Logika Matematyczna (10)

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl

pogon@amu.edu.pl

Rezolucja w KRZ

Plan na dziś

Kolejna z omawianych operacji konsekwencji w KRZ wykorzystuje metodę rezolucji.

- Postać klauzulowa formuł.
- Reguła rezolucji.
- Dowody rezolucyjne.
- Trafność i pełność metody rezolucyjnej.

Uwaga. Dowody oparte na metodzie rezolucji mają istotne zastosowania np. w automatycznym dowodzeniu twierdzeń.

Postać klauzulowa formuł

Klauzulą nazwiemy dowolny skończony zbiór literałów.

Klauzule odpowiadają alternatywom elementarnym. Tak więc, jeśli $\ell_1 \vee \ell_2 \vee \ldots \vee \ell_n$ jest alternatywą elementarną, to odpowiadająca jej klauzula jest zbiorem $\{\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n\}$.
Umawiamy się, że literały, które (ewentualnie) występują więcej niż raz w danej alternatywie elementarnej zapisujemy tylko raz w odpowiadającej jej klauzuli. Ponieważ $(\alpha \vee \alpha) \equiv \alpha$ jest tezą KRZ, umowa ta niczego nie „psuje".

Klauzulę pustą (nie zawierającą żadnych elementów) oznaczamy przez $\Box$.

Postać klauzulowa formuł

Zbiory klauzul są więc rodzinami zbiorów literałów. Każdej formule w kpn odpowiada pewien zbiór klauzul. Jeśli α jest kpn, to jest postaci: $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n$, gdzie każda formuła α_i jest alternatywą elementarną postaci:

$$\ell^i_1 \vee \ell^i_2 \vee \ldots \vee \ell^i_{m_i},$$

gdzie z kolei każda formuła ℓ^i_j jest literałem. Formule α odpowiada wtedy zbiór klauzul:

$$\{\{\ell^1_1, \ell^1_2, \ldots, \ell^1_{m_1}\}, \{\ell^2_1, \ell^2_2, \ldots, \ell^2_{m_2}\}, \ldots, \{\ell^n_1, \ell^n_2, \ldots, \ell^n_{m_n}\}\}.$$

Umawiamy się, że alternatywy elementarne, które (ewentualnie) występują więcej niż raz w danej koniunkcyjnej postaci normalnej zapisujemy tylko raz w odpowiadającej jej rodzinie zbiorów. Również ta umowa jest poprawna.

Postać klauzulowa formuł

Dla przykładu, formule w koniunkcyjnej postaci normalnej:

$$(p_1 \vee p_2 \vee \neg p_3) \wedge (p_3 \vee p_4) \wedge \neg p_1 \wedge (\neg p_2 \vee \neg p_4)$$

odpowiada następujący zbiór klauzul:

$$\{\{p_1, p_2, \neg p_3\}, \{p_3, p_4\}, \{\neg p_1\}, \{\neg p_2, \neg p_4\}\}.$$

Można wprowadzić jakiś symbol relacyjny, powiedzmy $\rightleftharpoons$, pozwalający na skrótowe zapisywanie wypowiedzi:

- $\alpha \rightleftharpoons S$ czytamy: „formule α w kpn odpowiada zbiór klauzul S" ***lub, równoznacznie***
- $\alpha \rightleftharpoons S$ czytamy: „zbiór klauzul S reprezentuje formułę α w kpn".

Symbol $\rightleftharpoons$ należy oczywiście do metajęzyka.

Postać klauzulowa formuł

Pamiętamy, że algorytm ustalania, czy dana formuła języka KRZ jest tautologią ma złożoność wykładniczą: aby sprawdzić, czy formuła o n zmiennych zdaniowych jest tautologią KRZ trzeba sprawdzić, jaka jest jej wartość dla 2^n wzz.

Na mocy Twierdzenia o Pełności KRZ, jeśli formuła α ***nie jest*** spełnialna, to możemy to wykazać na drodze dedukcyjnej,

- pokazując, że: $\emptyset \vdash_{krz} \neg\alpha$ ***lub***
- pokazując, że: $\vdash_{jas} \neg\alpha$.

Nie możemy jednak, ani używając konsekwencji $\vdash_{krz}$, ani używając konsekwencji $\vdash_{jas}$ pokazać, że jakaś formuła ***jest*** spełnialna.

Postać klauzulowa formuł

Podobnie, jeśli α wynika logicznie z X (czyli jeśli zachodzi $X \models_{KRZ} \alpha$), to możemy to wykazać,

- pokazując, że: $X \vdash_{krz} \alpha$ ***lub***
- pokazując, że: $X \vdash_{jas} \alpha$.

Jeśli jednak $X \not\models \alpha$, (czyli gdy przy ***co najmniej jednym*** wartościowaniu h, $h[X] \subseteq \{1\}$ oraz $h(\alpha) = 0$), to nie mamy możliwości przedstawienia dowodu (w terminach konsekwencji $\vdash_{krz}$ lub $\vdash_{jas}$), że ***istnieje*** wartościowanie h takie, że $h[X] \subseteq \{1\}$ oraz $h(\alpha) = 0$.

Reguła rezolucji, którą omówimy za chwilę, dostarcza możliwości wykazywania środkami czysto syntaktycznymi, że dana formuła nie jest spełnialna.

Reguła rezolucji: definicja

Niech C_1 i C_2 będą klauzulami i niech literał ℓ występuje w C_1, a literał $\overline{\ell}$ występuje w C_2. Wtedy każdą klauzulę postaci:

$$(C_1 - \{\ell\}) \cup (C_2 - \{\overline{\ell}\})$$

nazywamy ***rezolwentą*** klauzul C_1 i C_2.

Zamiast *rezolwenta* używa się też terminu: ***rezolwent***. Logice jest oczywiście obojętny rodzaj gramatyczny. Jeśli C_1 i C_2 są powyższej postaci, to mówimy też, że C_1 i C_2 ***kolidują*** ze względu na literały ℓ oraz $\overline{\ell}$.

Reguła rezolucji: przykład

Niech:

- $C_1 = \{p_1, \neg p_2, p_3\}$
- $C_2 = \{p_2, \neg p_3, p_4\}$.

Widać, że C_1 i C_2 kolidują ze względu na następujące pary literałów komplementarnych:

- (a) $(\neg p_2, p_2)$,
- (b) $(p_3, \neg p_3)$.

Wtedy rezolwentami C_1 i C_2 są klauzule:

- (a) $\{p_1, p_3, \neg p_3, p_4\}$
- (b) $\{p_1, p_2, \neg p_2, p_4\}$.

Dowody rezolucyjne: definicje

(i) ***Dowodem rezolucyjnym*** klauzuli C ze zbioru klauzul S nazywamy każdy skończony ciąg klauzul $C_1, \ldots, C_n$ taki, że:

- C jest identyczna z C_n
- każda klauzula C_i ($1 \leqslant i \leqslant n$) jest albo elementem zbioru S albo rezolwentą pewnych klauzul C_j oraz C_k dla $j, k < i$.

(ii) Jeśli istnieje dowód rezolucyjny C z S, to mówimy, że C jest ***rezolucyjnie dowodliwa*** (lub: ***rezolucyjnie wyprowadzalna***) z S i oznaczamy ten fakt przez $S \vdash_{res} C$.

(iii) Każdy dowód rezolucyjny klauzuli pustej $\Box$ ze zbioru S nazywamy ***rezolucyjną refutacją*** S. Jeżeli istnieje rezolucyjna refutacja S, to mówimy, że S jest ***rezolucyjnie odrzucalny*** i oznaczamy ten fakt przez $S \vdash_{res} \Box$.

Dowody rezolucyjne: definicje

(iv) Dla dowolnego zbioru klauzul S niech $res(S)$ będzie zbiorem wszystkich rezolwent wszystkich par elementów S. Zdefiniujmy:

- $res_0(S) = S$
- $res_n = res_{n-1}(S) \cup res(res_{n-1}(S))$ dla $n > 0$
- $\mathcal{R}(S) = \bigcup\{res_n(S) : n \in \mathcal{N}\}$.

Zbiór $\mathcal{R}(S)$ nazywamy ***domknięciem rezolucyjnym*** zbioru S.
(v) ***Rezolucyjnym drzewem dowodowym*** klauzuli C ze zbioru klauzul S nazywamy każde drzewo binarne T o następujących własnościach:

- korzeniem T jest C
- liśćmi T są pewne elementy zbioru S
- bezpośrednimi następnikami wierzchołka D nie będącego liściem są klauzule D_1 oraz D_2, których rezolwentą jest D.

Uwaga. Często mówi się o dowodach rezolucyjnych *formuł* ze *zbiorów formuł*. Rozumiemy przez to, że wszystkie brane pod uwagę formuły:

- (1) zostały przekształcone do równoważnych im inferencyjnie kpn;
- (2) zostały zastąpione (przy uwzględnieniu (1)) odpowiadającymi im zbiorami klauzul.

Wtedy oczywiście należy powiedzieć, co rozumiemy przez dowód rezolucyjny ***zbioru klauzul*** ze ***zbiorów zbiorów*** klauzul. Jeśli piszemy skrótowo $S \vdash_{res} \alpha$, gdzie S jest zbiorem *formuł*, a α jest *formułą* to rozumiemy przez to, że:

- α została zastąpiona przez swoją kpn, a ta z kolei przez odpowiedni zbiór klauzul,
- każda formuła $\beta \in S$ została zastąpiona przez swoją kpn, a ta z kolei przez odpowiedni zbiór klauzul,
- $S \vdash_{res} \alpha$ oznacza, że ***każda*** klauzula występująca w zbiorze klauzul odpowiadającym kpn formuły α ma dowód rezolucyjny ze zbioru klauzul odpowiadającemu ***koniunkcji*** pewnych formuł z S.

Dowody rezolucyjne: komentarze

Uwaga. Możemy rozważać ***dowolne*** zbiory klauzul jako poprzedniki relacji $\vdash_{res}$. Z Twierdzenia o Zwartości (zobacz Dodatek 4) oraz z Twierdzeń o Trafności i Pełności metody rezolucyjnej (które udowodnimy za chwilę) wynika, że jeśli $S \vdash_{res} \alpha$, to istnieje ***skończony*** zbiór $S' \subseteq S$ taki, że $S' \vdash_{res} \alpha$.

Uwaga. Nietrudno sprawdzić (korzystając z indukcji po długości dowodu rezolucyjnego), że zachodzi następująca równoważnośc:

- Istnieje rezolucyjne drzewo dowodowe dla C z S wtedy i tylko wtedy, gdy C jest rezolucyjnie dowodliwa z S, czyli gdy $S \vdash_{res} C$.

Uwaga. Rozważamy drzewa, których wierzchołki są znakowane ***zbiorami*** literałów.

Dowody rezolucyjne: przykład 1

Niech $S = \{p_1 \rightarrow p_2, p_2 \rightarrow p_3, p_1, \neg p_3\}$ i niech $\bigwedge S$ będzie koniunkcją wszystkich formuł ze zbioru S. Pokażemy, że $\bigwedge S \vdash_{res} \Box$. Formuła $\bigwedge S$ ma następującą kpn: $(\neg p_1 \vee p_2) \wedge (\neg p_2 \vee p_3) \wedge p_1 \wedge \neg p_3$. Odpowiada jej zatem zbiór klauzul:

$$\{\{\neg p_1, p_2\}, \{\neg p_2, p_3\}, \{p_1\}, \{\neg p_3\}\}.$$

A oto zapowiadany dowód rezolucyjny:

1.	$\{\neg p_1, p_2\}$	przesłanka
2.	$\{\neg p_2, p_3\}$	przesłanka
3.	$\{p_1\}$	przesłanka
4.	$\{\neg p_3\}$	przesłanka
5.	$\{\neg p_1, p_3\}$	rezolwenta (1) i (2)
6.	$\{p_3\}$	rezolwenta (3) i (5)
7.	$\Box$	rezolwenta (4) i (6).

Dowody rezolucyjne: przykład 1

Zwykle takie dowody rezolucyjne zapisuje się w poniższej postaci:

1.	$\neg p_1 \vee p_2$	przesłanka
2.	$\neg p_2 \vee p_3$	przesłanka
3.	p_1	przesłanka
4.	$\neg p_3$	przesłanka
5.	$\neg p_1 \vee p_3$	rezolwenta (1) i (2)
6.	p_3	rezolwenta (3) i (5)
7.	$\square$	rezolwenta (4) i (6).

Informatycy stosują inne jeszcze skróty notacyjne, czym nie będziemy się tutaj przejmować.

Dowody rezolucyjne: przykład 1

Zauważmy, że $\{p_1 \to p_2, p_2 \to p_3, p_1\} \models_{KRZ} p_3$, co oznacza, że zbiór

$$\{p_1 \to p_2, p_2 \to p_3, p_1, \neg p_3\}$$

nie jest spełnialny (nie istnieje wartościowanie, przy którym wszystkie elementy tego zbioru mają wartość 1).

Pokażemy za chwilę, że zbiór klauzul S jest rezolucyjnie odrzucalny dokładnie wtedy, gdy nie jest spełnialna formuła, której kpn odpowiada (skończonemu podzbiorowi) S.

Dowody rezolucyjne: przykład 2

Pokażemy, że zbiór formuł

$$S = \{p_1 \to (\neg p_2 \vee (p_3 \wedge p_4)), p_1, p_2, \neg p_4\}$$

jest rezolucyjnie odrzucalny. Tworzymy koniunkcję $\bigwedge S$ wszystkich formuł z S:

$$(p_1 \to (\neg p_2 \vee (p_3 \wedge p_4))) \wedge p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_4,$$

a po przekształceniu tej formuły do kpn tworzymy odpowiadający jej zbiór klauzul:

$$\{\{\neg p_1, \neg p_2, p_3\}, \{\neg p_1, \neg p_2, p_4\}, \{p_1\}, \{p_2\}, \{\neg p_4\}\}.$$

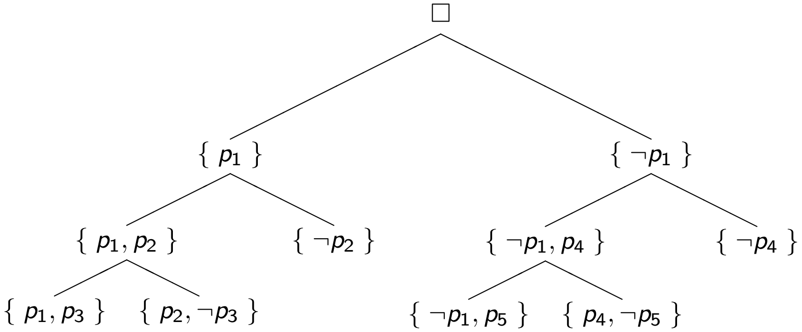
Dowody rezolucyjne: przykład 2

Dowód rezolucyjny zapiszemy korzystając z uproszczenia notacji zastosowanego w poprzednim przykładzie:

1.	$\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3$	przesłanka
2.	$\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_4$	przesłanka
3.	p_1	przesłanka
4.	p_2	przesłanka
5.	$\neg p_4$	przesłanka
6.	$\neg p_1 \vee \neg p_2$	rezolwenta 2 i 5
7.	$\neg p_1$	rezolwenta 4 i 6
8.	$\square$	rezolwenta 3 i 7.

Dowody rezolucyjne: przykład 3

Niech $S = \{\{p_1, p_3\}, \{p_2, \neg p_3\}, \{\neg p_2\}, \{\neg p_1, p_5\}, \{\neg p_4\}, \{p_4, \neg p_5\}\}$ będzie zbiorem klauzul. Poniższe drzewo jest rezolucyjnym drzewem dowodowym klauzuli $\square$ ze zbioru S (co oznacza, że S jest rezolucyjnie odrzucalny):



Dowody rezolucyjne: przykład 4

Pokażemy, że ze zbioru:

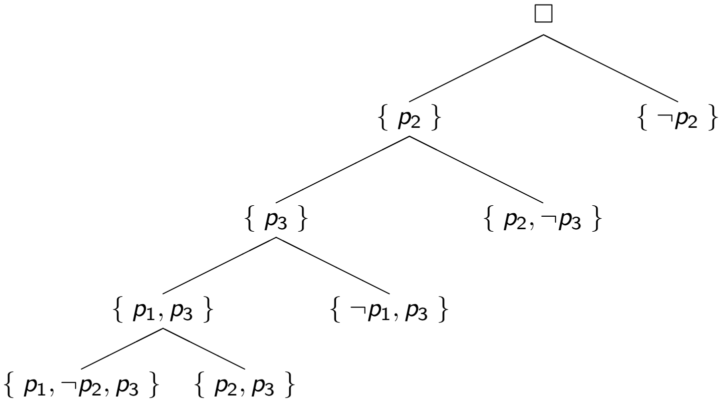
$$\{\{p_1, \neg p_2, p_3\}, \{p_2, p_3\}, \{\neg p_1, p_3\}, \{p_2, \neg p_3\}, \{\neg p_2\}\}$$

wyprowadzić można klauzulę pustą $\Box$.

1.	$\{p_1, \neg p_2, p_3\}$	przesłanka
2.	$\{p_2, p_3\}$	przesłanka
3.	$\{\neg p_1, p_3\}$	przesłanka
4.	$\{p_2, \neg p_3\}$	przesłanka
5.	$\{\neg p_2\}$	przesłanka
6.	$\{p_1, p_3\}$	rezolwenta 1 i 2
7.	$\{p_3\}$	rezolwenta 6 i 3
8.	$\{p_2\}$	rezolwenta 7 i 4
9.	$\Box$	rezolwenta 8 i 5.

Dowody rezolucyjne: przykład 4

Powyższe wyprowadzenie reprezentowane jest przez następujące rezolucyjne drzewo dowodowe:



Banalność metody rezolucji?

Powyższe przykłady pokazują, że stosowanie reguły rezolucji jest banalnie proste. Mogą więc skłaniać do (pochopnej!) konkluzji, że reguła rezolucji może zastąpić wszelkie skomplikowane techniki dowodowe (metodę aksjomatyczną, dedukcję naturalną, itd.). Rzecz ma się następująco. Owszem, reguła rezolucji nie jest skomplikowana i — jak pokażemy za chwilę — jest trafna i pełna. Jednak owa prostota ma też swoją cenę: zbiory klauzul odpowiadają formułom w koniunkcyjnych postaciach normalnych, i choć istnieje algorytm znajdowania dla każdej formuły równoważnej jej inferencyjnie formuły w kpn, to postępowanie wedle jego zaleceń jest dla Człowieka wielce czasochłonne. Inaczej rzecz się ma z Maszynami liczącymi, które stosunkowo szybko znajdują kpn, a potem przeprowadzają dowody rezolucyjne.

Tak więc, nie ma ucieczki (przed Myśleniem): choć bezmyślną pracę można powierzyć Maszynom, to praca twórcza (np. znajdowanie dowodów) stale należy do Człowieka.

Trafność metody rezolucji

Twierdzenie 10.1. (*Trafność rezolucji w KRZ*)

Niech S będzie zbiorem klauzul. Jeśli $\Box \in \mathcal{R}(S)$, to S nie jest spełnialny w KRZ.

Twierdzenie o trafności rezolucji w KRZ mówi zatem, że: jeżeli istnieje rezolucyjna refutacja S, to S nie jest spełnialny w KRZ.

Dowód twierdzenia o trafności rezolucji: w pliku rezolkrz.pdf.

Pełność metody rezolucji

Twierdzenie 10.2. (***Pełność rezolucji w KRZ***).

Jeżeli S nie jest spełnialny w KRZ, to $\Box \in \mathcal{R}(S)$.

Twierdzenie o pełności rezolucji w KRZ mówi zatem, że: jeżeli S nie jest spełnialny w KRZ, to istnieje rezolucyjna refutacja S.

Dowód twierdzenia o pełności rezolucji: w pliku rezolkrz.pdf.

Dowody rezolucyjne: dalsze przykłady

Skoro metoda rezolucji jest trafna i pełna, to można jej używać np. dla ustalania, czy:

- formuła języka KRZ jest tautologią KRZ
- formuła języka KRZ jest spełnialna
- formuła języka KRZ nie jest spełnialna
- formuła α wynika logicznie ze zbioru formuł X
- zbiór formuł X jest spełnialny
- zbiór formuł X nie jest spełnialny, itd.

Rozważmy kilka przykładów.

Dowody rezolucyjne: przykład 5

Rozważmy zbiór klauzul: $S = \{\{p_1, p_2, \neg p_3\}, \{p_3\}, \{p_1, \neg p_2, p_3\}, \{\neg p_3\}\}$. Zauważmy, że w zależności od kolejności doboru klauzul, do których stosujemy regułę rezolucji, możemy otrzymać różne wyniki końcowe:

1.	$\{p_1, p_2, \neg p_3\}$	przesł.
2.	$\{p_3\}$	przesłanka
3.	$\{p_1, \neg p_2, p_3\}$	przesł.
4.	$\{\neg p_3\}$	przesł.
5.	$\square$	rezolw. 2 i 4.

1.	$\{p_1, p_2, \neg p_3\}$	przesł.
2.	$\{p_3\}$	przesł.
3.	$\{p_1, \neg p_2, p_3\}$	przesł.
4.	$\{\neg p_3\}$	przesł.
5.	$\{p_1, p_2\}$	rezolw. 1 i 2.
6.	$\{p_1, \neg p_2\}$	rezolw. 3 i 4
7.	$\{p_1\}$	rezolw. 5 i 6.

Tak więc, zbiór S ***nie jest*** spełnialny, ponieważ istnieje ***co najmniej jedno*** wyprowadzenie $\square$ ze zbioru S.

Dowody rezolucyjne: przykład 6

Pokażemy, że

$$((\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \gamma) \wedge (\gamma \to \alpha) \wedge (\alpha \vee \beta \vee \gamma)) \to (\alpha \wedge \beta \wedge \gamma)$$

jest tautologią KRZ.

Jest tak dokładnie wtedy, gdy zbiór:

$$\{\alpha \to \beta, \beta \to \gamma, \gamma \to \alpha, \alpha \vee \beta \vee \gamma, \neg(\alpha \wedge \beta \wedge \gamma)\}$$

jest semantycznie sprzeczny (nie jest spełnialny).

To z kolei jest równoważne temu, że zbiór:

$$\{\neg\alpha \vee \beta, \neg\beta \vee \gamma, \neg\gamma \vee \alpha, \alpha \vee \beta \vee \gamma, \neg\alpha \vee \neg\beta \vee \neg\gamma\}$$

nie jest spełnialny.

Dowody rezolucyjne: przykład 6

Każda z formuł tego zbioru jest podstawieniem jakiejś alternatywy elementarnej: otrzymujemy je, gdy dokonamy np. podstawień p_1/α, p_2/β, p_3/γ.

W takich przypadkach usprawiedliwione jest pisanie dowodów rezolucyjnych z użyciem *metazmiennych* reprezentujących dowolne formuły języka KRZ i traktowanie pojedynczych metazmiennych jak literałów.

Na mocy pełności metody rezolucji wystarczy pokazać, że ze zbioru

$$\{\neg\alpha \vee \beta, \neg\beta \vee \gamma, \neg\gamma \vee \alpha, \alpha \vee \beta \vee \gamma, \neg\alpha \vee \neg\beta \vee \neg\gamma\}$$

można wyprowadzić klauzulę $\Box$:

Dowody rezolucyjne: przykład 6

1.	$\neg\alpha \vee \beta$	przesłanka
2.	$\neg\beta \vee \gamma$	przesłanka
3.	$\neg\gamma \vee \alpha$	przesłanka
4.	$\alpha \vee \beta \vee \gamma$	przesłanka
5.	$\neg\alpha \vee \neg\beta \vee \neg\gamma$	przesłanka
6.	$\alpha \vee \beta$	rezolwenta 4 i 3
7.	β	rezolwenta 6 i 1
8.	γ	rezolwenta 7 i 2
9.	α	rezolwenta 8 i 3
10.	$\neg\beta \vee \neg\gamma$	rezolwenta 9 i 5
11.	$\neg\gamma$	rezolwenta 7 i 10
12.	$\square$	rezolwenta 8 i 11.

Dowody rezolucyjne: przykład 7

Pokażemy, że formuła:

$$(\bigstar) \quad \neg((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \vee \gamma) \rightarrow (\beta \vee \gamma)))$$

nie jest spełnialna. Oznacza to, że formuła:

$$(\bigstar\bigstar) \quad (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \vee \gamma) \rightarrow (\beta \vee \gamma))$$

jest tautologią KRZ.

W tym celu wystarczy pokazać, że ze zbioru klauzul otrzymanego z kpn formuły ($\bigstar$) można wyprowadzić $\Box$. Koniunkcyjną postacią normalną formuły ($\bigstar$) jest:

$$(\neg\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma) \wedge (\neg\beta) \wedge (\neg\gamma).$$

Dowody rezolucyjne: przykład 7

Przeprowadzamy dowód rezolucyjny:

1.	$\neg\alpha \vee \beta$	przesłanka
2.	$\alpha \vee \gamma$	przesłanka
3.	$\neg\beta$	przesłanka
4.	$\neg\gamma$	przesłanka
5.	α	rezolwenta 2 i 4
6.	β	rezolwenta 1 i 5
9.	$\square$	rezolwenta 3 i 6.

Dowody rezolucyjne: przykład 8

Pokażemy, że formuła γ wynika logicznie ze zbioru formuł:

$$S = \{\alpha, (\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma, \tau \rightarrow \beta, \tau\}.$$

W tym celu wystarczy pokazać, że zbiór

$$\{\alpha, (\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma, \tau \rightarrow \beta, \tau, \neg\gamma\}$$

nie jest spełnialny.

Każda formuła ze zbioru S jest równoważna alternatywie elementarnej:

1. α
2. $\neg\alpha \vee \neg\beta \vee \gamma$
3. $\neg\tau \vee \beta$
4. τ.

Dowody rezolucyjne: przykład 8

Pokazujemy, że z powyższych klauzul można wyprowadzić $\Box$:

1.	α	przesłanka
2.	$\neg\alpha \vee \neg\beta \vee \gamma$	przesłanka
3.	$\neg\tau \vee \beta$	przesłanka
4.	τ	przesłanka
5.	$\neg\gamma$	przesłanka
6.	$\neg\alpha \vee \neg\beta$	rezolwenta 2 i 5
7.	$\neg\beta$	rezolwenta 6 i 1
8.	$\neg\tau$	rezolwenta 3 i 7
9.	$\Box$	rezolwenta 4 i 8.

Skoro $S \cup \{\neg\gamma\} \vdash_{res} \Box$, to $S \models_{KRZ} \gamma$.

Dowody rezolucyjne: przykład 9

Pokażemy, że formuła β wynika logicznie z następującego zbioru formuł:

$$S = \{\alpha \rightarrow \beta, (\gamma \wedge \delta) \rightarrow \alpha, (\tau \wedge \gamma) \rightarrow \delta, (\theta \wedge \alpha) \rightarrow \gamma, (\theta \wedge \tau) \rightarrow \gamma, \theta, \tau\}.$$

Każda formuła ze zbioru S jest równoważna alternatywie elementarnej:

1. $\neg\alpha \vee \beta$
2. $\neg\gamma \vee \neg\delta \vee \alpha$
3. $\neg\tau \vee \neg\gamma \vee \delta$
4. $\neg\theta \vee \neg\alpha \vee \gamma$
5. $\neg\theta \vee \neg\tau \vee \gamma$
6. θ
7. τ.

Dowody rezolucyjne: przykład 9

1.	$\neg\alpha \vee \beta$	przesłanka
2.	$\neg\gamma \vee \neg\delta \vee \alpha$	przesłanka
3.	$\neg\tau \vee \neg\gamma \vee \delta$	przesłanka
4.	$\neg\theta \vee \neg\alpha \vee \gamma$	przesłanka
5.	$\neg\theta \vee \neg\tau \vee \gamma$	przesłanka
6.	θ	przesłanka
7.	τ	przesłanka
8.	$\neg\tau \vee \gamma$	rezolwenta 5 i 6
9.	γ	rezolwenta 7 i 8
10.	$\neg\delta \vee \alpha$	rezolwenta 2 i 9
11.	$\neg\gamma \vee \delta$	rezolwenta 3 i 7
12.	$\neg\gamma \vee \alpha$	rezolwenta 2 i 11
13.	α	rezolwenta 9 i 12
14.	β	rezolwenta 1 i 13.

Ponieważ uzyskaliśmy rezolucyjne wyprowadzenie β z S, więc na mocy twierdzenia o pełności metody rezolucyjnej otrzymujemy, że $S \models_{KRZ} \beta$.

Dowody rezolucyjne: przykład 9

Dla porównania, przytoczmy jeszcze dowód założeniowy, że $S \vdash_{jas} \beta$:

1.	$\alpha \rightarrow \beta$	założenie
2.	$(\gamma \wedge \delta) \rightarrow \alpha$	założenie
3.	$(\tau \wedge \gamma) \rightarrow \delta$	założenie
4.	$(\theta \wedge \alpha) \rightarrow \gamma$	założenie
5.	$(\theta \wedge \tau) \rightarrow \gamma$	założenie
6.	θ	założenie
7.	τ	założenie
8.	$\theta \wedge \tau$	DK: 6,7
9.	γ	RO: 5,8
10.	$\tau \wedge \gamma$	DK: 7,9
11.	δ	RO: 3,10
12.	$\gamma \wedge \delta$	DK: 9,11
13.	α	RO: 2,12
14.	β	RO: 1,13.

Dowody rezolucyjne: refleksja

Powyższe przykłady mogą osobie nieufnej nasunąć pytanie, po co właściwie zajmować się metodą rezolucji, skoro mamy inne, dobre metody dowodzenia tez.

Podkreślamy, że metoda rezolucji znajduje zastosowanie przede wszystkim w automatycznym dowodzeniu twierdzeń. Przekształcenie nawet bardzo skomplikowanych formuł na równoważne im inferencyjnie kpn nie jest problemem dla szybkich maszyn liczących. Drugi krok w metodzie rezolucyjnej dowodzenia twierdzeń, czyli stosowanie samej reguły rezolucji, jest oczywiście także bardzo prostym zadaniem dla maszyn liczących.

Warto zatem wyobrazić sobie np. zbiór liczący **tysiące** skomplikowanych przesłanek i odetchnąć z ulgą, że możemy w takiej sytuacji powierzyć robotę dedukcyjną Maszynom.

Konsekwencja rezolucyjna

Jest jasne, jak zdefiniować operację C_{res} konsekwencji rezolucyjnej wyznaczoną przez metodę rezolucji:

$$C_{res}(X) = \{\alpha \in F_{KRZ} : \ X \vdash_{res} \alpha\}.$$

Tak zdefiniowana operacja konsekwencji ma własności (C1)–(C4) podane na wykładach 5–7.

Jest wiele różnych, bardziej subtelnych od powyższego — całkowicie ogólnego — rodzajów rezolucji. Problematyka ta jest intensywnie badana, przede wszystkim w związku z zastosowaniami metody rezolucji w automatycznym dowodzeniu twierdzeń. Proszę żądać informacji na ten temat na zajęciach z Informatyki.

Koniec

W pliku rezolkrz.pdf znajdują się dowody twierdzeń o trafności i pełności metody rezolucji w KRZ, a także wszystkie przedstawione tu definicje i przykłady.

Na kolejnych zajęciach omówimy operację konsekwencji w KRZ wyznaczoną przez tablice analityczne.