ZAGADKI

KILKA MATEMATYCZNYCH PROBLEMÓW OTWARTYCH

KOGNITYWISTYKA UAM (III, IV, V)

JERZY POGONOWSKI

Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
www.kognitywistyka.amu.edu.pl
www.logic.amu.edu.pl/index.php/Dydaktyka
pogon@amu.edu.pl

Zagadki matematyczne przeznaczone dla uczniów wcale nie muszą ograniczać się do wykorzystywania jedynie wiadomości szkolnych. Można zachęcać uczniów do samodzielnego (lub pod opieką nauczyciela) studiowania zagadnień matematycznych, wykraczających poza podstawę programową. W szczególności, można informować ich o nierozwiązanych problemach matematycznych. Ograniczmy się do kilku, które można sformułować w sposób zrozumiały dla gimnazjalisty. Wspomnimy także o wielkich otwartych problemach matematycznych, zachęcając czytelników do samodzielnych studiów.

1 Hipoteza Goldbacha

Każda liczba parzysta większa od 2 jest sumą dwóch liczb pierwszych. Udowodniono, że hipoteza Goldbacha zachodzi dla wszystkich liczb parzystych mniejszych od $4 \cdot 10^{17}$.

2 Problem Collatza-Ulama

Rozważmy całkiem dowolną liczbę naturalną $c_0 > 0$. Zdefiniujmy: $c_1 = \frac{c_0}{2}$, jeśli c_0 jest parzysta, a $c_1 = 3c_0+1$, jeśli c_0 jest nieparzysta. Ogólnie, niech: $c_{n+1} = \frac{c_n}{2}$, jeśli c_n jest parzysta, a $c_{n+1} = 3c_n + 1$, jeśli c_n jest nieparzysta. Hipoteza Collatza (rozważana także przez Ulama) głosi, że niezależnie od tego, jak początkowo wybierzemy liczbę c_0, to dla pewnego n otrzymamy $c_n = 1$. W konsekwencji, wszystkie dalsze wyrazy ciągu będą miały postać: 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1,... Udowodniono, że hipoteza Collatza zachodzi dla wszystkich liczb mniejszych od $20 \cdot 2^{58}$.

3 Stała Eulera-Mascheroniego

Zdefiniujmy:

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n).$$

Nie wiadomo, czy γ jest liczbą wymierną, czy niewymierną. Gdyby była wymierna, to przedstawiający ją (nieskracalny) ułamek musiałby mieć mianownik zapisany w notacji dziesiętnej przez ponad 10^{242080} cyfr.

4 Cegiełka Eulera

Przez *cegiełkę Eulera* rozumiemy prostopadłościan, w którym długości wszystkich krawędzi oraz wszystkich przekątnych ścian wyrażają się liczbami naturalnymi. Najmniejsza cegiełka Eulera ma krawędzie o długościach krawędzi 44, 117, 240 oraz długościach przekątnych ścian 125, 244, 267. *Doskonała cegiełka Eulera*, to taka cegiełka Eulera, w której również długość wewnętrznej przekątnej prostopadłościanu jest liczbą naturalną. Dotychczas nie wiadomo, czy istnieją doskonałe cegiełki Eulera.

5 Liczby doskonałe

Mówimy, że liczba naturalna jest *doskonała*, gdy jest ona sumą wszystkich jej dzielników od niej mniejszych. Najmniejszą liczbą doskonałą jest $6 = 1 + 2 + 3$, następną $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$. Już Euklides udowodnił, że jeśli $2^p - 1$ jest liczbą pierwszą, to $2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$ jest (oczywiście parzystą) liczbą doskonałą. Z kolei Leonhard Euler pokazał w XVIII wieku, że *każda* parzysta liczba doskonała jest postaci $2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$. Nie wiadomo obecnie, czy istnieją *nieparzyste* liczby doskonałe – gdyby taka liczba istniała, to musiałaby być większa od 10^{1500}. Ze wspomnianego wyniku Eulera wynika, że zapis każdej parzystej liczby doskonałej w notacji dwójkowej to układ jedynek, po którym następuje układ zer, np.:

$6_{10} = 110_2$
$28_{10} = 11100_2$
$496_{10} = 111110000_2$
$8128_{10} = 1111111000000_2$
$33550336_{10} = 1111111111111000000000000_2$.

6 Problemy Milenijne

W roku 2000 ustalono siedem tzw. *Problemów Milenijnych* – ważnych nierozwiązanych problemów matematycznych. Jak dotąd, rozwiązano jeden z nich (hipoteza Poincarégo). Za rozwiązanie każdego z tych problemów Clay Mathematics Institute oferuje nagrodę miliona dolarów. Nie twierdzimy rzecz jasna, że uczestnictwo w tym wykładzie przybliży cię do zgarnięcia owej nagrody. Postaramy się natomiast, o ile starczy czasu, opowiedzieć o Problemach Milenijnych w taki sposób, aby słuchacze mogli docenić ich ważkość. Dla porządku, podajmy listę tych problemów (w nawiasach podano datę postawienia problemu):

1. *Problem* $P = NP$ (1971).
2. *Hipoteza Poincarégo* (1904).
3. *Hipoteza Riemanna* (1859).
4. *Hipoteza Hodge'a* (1950).
5. *Hipoteza Bircha i Swinnertona-Dyera* (1960).
6. *Teoria Yanga-Millsa* (1954).
7. *Równania Naviera-Stokesa* (1822).

Rozwiązania zagadek podane zostaną na wykładzie. [1]

Jerzy Pogonowski
Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
pogon@amu.edu.pl

[1] Oczywiście żartuję.