MATEMATYCZNE PODSTAWY KOGNITYWISTYKI

DOROTA LESZCZYŃSKA-JASION, JERZY POGONOWSKI

Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM

INDUKCJA MATEMATYCZNA: PRZYKŁADY

1 Zasada indukcji matematycznej

Dowody, korzystające z zasady indukcji matematycznej w arytmetyce zwykle opisywane są w szkole w sposób następujący:

1. *Krok początkowy*. Pokazujemy, że teza twierdzenia zachodzi dla najmniejszej liczby z rozważanego zakresu. Najczęściej jest to liczba 0 lub liczba 1. Zdarzają się jednak dowody indukcyjne, w których krok początkowy dotyczy innej liczby naturalnej.

2. *Krok następnikowy*. Zakładamy, że teza twierdzenia zachodzi dla liczby k z rozważanego zakresu (czynimy *założenie indukcyjne*). Pokazujemy, że przy tym założeniu teza twierdzenia zachodzi dla liczby $k+1$.

3. *Konkluzja*. Jeśli powodzeniem zakończyły się oba powyższe kroki, to jesteśmy uprawnieni do przyjęcia, że rozważane twierdzenie zachodzi dla *wszystkich* liczb naturalnych n z rozważanego zakresu.

Poprawność takiego rozumowania (na gruncie arytmetyki) gwarantuje przyjmowany *schemat aksjomatów indukcji*, który ma postać następującą:

$$(\varphi(0) \wedge (\forall x(\varphi(x) \rightarrow \varphi(x+1)))) \rightarrow \forall x \varphi(x),$$

gdzie $\varphi(x)$ jest formułą języka teorii o jednej zmiennej wolnej x. Tak więc, $\varphi(x)$ wyraża pewną własność rozważanych obiektów (na gruncie arytmetyki: liczb naturalnych). Korzystanie z powyższego schematu (czyli przeprowadzanie dowodów przez indukcję matematyczną) ma zatem postać następującą:

1. Mamy udowodnić: $\forall x \varphi(x)$, gdzie $\varphi(x)$ jest podaną wyraźnie własnością.

2. Sprawdzamy, czy zachodzi $\varphi(0)$. To *krok początkowy*.

3. Sprawdzamy, czy zachodzi implikacja $\forall x(\varphi(x) \rightarrow \varphi(x+1))$. W tym celu zakładamy (czynimy *założenie indukcyjne*), że zachodzi $\varphi(x)$ i próbujemy z tego założenia wyprowadzić $\varphi(x+1)$. To *krok następnikowy*.

4. Jeśli dwa powyższe kroki zakończyły się powodzeniem, to możemy uznać (na podstawie przyjmowanego schematu aksjomatów indukcji), że zachodzi $\forall x \varphi(x)$.

Pomijamy tu pewne subtelności logiczne, które poznają słuchacze w dalszym toku studiów. W dalszym ciągu tej notatki podamy przykłady dowodów indukcyjnych w arytmetyce, w stylizacji, do której słuchacze zostali przyzwyczajeni przez szkołę.

2 Przykłady wcześniej omówione na wykładzie

2.1 Suma kolejnych liczb naturalnych

Mamy udowodnić równość: $1+2+3+\ldots+n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$.

Najmniejszą liczbą z rozważanego zakresu jest liczba 1.

Krok początkowy. Dla $k=1$ powyższa równość sprowadza się do: $1 = \frac{1\cdot(1+1)}{2}$, co jest oczywiście prawdą.

Krok następnikowy. Czynimy założenie indukcyjne, że omawiany wzór zachodzi dla liczby k, czyli zakładamy, że:

$$1+2+3+\ldots+k = \frac{k\cdot(k+1)}{2}.$$

Musimy wykazać, że badany wzór zachodzi także dla $k+1$, czyli musimy udowodnić, że:

$$(1+2+3+\ldots+k)+k+1 = \frac{(k+1)\cdot((k+1)+1)}{2}.$$

Na mocy założenia indukcyjnego, lewa strona tej równości jest postaci:

$$\frac{k\cdot(k+1)}{2}+k+1.$$

Obliczamy tę sumę:

$$\frac{k\cdot(k+1)}{2}+k+1 = \frac{(k+1)\cdot(k+2)}{2}.$$

Pokazaliśmy zatem, że że jeśli rozważany wzór zachodzi dla liczby k, to zachodzi także dla liczby $k+1$.

Konkluzja. Na mocy zasady indukcji matematycznej, teza twierdzenia zachodzi dla wszystkich dodatnich liczb naturalnych n.

2.2 Suma kolejnych potęg liczby 2

Mamy udowodnić równość: $2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 2$.

Najmniejszą liczbą z rozważanego zakresu jest liczba 1.

Krok początkowy. Dla $k = 1$ powyższa równość sprowadza się do równości: $2^1 = 2^{1+1} - 2$, co jest oczywiście prawdą.

Krok następnikowy. Czynimy założenie indukcyjne, że omawiany wzór zachodzi dla liczby k, czyli zakładamy, że:

$$2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^k = 2^{k+1} - 2.$$

Musimy wykazać, że:

$$(2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^k) + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 2.$$

Na mocy założenia indukcyjnego, lewa strona tej równości jest postaci:

$$2^{k+1} - 2 + 2^{k+1}.$$

Ta liczba jest oczywiście równa $2 \cdot 2^{k+1} - 2$, czyli równa $2^{k+2} - 2$. Pokazaliśmy zatem, że jeśli rozważany wzór zachodzi dla liczby k, to zachodzi także dla liczby $k + 1$.

Konkluzja. Na mocy zasady indukcji matematycznej, teza twierdzenia zachodzi dla wszystkich dodatnich liczb naturalnych n.

2.3 Inne przykłady omówione na wykładzie

Wykorzystywaliśmy indukcję matematyczną także w dowodach: Lematu Königa (wykład *Struktury porządkowe*), twierdzenia głoszącego, że moc zbioru potęgowego dowolnego skończonego zbioru n-elementowego jest równa 2^n (wykład *Kombinatoryka, ciągi liczbowe, skończone przestrzenie probabilistyczne*), nierówności Bernoulliego (wykład *Struktury topologiczne*). Zapraszamy słuchaczy do zajrzenia do tekstu wspomnianych wykładów.

3 Dalsze przykłady arytmetyczne

Rozważymy teraz kilka dalszych przykładów. Niektóre zostaną dokładnie omówione, dowody pozostałych pozostawimy dociekliwości słuchaczy. Przyjemność obcowania z matematyką polega przecież na *samodzielnych* próbach rozwiązywania problemów. Daje to satysfakcję (poznawczą, intelektualną) o wiele przewyższającą bardziej przyziemne poczynania, jak np. obżarstwo, opilstwo, a także inne jeszcze wybryki, których wyliczenie pominiemy. Owa satysfakcja jest też ważnym czynnikiem poprawiającym własną samoocenę, co przecie każdemu jest potrzebne.

3.1 Suma kolejnych liczb nieparzystych

Mamy udowodnić równość: $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2 \cdot n - 1) = n^2$.

Najmniejszą liczbą z rozważanego zakresu jest liczba 1.

Krok początkowy. Ponieważ $1 = 1^2$, więc badana równość zachodzi dla najmniejszej liczby z rozważanego zakresu.

Krok następnikowy. Czynimy założenie indukcyjne, że omawiany wzór zachodzi dla liczby $k \geqslant 1$, czyli zakładamy, że: $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2 \cdot k - 1) = k^2$.

Musimy wykazać, że omawiany wzór zachodzi dla liczby $k+1$, czyli wykazać, że: $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2 \cdot k - 1) + (2 \cdot k + 1) = (k + 1)^2$. Uwaga: pamiętajmy, że sumujemy tylko kolejne liczby nieparzyste!

Na mocy założenia indukcyjnego, $1+3+5+7+\ldots+(2\cdot k-1)+(2\cdot k+1) = k^2 + 2 \cdot k + 1$. Oczywiście $k^2 + 2 \cdot k + 1 = (k + 1)^2$. Pokazaliśmy zatem, że jeśli $1+3+5+7+\ldots+(2\cdot k-1) = k^2$, to $1+3+5+7+\ldots+(2\cdot k-1)+(2\cdot k+1) = (k + 1)^2$.

Konkluzja. Na mocy zasady indukcji matematycznej, teza twierdzenia zachodzi dla wszystkich dodatnich liczb naturalnych n.

3.2 Suma liczb o postaci $3 \cdot i - 1$

Mamy udowodnić równość: $\sum\limits_{i=1}^{n}(3 \cdot i - 1) = (\sum\limits_{i=1}^{n} i) + n^2$.

Najmniejszą liczbą z rozważanego zakresu jest liczba 1.

Krok początkowy. Ponieważ $3 \cdot 1 - 1 = 1 + 1^2$, więc badana równość zachodzi dla najmniejszej liczby z rozważanego zakresu.

Krok następnikowy. Czynimy założenie indukcyjne, że omawiany wzór zachodzi dla liczby $k \geqslant 1$, czyli zakładamy, że: $\sum\limits_{i=1}^{k}(3 \cdot i - 1) = (\sum\limits_{i=1}^{k} i) + k^2$.

Musimy wykazać, że omawiany wzór zachodzi dla liczby $k+1$, czyli wykazać, że: $\sum\limits_{i=1}^{k+1}(3 \cdot i - 1) = (\sum\limits_{i=1}^{k+1} i) + (k + 1)^2$.

Ponieważ $\sum\limits_{i=1}^{k+1}(3\cdot i-1) = \sum\limits_{i=1}^{k}(3\cdot i-1)+3\cdot(k+1)-1$, więc na mocy założenia indukcyjnego $\sum\limits_{i=1}^{k}(3 \cdot i - 1) + 3 \cdot (k + 1) - 1 = (\sum\limits_{i=1}^{k} i) + k^2 + 3 \cdot (k + 1) - 1$.

Obliczamy wartość wyrażenia $(\sum\limits_{i=1}^{k} i) + k^2 + 3 \cdot (k + 1) - 1$ (w nawiasach kwadratowych podajemy wykonywane na każdym kroku działania, dające wynik w następnym kroku):

1. $(\sum_{i=1}^{k} i) + k^2 + 3 \cdot (k+1) - 1 =$ [pomnożymy: $3 \cdot (k+1) = 3 \cdot k + 3$]

2. $(\sum_{i=1}^{k} i) + k^2 + 3 \cdot k + 3 - 1 =$ [odejmiemy: $3 \cdot k + 3 - 1 = 3 \cdot k + 2$]

3. $(\sum_{i=1}^{k} i) + k^2 + 3 \cdot k + 2 =$ [rozdzielimy sumę $k^2 + 3 \cdot k + 2$ na $(k+1) + (k^2 + 2 \cdot k + 1)$]

4. $(\sum_{i=1}^{k} i) + (k+1) + (k^2 + 2 \cdot k + 1) =$ [dołączymy $k+1$ do sumy $\sum_{i=1}^{k} i$]

5. $(\sum_{i=1}^{k+1} i) + (k^2 + 2 \cdot k + 1) =$ [skorzystamy ze wzoru: $k^2 + 2 \cdot k + 1 = (k+1)^2$]

6. $(\sum_{i=1}^{k+1} i) + (k+1)^2$. [gotowe]

Pokazaliśmy zatem, że jeśli $\sum_{i=1}^{k}(3 \cdot i - 1) = (\sum_{i=1}^{k} i) + k^2$, to $\sum_{i=1}^{k+1}(3 \cdot i - 1) = (\sum_{i=1}^{k+1} i) + (k+1)^2$.

Konkluzja. Na mocy zasady indukcji matematycznej, teza twierdzenia zachodzi dla wszystkich dodatnich liczb naturalnych n.

3.3 Suma wyrazów ciągu arytmetycznego

Niech a oraz d będą ustalonymi liczbami rzeczywistymi.

Mamy udowodnić równość: $a + (a+d) + (a+2 \cdot d) + \ldots + (a + (n-1) \cdot d) = \frac{n}{2} \cdot (2 \cdot a + (n-1) \cdot d)$.

Najmniejszą liczbą z rozważanego zakresu jest liczba 1.

Krok początkowy. Ponieważ $\frac{1}{2} \cdot (2 \cdot a + (1-1) \cdot d) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot a = a$ (czyli suma złożona z jednego wyrazu), więc badana równość zachodzi dla najmniejszej liczby z rozważanego zakresu.

Krok następnikowy. Czynimy założenie indukcyjne, że omawiany wzór zachodzi dla liczby $k \geqslant 1$, czyli zakładamy, że: $a + (a+d) + (a + 2 \cdot d) + \ldots + (a + (k-1) \cdot d) = \frac{k}{2} \cdot (2 \cdot a + (k-1) \cdot d)$.

Musimy wykazać, że omawiany wzór zachodzi dla liczby $k+1$, czyli wykazać, że: $a + (a+d) + (a + 2 \cdot d) + \ldots + (a + k \cdot d) = \frac{k+1}{2} \cdot (2 \cdot a + k \cdot d)$.

Na mocy założenia indukcyjnego $a + (a+d) + (a+2\cdot d) + \ldots + (a+(k-1)\cdot d) + (a+k\cdot d) = \frac{k}{2}\cdot(2\cdot a+(k-1)\cdot d) + (a+k\cdot d)$. Obliczamy teraz $\frac{k}{2}\cdot(2\cdot a+(k-1)\cdot d) + (a+k\cdot d)$:

1. $\frac{k}{2}\cdot(2\cdot a+(k-1)\cdot d) + (a+k\cdot d) =$ [pomnożymy $(2\cdot a+(k-1)\cdot d)$ przez k oraz zapiszemy $(a+k\cdot d)$ jako $\frac{1}{2}\cdot(2\cdot a+2\cdot k\cdot d)$]
2. $\frac{1}{2}\cdot(k\cdot 2\cdot a+k^2\cdot d-k\cdot d)+\frac{1}{2}\cdot(2\cdot a+2\cdot k\cdot d) =$ [wyłączymy $\frac{1}{2}$ przed nawias]
3. $\frac{1}{2}\cdot(k\cdot 2\cdot a+k^2\cdot d-k\cdot d+2\cdot a+2\cdot k\cdot d) =$ [pogrupujemy składniki]
4. $\frac{1}{2}\cdot((k\cdot 2\cdot a+2\cdot a)+(k^2\cdot d-k\cdot d+2\cdot k\cdot d)) =$ [mamy: $k\cdot 2\cdot a+2\cdot a=(k+1)\cdot 2\cdot a$ oraz $k^2\cdot d-k\cdot d+2\cdot k\cdot d=k^2\cdot d+k\cdot d$]
5. $\frac{1}{2}\cdot((k+1)\cdot 2\cdot a+k^2\cdot d+k\cdot d) =$ [mamy: $k^2\cdot d+k\cdot d=(k+1)\cdot k\cdot d$]
6. $\frac{1}{2}\cdot((k+1)\cdot 2\cdot a+(k+1)\cdot k\cdot d) =$ [wyłączymy $k+1$ przed nawias]
7. $\frac{k+1}{2}\cdot(2\cdot a+k\cdot d)$. [gotowe]

Pokazaliśmy więc, że jeśli $a+(a+d)+(a+2\cdot d)+\ldots+(a+(k-1)\cdot d) = \frac{k}{2}\cdot(2\cdot a+(k-1)\cdot d)$, to $a+(a+d)+(a+2\cdot d)+\ldots+(a+k\cdot d) = \frac{k+1}{2}\cdot(2\cdot a+k\cdot d)$.

Konkluzja. Na mocy zasady indukcji matematycznej, teza twierdzenia zachodzi dla wszystkich dodatnich liczb naturalnych n.

3.4 Nierówność $2\cdot n < 2^n$ dla $n \geqslant 3$

Mamy udowodnić nierówność: $2\cdot n < 2^n$ dla $n \geqslant 3$.

Najmniejszą liczbą z rozważanego zakresu jest liczba 3.

Krok początkowy. Ponieważ $2\cdot 3 < 2^3$, więc badana nierówność zachodzi dla najmniejszej liczby z rozważanego zakresu.

Krok następnikowy. Czynimy założenie indukcyjne, że omawiany wzór zachodzi dla liczby $k \geqslant 3$, czyli zakładamy, że: $2\cdot k < 2^k$.

Musimy wykazać, że omawiany wzór zachodzi dla liczby $k+1$, czyli wykazać, że: $2\cdot(k+1) < 2^{k+1}$.

Mamy: $2 \cdot (k+1) = 2 \cdot k + 2$. Na mocy założenia indukcyjnego $2 \cdot k < 2^k$, a zatem $2 \cdot k + 2 < 2^k + 2$. Ponieważ $k \geqslant 3$, więc $2 \cdot k + 2 < 2^k + 2^k$. Ale $2^k + 2^k = 2 \cdot (2^k) = 2^{k+1}$. Tak więc, pokazaliśmy, że jeśli $2 \cdot k < 2^k$, to $2 \cdot (k+1) < 2^{k+1}$.

Konkluzja. Na mocy zasady indukcji matematycznej, teza twierdzenia zachodzi dla wszystkich liczb naturalnych $n \geqslant 3$.

3.5 Nierówność $2^n < n!$ dla $n \geqslant 4$

Mamy udowodnić nierówność: $2^n < n!$ dla $n \geqslant 4$.

Najmniejszą liczbą z rozważanego zakresu jest liczba 4.

Krok początkowy. Ponieważ $2^4 = 16$ oraz $4! = 24$, więc badana nierówność zachodzi dla najmniejszej liczby z rozważanego zakresu.

Krok następnikowy. Czynimy założenie indukcyjne, że omawiany wzór zachodzi dla liczby $k \geqslant 4$, czyli zakładamy, że: $2^k < k!$.

Musimy wykazać, że omawiany wzór zachodzi dla liczby $k+1$, czyli wykazać, że: $2^{k+1} < (k+1)!$.

Mamy: $2^{k+1} = 2 \cdot (2^k)$. Na mocy założenia indukcyjnego $2^k < k!$, a więc $2^{k+1} < 2 \cdot (k!)$. Ponieważ $k \geqslant 4$, więc $2 \cdot (k!) < (k+1) \cdot (k!) = (k+1)!$. Mamy zatem: $2^{k+1} < (k+1)!$. Tak więc, pokazaliśmy, że jeśli $2^k < k!$, to $2^{k+1} < (k+1)!$.

Konkluzja. Na mocy zasady indukcji matematycznej, teza twierdzenia zachodzi dla wszystkich liczb naturalnych $n \geqslant 4$.

3.6 Przykłady do samodzielnego rozwiązania

Korzystając z zasady indukcji matematycznej udowodnić, że:

1. $2 + 4 + 6 + \ldots + 2 \cdot n = n \cdot (n+1)$ dla $n \geqslant 1$.
2. $3 + 11 + 19 + \ldots + (8 \cdot n - 5) = 4 \cdot n^2 - n$ dla $n \geqslant 1$.
3. $1 + r + r^2 + \ldots + r^n = \frac{r^{n+1}-1}{r-1}$ dla $n \geqslant 1$ oraz dowolnej liczby rzeczywistej $r \neq 1$.
4. $1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \ldots + n \cdot 2^n = 2 + (n-1) \cdot 2^{n+1}$ dla $n \geqslant 1$.
5. $4 \cdot n^2 > n + 11$ dla $n \geqslant 2$.
6. $n^2 < 2^n$ dla $n \geqslant 5$.

4 Uwagi końcowe

Ograniczyliśmy się w tej notatce do prostych przykładów arytmetycznych zastosowania zasady indukcji matematycznej. Powyższe oraz liczne dalsze przykłady omówione są w znakomitej książce: David S. Gunderson *Handbook of mathematical induction. Theory and applications*. CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton, London, New York, 2011. Inne jeszcze przykłady znajdą słuchacze w podręcznikach szkolnych, uniwersyteckich (w tym tych podanych jako literatura zalecana do tego wykładu) oraz na portalach i forach internetowych poświęconych dydaktyce matematyki. Wyszukiwarka *Google* podaje w mniej niż pół sekundy kilkadziesiąt tysięcy odpowiedzi na hasło *indukcja matematyczna zadania*.

Zgodnie z ustaleniami poczynionymi wspólnie ze słuchaczami na wykładzie w dniu 22 stycznia 2020 roku, na zaliczeniu wykładu w dniu 29 stycznia 2020 roku należy spodziewać się zadania wykorzystującego dowód przez indukcję matematyczną (podobnego do wyżej omówionych), do wyboru z zadaniem polegającym na podaniu dowodu któregoś z twierdzeń podanych w punkcie 3 tekstu *Zagadnienia na zaliczenie wykładu* (plik dostępny na stronie wykładu).