Matematyczne Podstawy Kognitywistyki

Powtórka: 3.II.2021

Kognitywistyka UAM, 2020–2021

Imię i nazwisko: . . . . Mróweczka Haneczka

1. [3 punkty] Wyznacz elementy minimalne, maksymalne, największy i najmniejszy w rodzinie wszystkich niepustych podzbiorów zbioru $\{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$ uporządkowanym częściowo przez relację inkluzji zwykłej.

2. [4 punkty] (a) Co to znaczy, że relacja R na zbiorze X jest przewzwrotna? (b) Podaj przykład relacji, która ma tę własność i relacji, która jej nie ma. (c) Rozstrzygnij czy relacja $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ zdefiniowana warunkiem xRy wtw $x = \llcorner y \lrcorner$ ma tę własność (tu $\llcorner y \lrcorner$ oznacza wartość funkcji podłogi dla argumentu y, czyli największą liczbę całkowitą n taką, że $n \leqslant y$).

3. [4 punkty] Pokaż, podając kontrprzykład, że nie jest prawem rachunku zbiorów: $C - (A \cup B) = (C - A) \cup (C - B)$.

4. [4 punkty] Wybierz dokładnie jedną z podanych propozycji i wyznacz pochodną funkcji:

$$f(x) = \frac{1-\sin(x)}{\cos(x)} \quad f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \quad f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$$

5. [5 punktów] Wybierz dokładnie jedną z podanych propozycji i przeprowadź dowód:

1. Udowodnij przez indukcję matematyczną, że: $(1 + \frac{1}{100})^n \geqslant 1 + \frac{n}{100}$, dla wszystkich $n \geqslant 1$.

2. Udowodnij przez indukcję matematyczną, że: $1 + r + r^2 + r^3 + \ldots + r^n = \frac{r^{n+1}-1}{r-1}$ dla wszystkich $n \geqslant 0$ oraz liczb rzeczywistych $r \neq 1$.

3. Udowodnij, że zbiór wszystkich liczb naturalnych parzystych nie jest równoliczny z rodziną wszystkich swoich podzbiorów.

Skala ocen:

Liczba punktów	Ocena
< 11	2
11–12	3
13–14	3+
15–16	4
17–18	4+
19–20	5

JERZY POGONOWSKI
Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
pogon@amu.edu.pl

ROZWIĄZANIA

MRÓWECZKA HANECZKA

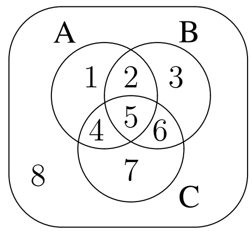
1. Rodzina wszystkich niepustych podzbiorów zbioru $\{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$ ma $2^4 - 1 = 15$ elementów. Wszystkie te podzbiory zawierają się w całym zbiorze $\{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$, a więc ten zbiór jest elementem największym względem inkluzji $\subseteq$. W konsekwencji, jest też jedynym elementem maksymalnym względem tego częściowego porządku. Element najmniejszy względem inkluzji nie istnieje, ponieważ wśród niepustych podzbiorów zbioru $\{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$ nie ma zbioru, który zawierałby się we wszystkich pozostałych elementach tej rodziny. Istnieją jednak elementy minimalne względem inkluzji i są to wszystkie jednoelementowe podzbiory zbioru $\{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$, a więc zbiory: $\{\clubsuit\}$, $\{\diamondsuit\}$, $\{\heartsuit\}$, $\{\spadesuit\}$.

2. (a) Relacja $R \subseteq X \times X$ jest przeciwzwrotna, gdy dla żadnego $x \in X$ nie zachodzi xRx, czyli gdy żaden element zbioru X nie pozostaje w relacji R ze sobą samym.

(b) Relacja mniejszości $<$ określona dla liczb rzeczywistych jest przeciwzwrotna, gdyż żadna liczba rzeczywista nie jest mniejsza od siebie samej, czyli dla żadnej liczby x nie zachodzi $x < x$. Relacja $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ zdefiniowana warunkiem: xRy wtw $x = y^2$ nie jest przeciwzwrotna, gdyż np. $0R0$ i $1R1$.

(c) Relacja xRy wtw $x = \llcorner y \lrcorner$ nie jest przeciwzwrotna, ponieważ dla każdej liczby całkowitej n zachodzi: $n = \llcorner n \lrcorner$, czyli nieprawda, że nie zachodzi nRn gdy n jest liczbą całkowitą.

3. Można narysować diagram Venna dla trzech zbiorów, umieszczając jakieś elementy w każdej składowej i policzyć, czemu równa jest lewa i prawa strona rozważanej równości. Jeśli wynik wykonanych operacji po lewej stronie nie będzie tożsamy z wynikiem operacji wykonanych po prawej stronie, to podane zbiory stanowią kontrprzykład, że rozważana równość nie jest prawem rachunku zbiorów.



W oznaczeniach tego diagramu mamy zatem:
$A = \{1, 2, 4, 5\}$, $B = \{2, 3, 5, 6\}$, $C = \{4, 5, 6, 7\}$
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$C - (A \cup B) = \{7\}$
$C - A = \{6, 7\}$
$C - B = \{4, 7\}$
$(C - A) \cup (C - B) = \{4, 6, 7\}$.
Widzimy zatem, że:

$$\{7\} = C - (A \cup B) \neq (C - A) \cup (C - B) = \{4, 6, 7\}.$$

Rozważana równość nie jest więc prawem rachunku zbiorów.

4.1. Pochodną funkcji $f(x) = \frac{1-\sin(x)}{\cos(x)}$ obliczamy, korzystając ze wzoru na pochodną ilorazu funkcji:
$f'(x) = (\frac{1-\sin(x)}{\cos(x)})' =$
$\frac{(1-\sin(x))'\cdot\cos(x)-(1-\sin(x))\cdot(\cos(x))'}{\cos^2(x)} =$
$\frac{(-\cos(x))\cdot\cos(x)-(1-\sin(x))\cdot(-\sin(x))}{\cos^2(x)} =$
$\frac{-\cos^2(x)+(\sin(x)-\sin^2(x))}{\cos^2(x)} =$
$\frac{\sin(x)-(\sin^2(x)+\cos^2(x))}{\cos^2(x)} =$
$\frac{\sin(x)-1}{\cos^2(x)}$

4.2. Pochodną funkcji $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$ obliczamy, stosując wzór na pochodną ilorazu funkcji. Mamy:
$f'(x) = (\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1})' = \frac{(\sqrt{x}-1)'\cdot(\sqrt{x}+1)-(\sqrt{x}-1)\cdot(\sqrt{x}+1)'}{(\sqrt{x}+1)^2} = \frac{\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}\cdot(\sqrt{x}+1)-(\sqrt{x}-1)\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+1)^2} =$
$= \frac{\sqrt{x}+1-\sqrt{x}+1}{2\cdot\sqrt{x}\cdot(\sqrt{x}+1)^2} = \frac{2}{2\cdot\sqrt{x}\cdot(\sqrt{x}+1)^2} = \frac{1}{\sqrt{x}\cdot(\sqrt{x}+1)^2}$

4.3. Obliczając pochodną funkcji $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ korzystamy ze wzoru na pochodną ilorazu funkcji oraz wzoru na pochodną funkcji złożonej:

$$(\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}})' = \frac{(e^{\sqrt{x}})' \cdot \sqrt{x} - e^{\sqrt{x}} \cdot (\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2} = \frac{e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x} - e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{e^{\sqrt{x}} \cdot (\sqrt{x}-1)}{2 \cdot x \cdot \sqrt{x}}.$$

5.1. To szczególny przypadek nierówności Bernoulliego, której dowód przeprowadzono na wykładzie. Dowód tego, że $(1 + \frac{1}{100})^n \geqslant 1 + \frac{n}{100}$, dla wszystkich $n \geqslant 1$ przebiega następująco.

Krok początkowy. Najmniejszą liczbą z rozważanego zakresu jest 1. Ponieważ $(1 + \frac{1}{100})^1 \geqslant 1 + \frac{1}{100}$, więc badana nierówność zachodzi dla liczby 1.

Krok następnikowy. Czynimy założenie indukcyjne dla $k \geqslant 1$: $(1 + \frac{1}{100})^k \geqslant 1+\frac{k}{100}$. Mamy udowodnić, że przy tym założeniu zachodzi: $(1+\frac{1}{100})^{k+1} \geqslant 1+\frac{k+1}{100}$.

Ponieważ $(1 + \frac{1}{100})^{k+1} = (1 + \frac{1}{100})^k \cdot (1 + \frac{1}{100})$, więc na mocy założenia indukcyjnego: $(1+\frac{1}{100})^k \cdot (1+\frac{1}{100}) \geqslant (1+\frac{k}{100}) \cdot (1+\frac{1}{100})$. Obliczamy: $(1+\frac{k}{100}) \cdot (1 + \frac{1}{100}) = 1 + \frac{1}{100} + \frac{k}{100} + \frac{k}{10000}$. Ponieważ $\frac{k}{10000} > 0$, więc $1 + \frac{1}{100} + \frac{k}{100} + \frac{k}{10000} > 1 + \frac{1}{100} + \frac{k}{100}$. Ale $1 + \frac{1}{100} + \frac{k}{100} = 1 + \frac{k+1}{100}$. Pokazaliśmy zatem, że jeśli $(1 + \frac{1}{100})^k \geqslant 1 + \frac{k}{100}$, to $(1 + \frac{1}{100})^{k+1} \geqslant 1 + \frac{k+1}{100}$.

Konkluzja. Na mocy zasady indukcji matematycznej rozważana nierówność zachodzi dla wszystkich liczb naturalnych $n \geqslant 1$.

5.2. Dowód indukcyjny tego, że: $1+r+r^2+r^3+\ldots+r^n = \frac{r^{n+1}-1}{r-1}$ dla wszystkich $n \geqslant 0$ oraz liczb rzeczywistych $r \neq 1$ przebiega następująco.

Krok początkowy. Najmniejszą liczbą z rozważanego zakresu jest 0. Dla $k = 0$ lewa strona rozważanej równości ma wartość 1, a prawa jest równa: $\frac{r^{0+1}-1}{r-1} = \frac{r-1}{r-1} = 1$, a zatem równość zachodzi dla $k = 0$.

Krok następnikowy. Czynimy założenie indukcyjne dla $k \geqslant 1$: $1 + r + r^2 + r^3 + \ldots + r^k = \frac{r^{k+1}-1}{r-1}$. Mamy udowodnić, że przy tym założeniu zachodzi: $1 + r + r^2 + r^3 + \ldots + r^k + r^{k+1} = \frac{r^{k+2}-1}{r-1}$. Rozważmy lewą stronę tej równości. Na mocy założenia indukcyjnego: $(1+r+r^2+r^3+\ldots+r^k)+r^{k+1} = \frac{r^{k+1}-1}{r-1}+r^{k+1}$. Obliczamy: $\frac{r^{k+1}-1}{r-1} + r^{k+1} = \frac{r^{k+1}-1+r^{k+1} \cdot (r-1)}{r-1} = \frac{r^{k+1}-1+r \cdot r^{k+1}-r^{k+1}}{r-1} = \frac{r \cdot r^{k+1}-1}{r-1} = \frac{r^{k+2}}{r-1}$. Pokazaliśmy zatem, że jeśli $1 + r + r^2 + r^3 + \ldots + r^k = \frac{r^{k+1}-1}{r-1}$, to $1 + r + r^2 + r^3 + \ldots + r^k + r^{k+1} = \frac{r^{k+2}-1}{r-1}$, czyli krok następnikowy został udowodniony.

Konkluzja. Na mocy zasady indukcji matematycznej rozważana nierówność zachodzi dla wszystkich liczb naturalnych $n \geqslant 0$.

5.3. Przeprowadzimy dowód nie wprost. Niech X będzie zbiorem wszystkich liczb parzystych. Przypuśćmy, że X jest równoliczny z rodziną wszystkich swoich podzbiorów $\wp(X)$. Oznacza to, iż istnieje bijekcja f ze zbioru X na zbiór $\wp(X)$. Rozważmy następujący podzbiór D zbioru X:

$$D = \{x \in X \ : \ x \notin f(x)\}.$$

Wtedy dla pewnego $d \in X$ musiałoby być: $f(d) = D$. Zapytajmy teraz: czy $d \in D$?

1. Jeśli $d \in D$, to $d \in \{x \in X \ : \ x \notin f(x)\}$, czyli $d \notin D$, ponieważ $f(d) = D$.

2. Jeśli $d \notin D$, to $d \notin \{x \in X \ : \ x \notin f(x)\}$, czyli $d \in \{x \in X \ :$ nieprawda, że $x \notin f(x)\} = \{x \in X \ : \ x \in f(x)\}$, a zatem $d \in D$, ponieważ $f(d) = D$.

Otrzymujemy zatem, iż: $d \in D$ wtedy i tylko wtedy, gdy $d \notin D$, a to jest *sprzeczność*. Musimy zatem odrzucić przypuszczenie o istnieniu funkcji f. W konsekwencji, nie istnieje bijekcja między X oraz $\wp(X)$, czyli X oraz $\wp(X)$ nie są równoliczne.