Jerzy Pogonowski.

Definicja funkcji rekurencyjnych

Częściowe funkcje liczbowe $f^n(x_1, \dots, x_n)$ (dla $n = 1, 2, \dots$), to funkcje określone na pewnym podziorze zbioru \mathcal{N}^n o wartościach będących liczbami naturalnymi.

Dla dowolnych liczb $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{N}$ oraz funkcji f^k i g^s piszemy

$$f^k(a_{j_1}, \dots, a_{j_k}) = g^s(a_{j_1}, \dots, a_{j_s}),$$

jeśli: albo wartości $f^k(a_{j_1}, \dots, a_{j_k})$ oraz $g^s(a_{j_1}, \dots, a_{j_s})$ są nieokreślone albo są obie określone i identyczne.

n -argumentowa funkcja $f^n(x_1, \dots, x_n)$ jest *całkowita*, jeśli jej dziedziną jest cały zbiór \mathcal{N}^n , czyli gdy $\delta_{f^n} = \mathcal{N}^n$.

Funkcje proste, złożenie i podstawienie

Następujące funkcje całkowite nazywamy *prostymi*:

- $s^1(x) = x + 1$,
- $o^1(x) = 0$,
- $I_m^n(x_1, \dots, x_n) = x_m$ (dla $1 \leq m \leq n$).

Funkcja $h^n(x_1, \dots, x_n) = g^m(f_1^n(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m^n(x_1, \dots, x_n))$ otrzymywana jest z funkcji g^m, f_1^n, \dots, f_m^n przez operację *złożenia*.

Funkcję $h^n(x_1, \dots, x_n) = g^m(t_1, \dots, t_m)$ otrzymujemy z pomocą operacji *podstawienia* z funkcji g^m, f_1, \dots, f_k , gdy $t_i = f_j(x_{j_1}, \dots, x_{j_s})$, gdzie każde x_{j_i} jest jedną ze zmiennych x_1, \dots, x_n lub t_i jest jedną ze zmiennych x_1, \dots, x_n .

Schemat rekursji prostej

Funkcję $f^{n+1}(x_1, \dots, x_n, y)$ otrzymujemy z funkcji $g^n(x_1, \dots, x_n)$ oraz $h^{n+2}(x_1, \dots, x_n, y, z)$ za pomocą *operatora rekursji prostej*, gdy może ona być określona następującym *schematem rekursji prostej*:

- $f^{n+1}(x_1, \dots, x_n, 0) = g^n(x_1, \dots, x_n)$,
- $f^{n+1}(x_1, \dots, x_n, y + 1) = h^{n+2}(x_1, \dots, x_n, y, f^{n+1}(x_1, \dots, x_n, y))$.

Dla $n = 0$ schemat rekursji prostej przyjmuje następującą postać:

- $f(0) = a$,
- $f(y + 1) = g(y, f(y))$,

gdzie a jest jednoargumentową funkcją stałą o wartości a .

Minimum efektywne

Funkcję $f^n(x_1, \dots, x_n)$ otrzymujemy z funkcji $g^{n+1}(x_1, \dots, x_n, y)$ za pomocą operacji *minimum efektywnego* (za pomocą μ -operatora), co zaznaczamy następująco:

$$f^n(x_1, \dots, x_n) = \mu y [g^{n+1}(x_1, \dots, x_n, y) = 0],$$

gdy spełniony jest warunek:

$f^n(x_1, \dots, x_n)$ jest określone i równe y wtedy i tylko wtedy, gdy $g(x_1, \dots, x_n, 0), \dots, g(x_1, \dots, x_n, y - 1)$ są wszystkie określone i różne od 0, zaś $g(x_1, \dots, x_n, y) = 0$.

Funkcje: pierwotnie, częściowo i ogólnie rekurencyjne

- Funkcja $f(x_1, \dots, x_n)$ jest *pierwotnie rekurencyjna* (*prf*), jeśli może być otrzymana z funkcji prostych za pomocą skończonej liczby zastosowań operacji złożenia oraz rekursji prostej.
- Funkcja $f(x_1, \dots, x_n)$ jest *częściowo rekurencyjna* (*crf*), jeśli może być otrzymana z funkcji prostych za pomocą skończonej liczby zastosowań operacji złożenia, rekursji prostej oraz minimum efektywnego.
- Funkcja $f(x_1, \dots, x_n)$ jest *ogólnie rekurencyjna* (*orf*), gdy jest ona całkowitą funkcją częściowo rekurencyjną.

Każda funkcja pierwotnie rekurencyjna jest też ogólnie rekurencyjna (lecz nie na odwrót).

Ograniczony μ -operator

Funkcję $f^n(x_1, \dots, x_n)$ otrzymujemy z funkcji

$$g^{n+1}(x_1, \dots, x_n, y) \text{ oraz } h^n(x_1, \dots, x_n)$$

za pomocą *ograniczonego μ -operatora*, jeśli dla wszystkich x_1, \dots, x_n :

$$\mu y [g^{n+1}(x_1, \dots, x_n, y) = 0]$$

jest określone i nie większe niż $h^n(x_1, \dots, x_n)$ oraz

$$f^n(x_1, \dots, x_n) = \mu y [g^{n+1}(x_1, \dots, x_n, y) = 0].$$

Inne schematy rekursji

Funkcję f^{n+1} otrzymujemy z $g^n, h^{n+s+1}, t_1^1, \dots, t_s^1$ z pomocą schematu *rekursji zwrotnej*, gdy może ona być określona schematem:

$$\begin{aligned} f^{n+1}(x_1, \dots, x_n, 0) &= g^n(x_1, \dots, x_n), \\ f^{n+1}(x_1, \dots, x_n, y + 1) &= \\ &= h^{n+s+1}(x_1, \dots, x_n, y, f(x_1, \dots, x_n, t_1(y + 1)), \dots \\ &\quad \dots, f(x_1, \dots, x_n, t_s(y + 1))), \end{aligned}$$

gdzie $t_1(y + 1) \leq y, \dots, t_s(y + 1) \leq y$.

Jeśli funkcje g, h, t_1, \dots, t_s są pierwotnie rekurencyjne, to funkcja f jest pierwotnie rekurencyjna.

Inne schematy rekursji

Niech $f_1^{n+1}, \dots, f_k^{n+1}$ będą zdefiniowane przez *rekursję jednoczesną*, tzn. za pomocą następującego schematu:

$$\begin{cases} f_i^{n+1}(x_1, \dots, x_n, 0) = g_i^n(x_1, \dots, x_n), \\ f_i^{n+1}(x_1, \dots, x_n, y + 1) = \\ = h_i^{n+k+1}(x_1, \dots, x_n, y, f_1(x_1, \dots, x_n, y), \dots, f_k(x_1, \dots, x_n, y)) \end{cases}$$

dla wszystkich $1 \leq i \leq k$.

Można udowodnić, że jeśli funkcje $g_1, \dots, g_k, h_1, \dots, h_k$ są pierwotnie rekurencyjne, to funkcje f_1, \dots, f_k są pierwotnie rekurencyjne.

Inne schematy rekursji

Schemat **rekursji ograniczonej** ma postać następującą:

$$f(x_1, \dots, x_n, 0) = g(x_1, \dots, x_n)$$

$$f(x_1, \dots, x_n, x + 1) = h(x_1, \dots, x_n, x, f(x_1, \dots, x_n, x))$$

$$f(x_1, \dots, x_n, x) \leq j(x_1, \dots, x_n, x).$$

Możliwe są różne dalsze schematy rekursji.

Definiowanie przez rekursję to ważne narzędzie w językach programowania.

Funkcje elementarnie rekurencyjne

Klasa funkcji **elementarnie rekurencyjnych** to najmniejsza klasa funkcji zawierająca funkcje:

- odejmowania $\dot{-}$,
- funkcję wykładniczą,
- funkcję następnika,

oraz zamknięta ze względu na operacje:

- złożenia,
- minimum ograniczonego.

Można udowodnić, że klasa wszystkich funkcji elementarnie rekurencyjnych jest zawarta w klasie wszystkich funkcji pierwotnie rekurencyjnych (i ta inkluzja jest właściwa).

Hierarchia Grzegorzcyka

Hierarchia Grzegorzcyka. Niech: $f_0(x, y) = y + 1$, $f_1(x, y) = x + y$,
 $f_2(x, y) = (x + 1) \cdot (y + 1)$, i dla $n \geq 2$:
 $f_{n+1}(0, y) = f_n(x + 1, y + 1)$
 $f_{n+1}(x + 1, y) = f_{n+1}(x, f_{n+1}(x, y))$.

Dla dowolnego n niech E_n będzie najmniejszą klasą funkcji zawierającą funkcje: I_1^2 , I_2^2 , funkcję następnika oraz funkcję f_n i zamkniętą ze względu na złożenie i schemat rekursji ograniczonej. Wtedy:

- E_3 jest równa klasie funkcji elementarnie rekurencyjnych;
- dla każdego n mamy: $E_n \subset E_{n+1}$ (wszystkie inkluzje właściwe);
- $\bigcup_n E_n$ jest równy klasie wszystkich funkcji pierwotnie rekurencyjnych;
- dla każdego n funkcje f_n są ściśle rosnące względem każdego z argumentów;
- dla każdego n funkcja $f_{n+1}(x, x)$ rośnie szybciej niż wszystkie funkcje klasy E_n .

Oznaczenia

Stosujemy oznaczenie:

$$f^n(x_1, \dots, x_n) = \mu y [g(x_1, \dots, x_n, y) = h(x_1, \dots, x_n, y)],$$

gdy spełniony jest warunek: $f^n(x_1, \dots, x_n)$ jest określone i równe y wtedy i tylko wtedy, gdy $g(x_1, \dots, x_n, i)$ oraz $h(x_1, \dots, x_n, i)$ są określone dla $i = 0, 1, \dots, y$, $g(x_1, \dots, x_n, i) \neq h(x_1, \dots, x_n, i)$ dla $i < y$ oraz $g(x_1, \dots, x_n, y) = h(x_1, \dots, x_n, y)$.

W podobny sposób rozumiemy oznaczenia:

- $\mu y [\varphi(x_1, \dots, x_n, y) \neq g(x_1, \dots, x_n, y)],$
- $\mu y [\varphi(x_1, \dots, x_n, y) \leq g(x_1, \dots, x_n, y)],$
- $\mu y [\varphi(x_1, \dots, x_n, y) < g(x_1, \dots, x_n, y)],$ itd.

Iteracja, odwrócenie, funkcja uniwersalna

Będziemy mówić, że funkcję $f(x)$ otrzymujemy z funkcji $g(x)$ przez *iterację* i oznaczać ten fakt przez $f(x) = ig(x)$, gdy

- $f(0) = 0$,
- $f(x + 1) = g(f(x))$.

Będziemy mówić, że funkcję $f(x)$ otrzymujemy z funkcji $g(x)$ przez *odwrócenie* i zaznaczać ten fakt przez $f(x) = g^{-1}(x)$, gdy

$$f(x) = \mu y [g(y) = x].$$

Niech \mathbf{G} będzie pewną rodziną n -argumentowych funkcji częściowych. Funkcję F^{n+1} nazwiemy *funkcją uniwersalną* dla \mathbf{G} , jeśli

$$\mathbf{G} = \{F(0, x_1, \dots, x_n), F(1, x_1, \dots, x_n), \dots\}.$$

Przykłady funkcji rekurencyjnych

Następujące funkcje są pierwotnie rekurencyjne:

- (1) $f(x) = x + n$;
- (2) $f(x) = n$;
- (3) $f(x, y) = x + y$;
- (4) $f(x, y) = x \cdot y$;
- (5) $f(x, y) = x^y$ (przyjmujemy $0^0 = 1$);
- (6) $f(x) = x!$ (przyjmujemy $0! = 1$).

Przykłady funkcji rekurencyjnych

Dowód.

- (1) $f(x) = \underbrace{s(s(\dots s(x)\dots))}_{n \text{ razy}}$.
- (2) $f(x) = \underbrace{s(s(\dots s(o(x))\dots))}_{n \text{ razy}}$.
- (3) $f(x, y)$ otrzymujemy przez rekursję prostą z funkcji $g(x) = I_1^1(x)$ oraz $h(x, y, z) = s(I_3^3(x, y, z))$.
- (4) $f(x, y)$ otrzymujemy przez rekursję prostą z $g(x) = o(x)$ i $h(x, y, z) = I_1^3(x, y, z) + I_3^3(x, y, z)$.
- (5) $f(x, 0) = 1, f(x, y + 1) = x \cdot f(x, y)$.
- (6) $f(0) = 1, f(x + 1) = s(x) \cdot f(x)$.

Przykłady funkcji rekurencyjnych

Następujące funkcje są pierwotnie rekurencyjne:

- (7) $sg(x) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } x = 0 \\ 1, & \text{gdy } x > 0; \end{cases}$
- (8) $\overline{sg}(x) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } x > 0 \\ 1, & \text{gdy } x = 0; \end{cases}$
- (9) $x \dot{-} 1 = \begin{cases} 0, & \text{gdy } x = 0 \\ x - 1, & \text{gdy } x > 0; \end{cases}$
- (10) $x \dot{-} y = \begin{cases} 0, & \text{gdy } x \leq y \\ 1, & \text{gdy } x > y; \end{cases}$
- (11) $|x - y|$;
- (12) $\max(x, y)$;
- (13) $\min(x, y)$.

Przykłady funkcji rekurencyjnych

Dowód.

- (7) $\text{sg } 0 = 0$; $\text{sg}(x + 1) = s(o(x))$.
- (8) $\overline{\text{sg}}0 = 1$, $\overline{\text{sg}}(x + 1) = o(x)$.
- (9) $0 \dot{\div} 1 = 0$, $(x + 1) \dot{\div} 1 = x$.
- (10) $x \dot{\div} 0 = x$, $x \dot{\div} (y + 1) = (x \dot{\div} y) \dot{\div} 1$.
- (11) $|x - y| = (x \dot{\div} y) + (y \dot{\div} x)$.
- (12) $\max(x, y) = x \cdot \text{sg}(x \dot{\div} y) + y \cdot \overline{\text{sg}}(x \dot{\div} y)$.
- (13) $\min(x, y) = x \cdot \text{sg}(y \dot{\div} x) + y \cdot \overline{\text{sg}}(y \dot{\div} x)$.

Przykłady funkcji rekurencyjnych

Niech funkcje $f_0^n, f_1^n, \dots, f_s^n$ mają następującą własność: dla dowolnych argumentów x_1, \dots, x_n jedna i tylko jedna z tych funkcji równa jest 0.

Powiemy, że funkcja g^n jest *określona warunkowo*, gdy

$$g^n(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} h_0^n(x_1, \dots, x_n), & \text{gdy } f_0^n(x_1, \dots, x_n) = 0, \\ \dots & \dots \quad \dots \\ h_s^n(x_1, \dots, x_n), & \text{gdy } f_s^n(x_1, \dots, x_n) = 0. \end{cases}$$

Jeśli funkcje $h_0^n, \dots, h_s^n, f_0^n, \dots, f_s^n$ są pierwotnie rekurencyjne, to g^n jest pierwotnie rekurencyjna.

Dowód.
$$g(x_1, \dots, x_n) = h_0(x_1, \dots, x_n) \cdot \overline{\text{sg}} f_0(x_1, \dots, x_n) + \dots \\ \dots + h_s(x_1, \dots, x_n) \cdot \overline{\text{sg}} f_s(x_1, \dots, x_n).$$

Przykłady funkcji rekurencyjnych

Niech $g^{n+1}, \alpha^m, \beta^m$ będą funkcjami pierwotnie rekurencyjnymi. Wtedy następujące funkcje są pierwotnie rekurencyjne:

$$(14) f^{n+1}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = \sum_{i=0}^{x_{n+1}} g(x_1, \dots, x_n, i);$$

$$(15) f^{n+2}(x_1, \dots, x_n, y, z) = \begin{cases} \sum_{i=y}^z g(x_1, \dots, x_n, i), & \text{gdy } y \leq z, \\ 0, & \text{gdy } y > z; \end{cases}$$

$$(16) f^{n+m}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = \begin{cases} \sum_{i=\alpha(y_1, \dots, y_m)}^{\beta(y_1, \dots, y_m)} g(x_1, \dots, x_n, i), & \text{gdy } \alpha(y_1, \dots, y_m) \leq \beta(y_1, \dots, y_m), \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach;} \end{cases}$$

Przykłady funkcji rekurencyjnych

$$(17) f^{n+1}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = \prod_{i=0}^{x_{n+1}} g(x_1, \dots, x_n, i);$$

$$(18) f^{n+2}(x_1, \dots, x_n, y, z) = \begin{cases} \prod_{i=y}^z g(x_1, \dots, x_n, i), & \text{gdy } y \leq z \\ 0, & \text{gdy } y > z; \end{cases}$$

$$(19) f^{n+m}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = \begin{cases} \prod_{i=\alpha(y_1, \dots, y_m)}^{\beta(y_1, \dots, y_m)} g(x_1, \dots, x_n, i), & \text{gdy } \alpha(y_1, \dots, y_m) \leq \beta(y_1, \dots, y_m), \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Jeśli funkcję f otrzymujemy z funkcji pierwotnie rekurencyjnych g i h za pomocą ograniczonego μ -operatora, to f jest pierwotnie rekurencyjna.

Dowód. $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^{h(x_1, \dots, x_n)} \text{sg}(\prod_{j=0}^i g(x_1, \dots, x_n, j)).$

Przykłady funkcji rekurencyjnych

Następujące funkcje są pierwotnie rekurencyjne:

- (20) $\lfloor \frac{x}{y} \rfloor$ — część całkowita z dzielenia x przez y (przyjmujemy, że $\lfloor \frac{x}{0} \rfloor = x$);
- (21) $\text{rest}(x, y)$ — reszta z dzielenia x przez y (przyjmujemy, że $\text{rest}(x, 0) = x$);
- (22) $\tau(x)$ — liczba dzielników liczby x , gdzie $\tau(0) = 0$;
- (23) $\sigma(x)$ — suma dzielników liczby x , gdzie $\sigma(0) = 0$;
- (24) $\text{lh}(x)$ — liczba dzielników liczby x , które są liczbami pierwszymi (przyjmujemy $\text{lh}(0) = 0$);
- (25) $\pi(x)$ — liczba liczb pierwszych nie większych niż x ;
- (26) $k(x, y)$ — najmniejsza wspólna wielokrotność liczb x i y , gdzie $k(x, 0) = k$, $k(0, y) = 0$;
- (27) $d(x, y)$ — największy wspólny dzielnik liczb x i y , gdzie $d(0, 0) = 0$.

Przykłady funkcji rekurencyjnych

$$(20) \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor = \sum_{i=1}^x \overline{\text{sg}}(iy \dot{-} x).$$

$$(21) \text{rest}(x, y) = x \dot{-} y \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor.$$

$$(22) \tau(x) = \sum_{i=1}^x \overline{\text{sg}}(\text{rest}(x, i)).$$

$$(23) \sigma(x) = \sum_{i=1}^x i \overline{\text{sg}}(\text{rest}(x, i)).$$

$$(24) x \text{ jest liczbą pierwszą} \Leftrightarrow \tau(x) = 2 \text{ (zob. (22))};$$

$$\text{lh}(x) = \sum_{i=1}^x \overline{\text{sg}}(|\tau(i) - 2| + \text{rest}(x, i)).$$

$$(25) \pi(x) = \sum_{i=1}^x \overline{\text{sg}}(|\tau(i) - 2|) \text{ (zob. (22))}.$$

$$(26) k(x, y) = \mu z [z \cdot \overline{\text{sg}}(x \cdot y) + \text{sg}(x \cdot y)(\overline{\text{sg}} z + \text{rest}(z, x) + \text{rest}(z, y)) = 0] \leq x \cdot y.$$

$$(27) d(x, y) = \left\lfloor \frac{xy}{k(x, y)} \right\rfloor + x \cdot \overline{\text{sg}} y + y \cdot \overline{\text{sg}} x \text{ (zob. (26))}.$$

Przykłady funkcji rekurencyjnych

Następujące funkcje są pierwotnie rekurencyjne:

- (28) $p(x)$ – x -ta liczba pierwsza ($p(0) = 2, p(1) = 3, p(2) = 5, \dots$);
- (29) $\text{long}(x)$ – numer największego dzielnika liczby x , będącego liczbą pierwszą;
- (30) $\text{ex}(x, y)$ – wykładnik potęgi x -tej liczby pierwszej $p(x)$ w kanonicznym rozkładzie liczby y na czynniki pierwsze; przyjmujemy, że $\text{ex}(x, 0) = 0$;
- (31) $\lfloor \sqrt{x} \rfloor$;
- (32) $\lfloor \sqrt[x]{x} \rfloor$, gdzie $\lfloor \sqrt[0]{x} \rfloor = x$;
- (33) $\lfloor x\sqrt{2} \rfloor$.

Przykłady funkcji rekurencyjnych

- (28) $p(x) = \mu y [|\pi(y) - (x + 1)| = 0] \leq 2^{2^x}$ (zob. (25)).
- (29) $\text{long}(x) = \mu y \left[\sum_{i=y+1}^x \overline{\text{sg}}(\text{rest}(x, p(i))) = 0 \right] \leq x$.
- (30) $\text{ex}(x, y) = \mu z [\overline{\text{sg}}(\text{rest}(y, (p(x))^{z+1})) \cdot \text{sg } y = 0] \leq x$ (zob. (28)).
- (31) $[\sqrt{x}] = \mu z [\overline{\text{sg}}((z+1)^2 \dot{-} x) = 0] \leq x$.
- (32) $[\sqrt[y]{x}] = \mu z [\overline{\text{sg}}((z+1)^y \dot{-} x) \cdot \text{sg } y = 0] + \overline{\text{sg}} y \cdot x \leq x$.
- (33) $[x\sqrt{2}] = \mu z [\overline{\text{sg}}((z+1)^2 - 2x^2) = 0] \leq 2x$.

Jest nieskończenie wiele funkcji pierwotnie (elementarnie, częściowo, ogólnie) rekurencyjnych.

Każda z tych klas zawiera jednak tylko \aleph_0 funkcji.

Ponieważ **wszystkich** funkcji z \mathcal{N}^n w \mathcal{N} jest **kontinuum**, więc **prawie wszystkie** funkcje są poza klasą funkcji ogólnie rekurencyjnych.

Niektóre własności funkcji rekurencyjnych

Funkcja numerująca Cantora $c(x, y) = \frac{(x+y)^2 + 3x + y}{2}$ ustanawia wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość między \mathcal{N}^2 a \mathcal{N} (koduje pary liczb naturalnych).

Niech $l(x)$ i $r(x)$ będą takie, że $c(l(x), r(x)) = x$. Wtedy $l(x)$ i $r(x)$ są pierwotnie rekurencyjne oraz $l(c(x, y)) = x$, $r(c(x, y)) = y$.

$$l(x) + r(x) = \mu z [\overline{\text{sg}} ([\frac{(z+1)(z+2)}{2}] \dot{-} x) = 0] = z_0(x) \leq 2x;$$

$$l(x) = x \dot{-} \left[\frac{z_0(x) \cdot (z_0(x) + 1)}{2} \right];$$

$$r(x) = z_0(x) \dot{-} l(x).$$

Niektóre własności funkcji rekurencyjnych

Dla każdego $n \geq 1$ zdefiniujemy funkcje: $c^1(x) = x_1$

$$c^{n+1}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n+1}) = c^n(c(x_1, x_2), x_3, \dots, x_{n+1}).$$

Niech c_{ni} ($1 \leq i \leq n$) będą takie, że $c^n(c_{n1}(x), \dots, c_{nn}(x)) = x$. Wtedy:

- Zachodzą równości: $c_{ni}(c^n(x_1, \dots, x_n)) = x_i$ dla $1 \leq i \leq n$.
- Funkcje c^n i c_{ni} są pierwotnie rekurencyjne.
- Funkcje $c^n(x_1, \dots, x_n)$ ustanawiają wzajemnie jednoznaczne odpowiedniości między \mathcal{N}^n oraz \mathcal{N} (numerują ciągi liczb naturalnych długości n).
- Z jednoargumentowych funkcji częściowo rekurencyjnych oraz z funkcji $c^n(x_1, \dots, x_n)$ otrzymać można wszystkie funkcje częściowo rekurencyjne.

Niektóre własności funkcji rekurencyjnych

Rozważmy następującą *funkcję Gödla*:

$$\beta(x, y, z) = \text{rest}(x, 1 + y(z + 1)).$$

Można udowodnić, że dla dowolnego skończonego ciągu liczb naturalnych a_0, \dots, a_n układ równań:

$$\begin{cases} \beta(x, y, 0) = a_0 \\ \dots \\ \beta(x, y, n) = a_n \end{cases}$$

ma co najmniej jedno rozwiązanie x, y .

Funkcje kodujące zostaną wykorzystane w dowodach twierdzeń metalogicznych dotyczących Arytmetyki Peana.

Niektóre własności funkcji rekurencyjnych

Dla każdej liczby naturalnej n istnieją funkcje uniwersalne dla klas wszystkich n -argumentowych funkcji:

- pierwotnie rekurencyjnych;
- ogólnie rekurencyjnych.

Można udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje **ogólnie rekurencyjna** funkcja uniwersalna dla klasy wszystkich n -argumentowych funkcji pierwotnie rekurencyjnych.

W dowodzie tego twierdzenia wykorzystuje się możliwość kodowania liczb naturalnych.

W szczególności, wykazuje się, że zakodować można definiowanie przez schemat rekursji prostej oraz definiowanie przez złożenie.

Niektóre własności funkcji rekurencyjnych

Twierdzenie A. Nie istnieje funkcja pierwotnie rekurencyjna uniwersalna dla rodziny wszystkich n -argumentowych funkcji pierwotnie rekurencyjnych.

Twierdzenie B. Nie istnieje funkcja częściowo rekurencyjna uniwersalna dla rodziny wszystkich n -argumentowych funkcji ogólnie rekurencyjnych.

Dowód A. Niech $F(t, x_1, \dots, x_n)$ będzie funkcją uniwersalną dla rodziny wszystkich n -argumentowych funkcji pierwotnie rekurencyjnych i **przypuśćmy**, że jest ona pierwotnie rekurencyjna. Wtedy $f(x_1, \dots, x_n) = 1 + F(x_1, x_1, \dots, x_n) = F(t_0, x_1, \dots, x_n)$ dla pewnego t_0 . Stąd $1 + F(t_0, t_0, \dots, t_0) = F(t_0, t_0, \dots, t_0)$. Dochodzimy do sprzeczności.

Dowód B. Zauważmy, że funkcja uniwersalna powinna być wszędzie określona, tzn. całkowita. Dalej, zobacz dowód Twierdzenia A.

Tak więc, choć można skonstruować funkcje uniwersalne dla rodziny wszystkich n -argumentowych funkcji:

- pierwotnie rekurencyjnych;
- ogólnie rekurencyjnych,

to z powyższych twierdzeń A i B otrzymujemy przykłady $n + 1$ -argumentowych funkcji, które **nie** są:

- pierwotnie rekurencyjne;
- ogólnie rekurencyjne.

Inna metoda pokazywania, iż jakaś funkcja **nie** należy do określonej klasy funkcji to dowód, że funkcja ta „rośnie szybciej” niż każda z funkcji tej klasy. W ten sposób pokazuje się np., że funkcja Ackermanna nie jest funkcją pierwotnie rekurencyjną.

Koniec

Można udowodnić, że:

- Dowolna funkcja częściowo rekurencyjna jest prawidłowo obliczalna w sensie Turinga.
- Dowolna funkcja obliczalna w sensie Turinga jest częściowo rekurencyjna.
- Istnieje funkcja pierwotnie rekurencyjna $S(z, x, y, w)$ taka, że:

$$S(z, x, y, w) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } z = \lambda(T) \text{ i maszyna } T \text{ przetwarza} \\ & \text{słowo } q_1 0 1^x \text{ w słowo } q_0 0 1^y 0 \dots 0 \\ & \text{w nie więcej niż } w \text{ krokach,} \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Koniec

Na dziś wystarczy, prawda?

Zabieraj zabawki i pędź cieszyć się **Wiosną**:

