Matematyczne fantazje kognitywistów

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM

www.logic.amu.edu.pl

pogon@amu.edu.pl

W niniejszej notatce ustosunkowujemy się krytycznie wobec koncepcji *matematyki ucieleśnionej*, propagowanej przez niektórych kognitywistów – Lakoff, Núñez 2000. Pisaliśmy już o tym obszerniej w: Pogonowski 2011, 2012. W polskiej literaturze filozoficznej znaleźć można inne jeszcze omówienia wspomnianej koncepcji, np. Hohol 2011. Ponad trzydzieści lat temu zaproponowano ciekawą teorię tworzenia i wykorzystywania metafor w językach etnicznych – Lakoff, Johnson 1980. Obecnie Lakoff i Núñez próbują stosować ją w objaśnianiu genezy i funkcjonowania matematyki. Podejście to doczekało się wielu recenzji – od entuzjastycznych po wielce krytyczne, zob. np.: Auslander 2001, Devlin 2008, Elglaly, Quek 2009, Gold 2001, Goldin 2001, Henderson 2002, Madden 2001, Paulos 2001, Schiralli, Sinclair 2003, Siegfried 2001, Voorhees 2004.

Matematyka ucieleśniona. Książka Lakoffa i Núñeza *Where Mathematics Comes From. How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being* nie jest – co wyraźnie podkreślają autorzy – ani rozprawą matematyczną ani traktatem filozoficznym. Jej celem jest wyjaśnienie genezy i funkcjonowania matematyki na gruncie nauk kognitywnych. Autorzy formułują jednak także pewne deklaracje filozoficzne, przede wszystkim krytyczne wobec platonizmu matematycznego. Nie podejmiemy w tym miejscu drobiazgowej polemiki z filozoficznymi konsekwencjami przyjęcia perspektywy matematyki ucieleśnionej, skupimy się natomiast na tych zagadnieniach matematycznych, które – naszym zdaniem – sprawiać mogą trudności omawianej koncepcji w jej obecnej postaci. Możliwe, że koncepcja matematyki ucieleśnionej tłumaczy *niektóre* aspekty tworzenia i uprawiania matematyki, jest jednak przesadnym twierdzenie, że *całość* aktywności matematycznych można uzasadniać w ramach tej koncepcji.

Metafory pojęciowe rozumiane są jako procesy poznawcze – por. Lakoff, Núñez 2000, 6:

> Conceptual metaphor is a cognitive mechanism for allowing us to reason about one kind of thing as if it were another. […] It is a grounded, inference-preserving cross-domain mapping – a neural mechanism that allows us to use the inferential structure of one conceptual domain (say, geometry) to reason about another (say, arithmetic).

Tak więc, metafory poznawcze polegają na odwzorowaniu z jednej dziedziny pojęciowej w inną, z zachowaniem pewnych informacji. Pojęcia bardziej abstrakcyjne tworzone są w ten sposób z pojęć o większym stopniu konkretności. Czasami twierdzi się, że metafory pojęciowe zachowują wybrane *własności* pojęć, natomiast tworzenie pojęć przez analogie polega na zachowywaniu stosownych *relacji*. Lakoff i Núñez wyróżniają metafory: *bazujące* (dostarczają one podstawowych, bezpośrednio ugruntowanych pojęć; dla przykładu: dodawanie jako grupowanie razem obiektów) oraz *łączące* (dostarczają one bardziej abstrakcyjnych pojęć; dla przykładu: liczby to punkty na prostej, figury geometryczne to równania algebraiczne). Postulują istnienie schematów obrazowych (np.: *pojemnik* wraz z *wnętrzem*, *brzegiem*, *zewnętrzem*). W językach etnicznych schematy obrazowe związane są m.in. z systemami zależności *aspektowych*. Ruch i jego wyrażanie dostarczają schematu *źródło—droga—cel*. *Złącze pojęciowe* to kombinacja dwóch różnych struktur poznawczych wraz z ustalonymi odpowiedniościami pomiędzy nimi. Jeśli te połączenia są metaforyczne, to mówimy o *złączu metaforycznym*. Za przykład niech służy tu *oś liczbowa*, która korzysta z metafory *liczby to punkty na prostej*. Monografia Lakoff, Johnson 1980 podaje mnóstwo przykładów wykorzystania wprowadzonych pojęć w analizie semantycznej języków etnicznych.

Nie jest celowe przytaczanie tu listy metafor pojęciowych, które Lakoff i Núñez proponują w koncepcji matematyki ucieleśnionej. Powiedzmy jedynie, że np. w przypadku arytmetyki wskazują oni na cztery tego rodzaju metafory: grupowania obiektów, konstruowania obiektów, odcinka pomiarowego oraz ruchu wzdłuż drogi – miałyby one być odpowiedzialne za konstrukcje liczb. Bodaj najważniejsza z metafor pojęciowych wyróżniona przez autorów to BMI – *podstawowa metafora nieskończoności* (Basic Metaphor of Infinity). Punktem wyjścia jest rozumienie *procesów* jako ruchów, przy czym procesy ciągłe, bez wyraźnego ich zakończenia, ujmowane są jako (dyskretne) procesy *powtarzalne*. Uzasadnienia dla takich metafor znajdują autorzy m.in. w systemach aspektowych języków etnicznych. Piszą o niej następująco (Lakoff, Núñez 2000, 158):

> Why is this metaphor important for infinity? The reason is that we commonly apply it to infinitely continuous processes. Continuous processes without end – infinite continuous processes – are conceptualized via this metaphor as if they were infinite iterative processes, processes that iterate without end but in which each iteration has an endpoint and a result. For example, consider infinitely continuous motion, which has no intermediate endpoints and no intermediate locations where the motion stops. Such infinitely continuous motion can be conceptualized metaphorically as iterated motion with intermediate endings to motion andintermediate locations – but with infinitely many iterations.
>
> This metaphor is used in the conceptualization of mathematics to break down continuous processes into infinitely iterating step-by-step processes, in which each step is discrete and minimal. For example, the indefinitely continuous process of reaching a limit is typically conceptualized via this metaphor as an infinite sequence of well-defined steps.

Tak więc, zdaniem autorów, BMI spotykamy w matematyce wszędzie tam, gdzie dokonujemy jakiegoś *przejścia do granicy*, zastosowania jakiejś *zasady domknięcia*, a także gdy korzystamy z zasady *indukcji matematycznej*. Obiekty graniczne, infinitarne, tworzone miałyby być na mocy metafory, która każe uzupełnić powtarzalny w nieograniczonej liczbie kroków proces przez wynik takiego procesu. Tak miałyby powstawać granice ciągów, granice funkcji, punkty w nieskończoności, liczby porządkowe i kardynalne, itd.

Nie będziemy tu znęcać się nad autorami *Where mathematics comes from*, wytykając im popełnione błędy matematyczne – zainteresowany czytelnik może znaleźć ich omówienie na przykład w cytowanych wyżej recenzjach. Ograniczymy się do wyliczenia – trochę ad hoc – kilku problemów, które bądź zostały przez autorów pominięte, bądź, w naszym przekonaniu, sprawiać mogą trudności w koncepcji matematyki ucieleśnionej.

Teoria mnogości. Omawiając proste konstrukcje teorii mnogości autorzy wykorzystują metaforę pojemnika – zbiory miałyby być wedle niej całościami, gromadzącymi wewnątrz elementy. Jest to może zgodne – przywołując znaną anegdotę – z poglądem wyrażonym przez Dedekinda, ale nie z poglądem Cantora: ten drugi mówił, że wyobraża sobie zbiory jako *przepaście*. Jak zauważył Mostowski, cytując tę anegdotę (Mostowski 1967), sytuacja we współczesnej teorii mnogości raczej skłania do przychylenia się do wizji Cantora: aksjomaty teorii mnogości charakteryzują pojęcie zbioru w sposób daleki od kategoryczności lub nawet semantycznej zupełności. Dowodzą tego znane twierdzenia o niezupełności teorii mnogości. Oczywiście w przypadku „prostych'' zbiorów (np. niewielkich zbiorów skończonych) metafora pojemnika bywa użyteczna. Należy jednak pamiętać, że już na samym początku tworzenia teorii mnogości brano pod uwagę niezwykle skomplikowane zbiory nieskończone. Czytelnik nie znający teorii mnogości może odnieść wrażenie, że jedyną metodą tworzenia hierarchii zbiorów nieskończonych jest stosowanie operacji zbioru potęgowego oraz sumy zbiorów. Tak oczywiście nie jest: hierarchię alefów buduje się inną metodą, a (niezależna od aksjomatów) *hipoteza kontinuum* postuluje tożsamość tych dwóch hierarchii. Autorzy nie wspominają w ogóle o *aksjomacie zastępowania*, który jest niezbędny w przeprowadzaniu konstrukcji metodą *indukcji pozaskończonej*. Zasadne wydaje się twierdzenie, że w tworzeniu uniwersum teorii mnogości idea *ufundowania* jest bodaj ważniejsza od metafor korzystających z pojemników. Nie jest dla nas jasne, jakie miejsce w swojej koncepcji autorzy znajdują dla różnicy miedzy *opisywaniem* a *definiowaniem* (np. liczb porządkowych). Jak wiadomo, tylko niektóre liczby porządkowe mogą zostać opisane za pomocą *efektywnych* systemów notacji. Wreszcie, należałoby zastanowić się również nad tym, czy BMI, podstawowa metafora nieskończoności autorów, jest adekwatna w przypadku rozważanych w teorii mnogości *aksjomatów dużych liczb kardynalnych*. Jak wiadomo, aksjomaty te motywowane są rozmaitymi względami natury matematycznej. Powiązane są z *siłą niesprzeczności* teorii. Nie rozstrzygają niczego w kwestii hipotezy kontinuum. Ich rozważanie uzasadniane bywa też względami czysto pragmatycznymi – dość powszechnie obecnie uważa się, że mają one gwarantować istnienie możliwie największej liczby zbiorów, analogicznie do aksjomatu zupełności w systemie geometrii Hilberta. Idea przeciwna – *aksjomaty ograniczenia* (Fraenkla, Gödla, Suszki) – została skrytykowana i zaniechana ponad pół wieku temu.

Ciągłość. Metaforyczną rekonstrukcję koncepcji Dedekinda podaną przez autorów omówiliśmy krytycznie w Pogonowski 2011. Zapewne nie za wszystkimi deklaracjami autorów potrafiliśmy nadążyć. Dedekind pokazał, że rodzina wszystkich przekrojów zbioru liczb wymiernych jest uporządkowana w sposób ciągły. W rodzinie tej określić można działania arytmetyczne, otrzymując w rezultacie ciało uporządkowane w sposób ciągły. Każde takie ciało jest archimedesowe. Dedekind wskazał na możliwość interpretacji ciągłości prostej rzeczywistej w terminach arytmetycznych. Należy może przypomnieć, że w systemie Euklidesa nie występowały proste – były tam tylko odcinki, które można dowolnie przedłużać. Jeśli więc mówić o jakiejś metaforze Dedekinda, to należałoby chyba odnosić ją do ukazanej przezeń odpowiedniości pomiędzy zdefiniowanymi przez niego (z uwzględnieniem własności arytmetycznych i porządkowych) liczbami rzeczywistymi a wielkościami geometrycznymi wiązanymi tradycyjnie z odcinkami. Ponadto, warto pamiętać, że uzupełnianie zbioru uporządkowanego metodą Dedekinda jest w samej swojej istocie *rozszerzaniem ciała* (liczb wymiernych), a nie po prostu „wypełnianiem luk w porządku'' nowymi elementami. Na marginesie dodajmy jeszcze, że aksjomat ciągłości jest niezależny od aksjomatów geometrii absolutnej. Istnieją modele tej geometrii, w których aksjomat ten nie zachodzi. Pominiemy tu omówienie sposobu wprowadzania przez autorów tzw. *liczb ziarnistych*, który miał stanowić intuicyjną prezentację systemu liczb hiperrzeczywistych: jest on po prostu niepoprawny. Dodajmy, że w tekście książki nie znalazło się omówienie pojęcia „równości prawie wszędzie'' – pojęcia, które jest podstawowe nie tylko w konstrukcji liczb hiperrzeczywistych (metodą ultraproduktu), lecz jest również powszechnie obecne w analizie matematycznej. Na koniec, za ciekawe wyzwanie dla koncepcji matematyki ucieleśnionej uważamy odniesienie się do różnych „stopni dostępności" do poszczególnych liczb rzeczywistych (wymiernych, konstruowalnych, algebraicznych, definiowalnych, obliczalnych, przestępnych). Nie tylko cały zbiór liczb rzeczywistych jest nieco tajemniczym obiektem (hipoteza kontinuum!), również „zamieszkujące'' go liczby są mniej lub bardziej nieznane.

Geometria i topologia. Autorzy chcą, aby *punkty w nieskończoności* wprowadzane były przy użyciu ich ulubionej BMI. Jednak sposób, w jaki to czynią daleki jest od jasności – nie widać np. dlaczego taki punkt miałby zostać ich metodą wyznaczony jednoznacznie. W tym przypadku bardziej trafne wydaje się odwołanie bądź do metody *elementów idealnych* (por. np. Hilbert 1926), bądź do ustaleń dotyczących *niezmienników* przekształceń rzutowych. Warto może zauważyć w tym kontekście, że czym innym jest metaforyczna eksplikacja jakiejś konstrukcji pojęciowej, a czymś zgoła innym powody, motywacje, inspiracje, itp. dla których owa konstrukcja wykonywana jest w matematyce. Autorzy pochylają się nad wybranymi pojęciami geometrii euklidesowej, geometrii rzutowej oraz geometrii inwersji. Od czasów Gaussa, a później Riemanna rozważania geometryczne nabrały innych jakości – powstała geometria różniczkowa, wielowymiarowa, algebraiczna, narodziła się wreszcie całkiem odrębna gałąź matematyki: topologia, która później sama zaczęła rozgałęziać się na liczne działy. Uważamy, że należy podchodzić z pewną ostrożnością do pokusy metaforycznej rekonstrukcji pojęć geometrycznych i topologicznych. Po pierwsze, nie jest chyba zdecydowanie (empirycznie) rozstrzygnięte, czy wyposażeni jesteśmy w jakieś *naturalne*, jednoznacznie określone geometryczne (lub topologiczne) struktury poznawcze. Jakiś system filozoficzny głosić może coś innego, ale decydującą rolę odgrywa chyba jednak empiria, ewolucyjnie wykształcone struktury poznawcze. Po wtóre, historyczny rozwój idei matematycznych może nie być łatwo przekładalny na ową domniemaną naturalność struktur poznawczych – zauważmy, że (wysoce abstrakcyjna!) geometria Euklidesa poprzedza o wiele stuleci rozważania z geometrii rzutowej, którą chcemy uważać za formalną reprezentację widzenia przestrzennego. Nie należy też chyba nie doceniać *przemocy symbolicznej* szkoły, która narzuca nam pewne sposoby kategoryzacji zjawisk. Możliwe, że dałoby się zbudować wielopiętrowe metafory pojęciowe jakoś zdające sprawę z konstrukcji np. w geometrii różniczkowej (powiedzmy: redukujące pojęcie *krzywizny Gaussa* do innych, względnie prostszych pojęć) lub w geometrii rozmaitości (powiedzmy: metaforycznie bazujące pojęcie *tensora metrycznego* na systemie prostszych pojęć), ale na razie zrobione to nie zostało. Nie jesteśmy przekonani, że konstrukcje geometrii wielowymiarowych można w jakiś cudowny sposób osadzić na metaforach pojęciowych sięgających do doświadczenia potocznego. Przestrzenie wielowymiarowe wprowadzane były w matematyce stopniowo i ostrożnie. Początkowo przestrzenie o liczbie wymiarów większej od trzech uważano za byty całkowicie fikcyjne. Na uzyskanie przez nie pełnego obywatelstwa na terenie matematyki złożyło się wiele czynników, z różnych dyscyplin: teorii liczb (np. prace nad kwaternionami Hamiltona), algebry liniowej (prace Grassmanna), prace Gaussa i Riemanna, dające początek geometrii różniczkowej i geometrii rozmaitości, itd. Nie było wcale tak, że za pomocą jakiejś jednej metafory pojęciowej „oswojono'' przestrzenie wielowymiarowe. Podobnie rzecz miała się w swoim czasie z nowymi, coraz ogólniejszymi rodzajami liczb: ujemnymi, zespolonymi. Dotarcie do precyzyjnej definicji liczb rzeczywistych zabrało społeczności matematyków około dwóch tysięcy lat. Trudno nam sobie wyobrazić, że dokonać tego można „jednym skokiem'' metafory pojęciowej, bez zwrócenia uwagi na trwającą setki lat kumulację wiedzy matematycznej, stopniowo modyfikującej wyobrażenia intuicyjne.

Już na terenie topologii ogólnej dość szybko pożegnać musimy się z bezpośrednimi odwołaniami do intuicji doświadczenia potocznego, a zatem także z możliwościami osadzenia metafor pojęciowych na bardzo konkretnych pojęciach. To właśnie takie obiekty jak np. krzywa Knastera, jeziora Wada, sfera rogata Alexandera dostarczają przykładów konieczności nieuniknionego rozstania się z tym, co dyktuje intuicja doświadczenia potocznego. Twierdzenie Smale'a (o możliwości „przenicowania'' sfery dwuwymiarowej w przestrzeni trójwymiarowej) dotyczy dobrze przecież znanego obiektu (sfery dwuwymiarowej) i prostego, naocznego wręcz pojęcia topologicznego (homotopijnej równoważności), a jego teza dotkliwie kłóci się z wyobrażeniami przestrzennymi naszej codzienności. Jak tu metaforyzować? Istnienie sfer egzotycznych (homeomorficznych, lecz nie dyfeomorficznych ze „zwykłymi'' sferami), istnienie egzotycznej przestrzeni czterowymiarowej (jedynie w tym wymiarze występuje kontinuum (!) wzajem niedyfeomorficznych struktur) i dalsze jeszcze fakty dotyczące obiektów egzotycznych zmuszają chyba do powściągliwości, jeśli chodzi o próby bezpośredniego uchwycenia struktur różniczkowych w całej ogólności za pomocą metafor pojęciowych. Kolejną trudnością, z którą uporać musiałaby się koncepcja matematyki ucieleśnionej jest np. metaforyczne osadzenie całkiem ogólnej definicji pojęcia wymiaru topologicznego. Trzy używane w topologii pojęcia wymiaru pokrywają się w zakresie metrycznych przestrzeni ośrodkowych, a rozchodzą w przypadku szerszych klas przestrzeni. Trudno chyba oczekiwać pomocy ze strony metafor pojęciowych w wypracowaniu całkiem ogólnego pojęcia wymiaru. Ponadto, w przypadku prostych obiektów topologicznych „znanych ze szkoły'' (kostka, walec, torus) wymiar produktu przestrzeni topologicznych spełnia ładną zależność logarytmiczną (zapewne intuicyjnie oczekiwaną): wymiar produktu przestrzeni jest równy sumie wymiarów tych przestrzeni. Znane są jednak przykłady przestrzeni, dla których zależność ta nie zachodzi: istnieją przestrzenie dwuwymiarowe, których produkt ma trzy, a nie cztery wymiary. Nawet najbardziej „zwykła'' kartezjańska przestrzeń wielowymiarowa stwarza niespodzianki dla intuicji: dość wspomnieć o różnych paradoksach metrycznych w takiej przestrzeni o wielu (powiedzmy, więcej niż dziewięciu) wymiarach – objętość *n*-wymiarowej sfery jest „skupiona'' w pobliżu jej brzegu, a więc znakomita większość wielowymiarowego jabłuszka to jego skórka (oczywiście temu poglądowemu przykładowi nadać można precyzyjną postać rachunkową).

Intuicje matematyczne. Lakoff i Núñez wypowiadają się wyraźnie i zdecydowanie przeciw postawie platońskiej w matematyce. Wedle nich przesądem jest uważanie, iż matematyka jest jakoś obiektywnie obecna w świecie, że jej istnienie jest niezależne od jakichkolwiek umysłów. Przesądem nazywają też pogląd, że matematyka pozwala nam odkrywać jakieś prawdy o świecie. Za podstawowe założenia koncepcji ucieleśnionego umysłu (a więc także ucieleśnionej matematyki) uważają następujące stwierdzenia:

1. Umysł jest ucieleśniony, a zatem natura naszych ciał, mózgów oraz codziennego funkcjonowania kształtuje ludzkie pojęcia i rozumowania, w szczególności matematyczne.
2. Większość procesów myślowych (w tym tych związanych z matematyką) jest niedostępna naszej świadomości.
3. Abstrakcje ujmujemy w postaci metafor pojęciowych, przenosząc pojęcia związane z aktywnością sensoro-motoryczną do innych dziedzin, w tym dziedzin matematycznych.

Ludzka (tworzona przez ucieleśniony umysł) matematyka jest – wedle autorów – całą matematyką, nie istnieje matematyka transcendentalna, przekraczająca ciała i umysły oraz nadająca strukturę kosmosowi. To, czym jest ludzka matematyka jest empirycznym problemem naukowym, a nie problemem matematycznym ani filozoficznym. Tak więc, jedynie nauki kognitywne, badające mózg, umysł oraz wiążące je zależności są w stanie odpowiedzieć jaka jest istota ludzkiej matematyki. Przy objaśnianiu aktywności poznawczych człowieka (w tym matematycznych) odwołać się powinniśmy do ustaleń ewolucyjnych dotyczących zarówno gatunku ludzkiego, jak i rozwoju mózgu. Uwzględniać trzeba to, że – z ewolucyjnego punktu widzenia – mózg nie jest jakimś urządzeniem ogólnego przeznaczenia, lecz powinien być traktowany jako służący przetwarzaniu informacji dotyczącej: widzenia, ruchu, orientacji przestrzennej, wzajemnych oddziaływań interpersonalnych, emocji, języka, potocznych rozumowań. Zarówno język, jak i system pojęciowy są tworami, których organizacja zdeterminowana jest przez strukturę mózgu, ciała oraz świata zewnętrznego. Tylko w ten sposób można będzie sensownie zbliżyć się do odpowiedzi na pytanie: jakie konkretnie mechanizmy działania ludzkiego mózgu oraz umysłu pozwalają ludziom na tworzenie pojęć matematycznych oraz rozumowania matematyczne? Można oczywiście zgadzać się z tymi postulatami, należy jednak pamiętać również o tym, że w dalszym ciągu wiemy stosunkowo niewiele o działaniu mózgu i umysłu.

Negując zasadność postawy platońskiej w matematyce autorzy powinni – aby być konsekwentnymi – odmówić racji bytu *intuicji matematycznej*. Stanowi to, naszym zdaniem, poważny kłopot dla koncepcji matematyki ucieleśnionej. Każdy pracujący zawodowo matematyk przyzna, że przekonania intuicyjne pełnią w jego pracy podstawową rolę. Robota czysto formalna, dedukcyjna, czyli tworzenie dowodów nadaje pracom matematycznym ostateczny kształt. Takie bowiem są wymogi *kontekstu uzasadniania* w matematyce. Z kolei, na *kontekst odkrycia* matematycznego składa się wiele czynników, które opisać precyzyjnie nie jest łatwo. Istotne są tu przekonania intuicyjne, wiedza historyczna, umiejętność kojarzenia (pozornie odległych) faktów, wyobraźnia, różne heurystyki, rozumowania przez indukcję lub przez analogię, trafny wybór kierunku uogólniania, itd. Możliwe, że omawiane przez autorów metafory pojęciowe także mają ważny wkład w ów kontekst odkrycia, lecz z pewnością go nie wyczerpują.

Intuicje matematyczne są o wiele bardziej dynamiczne niż intuicyjne przekonania zdroworozsądkowe związane z doświadczeniem potocznym. Możliwe, że koncepcja matematyki ucieleśnionej doczeka się wersji diachronicznej, uwzględniającej ową dynamikę intuicji. Na razie jednak jej ustalenia w tym zakresie są nieliczne – Lakoff i Núñez piszą o programie arytmetyzacji analizy, ciekawy jest artykuł Aubry 2009, w którym założenia omawianej koncepcji stosowane są do opisu mechanizmów powstania geometrii algebraicznej. Przyczyny *zmienności* intuicji matematycznych są wielorakie. Wykrycie *antynomii* czyni koniecznym zmianę aksjomatów, a więc także intuicyjnego rozumienia terminów teorii. Napotkanie *paradoksu* zmusza do rewizji żywionych dotąd przekonań intuicyjnych. Zmieniać intuicje możemy też celowo, tworząc i rozwijając *programy badawcze*. Nowe *twierdzenia* oczywiście również mogą modyfikować pierwotne intuicje. Poważnie brać trzeba pod uwagę deklaracje zawodowych matematyków, iż kierują się oni w swojej pracy względami *estetycznymi*: teorie, dowody, konstrukcje, pojęcia, itd. mają być nie tylko klarowne i poprawne, ale także piękne. To jeszcze nie wszystkie wyzwania dla koncepcji matematyki ucieleśnionej, która miałaby ową zmienność intuicji jakoś ogarnąć. Wiadomo bowiem, że występować mogą *kolizje* intuicji. Rozwój matematyki (klasycznej) jest, jak się zdaje, dążeniem do unifikacji. Jednak wielokrotnie w dziejach matematyki występowały istotne różnice poglądów, dotyczące rozumienia pojęć (np. spór Newtona z Leibnizem lub Hamiltona z Grassmannem). Istnienie *zdań nierozstrzygalnych* dowodzi, że intuicje matematyczne mogą – co najmniej teoretycznie – ulegać rozwidleniom. Zdarzają się także sytuacje, gdy za każdym z wzajem sprzecznych zdań stoją oddzielne, poważne argumenty matematyczne (do pewnego stopnia jest to przypadek *aksjomatu wyboru* i *aksjomatu determinacji*).

Uwagi końcowe. Powyższe uwagi mogą sprawiać wrażenie zgromadzonych *ad hoc* docinków po adresem koncepcji matematyki ucieleśnionej. Nie było naszym zamiarem ani uprawianie totalnej destruktywnej krytyki tej koncepcji ani proponowanie dla niej jakiejś spójnej, dojrzałej alternatywy. Propozycje Lakoffa i Núñeza traktować należy zgodnie z deklaracjami autorów – jako próbę *zewnętrznego* spojrzenia na matematykę, z perspektywy nauk kognitywnych. Niewątpliwie dla ugruntowania tych propozycji potrzebne byłyby badania empiryczne, próbujące rzucić nieco światła na procesy tworzenia oraz uczenia się matematyki. W obecnej postaci propozycje te wyglądają na wstępną przymiarkę aparatu teoretycznego, który dobrze sprawdził się w jednej dziedzinie (lingwistyce) do całkiem nowej dziedziny. Oprócz uzasadnień empirycznych brakuje im także wsparcia ze strony historii matematyki. Konkluzje filozoficzne nie są (dla nas) przekonujące – w szczególności, uważamy, że nie można całkowicie odcinać się od poglądu, że Wszechświat jest, w pewnych swych aspektach, matematyczny. Dobitnym tego świadectwem jest możliwość stosowania matematyki w jego opisie. Redukowanie procesów tworzenia matematyki do jedynie piętrzenia kolejnych metafor pojęciowych jest nietrafne: wszak podstawowych spoiwem matematyki jest *dowodzenie twierdzeń*. O tym aspekcie matematyki niewiele dotąd powiedziano w koncepcji matematyki ucieleśnionej. Ponadto, pamiętać trzeba, że wprowadzanie nowych pojęć matematycznych nie może zostać ograniczone do budowania metafor pojęciowych. W każdym przypadku wprowadzenia (choćby i na tej drodze) nowego pojęcia trzeba jeszcze spełnić wymogi poprawnego definiowania, zagwarantować, że nie kreuje się sprzeczności, itd. Wydaje się, że duża swoboda, z którą Lakoff i Núñez biorą się za rekonstruowanie kolejnych pojęć matematycznych na drodze budowania metafor pojęciowych bierze się także z tego, że piszą oni przede wszystkim o tym, co zawarte zostało w *podręcznikach* matematyki, a mniej o samym kontekście odkrycia w matematyce.

Odnośniki bibliograficzne

Aubry, M. 2009. Metaphors in Mathematics: Introduction and the Case of Algebraic Geometry (September 26, 2009). Available at SSRN:

http://ssrn.com/abstract=1478871

http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.1478871

Auslander, J. 2001. Embodied mathematics. *American Scientist* **89**, 366—367.

Devlin, K. 2008. How do learn math? *Mathematical Association of America*. Dostępne na:

http://www.maa.org/devlin_12_08.html

Elglaly, Y.N., Quek, F. 2009. Review of ``Where Mathematics comes from: How the Embodied Mind Brings Mathematics Into Being'' by George Lakoff and Rafael E. Núñez. *CHI 2009*, Boston.

Gold, B. 2001. Review of Lakoff, Núñez 2000. Dostępne na:

www.maa.org/reviews/wheremath.html

Goldin, G.A. 2001. Counting on the metaphorical. *Nature* **413**, 18—19.

Henderson, D.W. 2002. Review of: Where Mathematics comes from: How the Embodied Mind Brings Mathematics Into Being. *The Mathematical Intelligencer* **24** (1), 75—76.

Hilbert, D. 1926. Über das Unendliche. *Mathematische Annalen* **95**, 161—190. Polskie tłumaczenie w: Murawski, R. 2003. *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*. Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań, 319—340.

Hohol, M.L. 2011. Matematyczność ucieleśniona. W: B. Brożek, J. Mączka, W.P. Grygiel, M. L. Hohol (red.) *Oblicza racjonalności*. Copernicus Center Press, Kraków, 143—166.

Lakoff, G., Johnson, M. 1980. *Metaphors we live by*. University of Chicago Press, Chicago.

Lakoff, G., Núñez, R.E. 2000. *Where Mathematics Comes From. How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*. Basic Books, New York.

Madden, J.J. 2001. Review of: Where Mathematics comes from: How the Embodied Mind Brings Mathematics Into Being. *Notices of the AMS* **48**, 1182—1188.

Mostowski, A. 1967. O niektórych nowych wynikach meta-matematycznych dotyczących teorii mnogości. *Studia Logica* **20**, 99—116.

Paulos, J.A. 2001. Math at 98.6. *The American Scholar* **70** (1), 151—152.

Pogonowski, J. 2011. Geneza matematyki wedle kognitywistów. *Investigationes Linguisticae* **23**, 106—147. Dostępne na stronach:

http://inveling.amu.edu.pl/

http://www.logic.amu.edu.pl/images/3/3c/Littlejill01.pdf

Pogonowski, J. 2012. Matematyczne metafory kognitywistów. Dostępne na:

http://www.logic.amu.edu.pl/images/0/0e/Mmk2012.pdf

Schiralli, M., Sinclair, N. 2003. A constructive response to `Where Mathematics Comes From'. *Educational Studies in Mathematics* **52**, 79—91.

Siegfried, T. 2001. Math may be not in the stars, but in ourselves. *The Dallas Morning News*, May 3, 2011.

Voorhees, B. 2004. Embodied Mathematics. Comments on Lakoff & Núñez. *Journal of Consciousness Studies* **11**, No. 9, 83—88.