

# O przekonaniach i przekonywaniu (11)

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM

[www.logic.amu.edu.pl](http://www.logic.amu.edu.pl)

[pogon@amu.edu.pl](mailto:pogon@amu.edu.pl)

30 maja 2007

# Plan na dziś

# Plan na dziś

## Plan na dziś:

- o logice epistemicznej;
- własności systemów przekonań;
- logika świadomych, racjonalnych przekonań;
- teorie zmiany przekonań.

# Systemy przekonań

Jest spora mnogość różnorodnych operatorów doksastycznych i epistemicznych, np.:

- wiem
- wierzę
- sądzę
- nie wykluczam
- dopuszczam możliwość
- mniemam
- podejrzewam
- wątpię
- mam nadzieję
- obawiam się

Buduje się zarówno systemy logiczne, charakteryzujące poszczególne z tych modalności, jak i systemy **multimodalne**, zawierające więcej niż jeden typ modalności.

# Własności systemów przekonań

Można pytać, czy systemy przekonań mają znane własności metalogiczne, np. czy są:

- niesprzeczne;
- zupełne;
- rozstrzygalne, itp.

Jak wiemy z pierwszych dwóch wykładów, możemy również zadawać sensowne pytania dotyczące naszej wiedzy o samych przekonaniach, tj. pytania o świadomość wiedzy (przekonań).

Nadto, można także rozważać systemy „bliższe życiu”, np. nie wykluczające, iż dane przekonania zawierają poglądy sprzeczne ([parakonsystencja](#)).

# Logika epistemiczna

Dwa nurty w badaniach logiki wiedzy i przekonań:

- Łoś, Hintikka, von Wright, Pap, Rescher, ...
- Gärdenfors, Alchourron, Makinson, ...

Pierwszy z tych nurtów wiąże systemy wiedzy i przekonań z logikami modalnymi, drugi dotyczy w pierwszym rzędzie problematyki zmian systemów przekonań.

# System Łosia

To pierwszy system logiki epistemicznej. W języku mamy zmienne i funktory zdaniowe, kwantyfikator  $\forall$  wiążący zmienne nazwowe (przebiegające zbiór osób). Operator  $L_x$  ma następującą interpretację:  $L_x p$  oznacza, że człowiek  $x$  uznaje, że  $p$ .

Aksjomaty:

- 1  $L_x p \equiv \neg L_x \neg p$
- 2  $L_x((p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)))$
- 3  $L_x(p \rightarrow (\neg p \rightarrow q))$
- 4  $L_x((\neg p \rightarrow p) \rightarrow p)$
- 5  $L_x(p \rightarrow q) \rightarrow (L_x p \rightarrow L_x q)$
- 6  $\forall x L_x p \rightarrow p$
- 7  $L_x L_x p \equiv L_x p$

Reguły systemu to: odrywanie i podstawianie.

# System Łosia

- Pierwszy aksjomat systemu wyraża pewną formę zasady niesprzeczności.
- Z pierwszego aksjomatu systemu wynika, że dla dowolnego zdania  $p$ : uznane jest bądź  $p$ , bądź jego zaprzeczenie  $\neg p$ .
- Aksjomaty: 2, 3 i 4 wyrażają uznawanie aksjomatyki Łukasiewicza dla (implikacyjno-negacyjnego) rachunku zdań.
- Aksjomat 5 wyraża rozdzielność operatora  $L_x$  względem implikacji.
- Aksjomat 6 stwierdza, że zdanie uznawane przez wszystkich jest tezą systemu
- Ostatni aksjomat mówi, że iteracja operacji uznawania jest równoważna tej operacji.
- Aksjomaty systemu są niezależne.
- System jest niesprzeczny i wielowartościowy.



# System von Wrighta

Modalności epistemiczne rozważane przez von Wrighta to:

- $Vp$  —  $p$  jest (pozytywnie) **zweryfikowane**;
- $Fp$  —  $p$  jest **sfalsyfikowane** (mamy:  $Fp \equiv V\neg p$ );
- $\neg Vp \wedge \neg V\neg p$  —  $p$  jest **nierozstrzygnięte**.

Aksjomaty:

- $\neg F(p \vee q) \equiv (\neg Fp \vee \neg Fq)$
- $\neg Fp \vee \neg F\neg p$
- $V\Box(p \equiv q) \rightarrow \Box(Fp \equiv Fq)$

Reguła: Jeśli  $\vdash p$ , to  $\vdash Vp$ .

Symbol  $\Box$  oznacza tu operator **konieczności**.

Dla kompletności, można zdefiniować operator  $\neg V\neg p$  —  $p$  jest **dopuszczone**.

# System Hintikki

W pierwotnej wersji system Hintikki operował modalnościami:

- $P_x p$  —  $p$  jest możliwe ze względu na wiedzę (podmiotu)  $x$ ;
- $K_x p$  — (podmiot)  $x$  wie, że  $p$ ;
- $B p$  — (podmiot)  $x$  wierzy, że  $p$ .

Dla scharakteryzowania wiedzy danego podmiotu używa się pojęcia **zbioru modelowego**.

W poniższej definicji  $m$  (ew. z indeksem) jest zbiorem formuł (rozważanego języka), zaś  $M$  jest rodziną zbiorów formuł.

Zbiory formuł odpowiadają zespołom przekonań.

# System Hintikki

Przez **system modelowy** rozumiemy każdą rodzinę  $M$  zbiorów formuł spełniającą, dla każdego  $m \in M$ , następujące warunki:

- Jeśli  $p \in m$ , to  $\neg p \notin m$ .
- Jeśli  $p \wedge q \in m$ , to  $p \in m$  oraz  $q \in m$ .
- Jeśli  $p \vee q \in m$ , to  $p \in m$  lub  $q \in m$ .
- Jeśli  $\neg\neg p \in m$ , to  $p \in m$ .
- Jeśli  $\neg(p \wedge q) \in m$ , to  $\neg p \in m$  lub  $\neg q \in m$ .
- Jeśli  $\neg(p \vee q) \in m$ , to  $\neg p \in m$  oraz  $\neg q \in m$ .
- Jeśli  $P_x p \in m$ , to istnieje  $m_* \in M$  taki, że  $p \in m_*$ .
- Jeśli  $K_x p \in m$ , to dla każdego  $m_* \in M$ :  $K_x p \in m_*$ .
- Jeśli  $K_x p \in m$ , to  $p \in m$ .
- Jeśli  $\neg K_x p \in m$ , to  $P_x \neg p \in m$ .
- Jeśli  $\neg P_x p \in m$ , to  $K_x \neg p \in m$ .

# System Hintikki

Między elementami zbioru modelowego zachodzić mogą zależności:

- doksastycznej alternatywności;
- epistemicznej alternatywności.

Logikę wiedzy i przekonań otrzymujemy przez dodanie następujących warunków:

- Jeśli  $K_x p \in m$  i  $m_*$  jest doksastycznie alternatywne względem  $m$ , to  $K_x p \in m_*$ .
- Jeśli  $Bp \in m$  i  $m_*$  jest epistemicznie alternatywne względem  $m$ , to  $Bp \in m_*$ .
- Jeśli  $K_x p \in m$ , to  $BK_x p \in m$ .
- Każda doksastyczna alternatywność jest też epistemiczną alternatywnością.

# O logikach modalnych

Wiedzę i przekonania można też opisywać z wykorzystaniem klasycznych modalności aleitycznych:

- konieczności;
- możliwości.

Możemy uznać, że operator epistemiczny  $K_x$  zachowuje się tak, jak operator konieczności  $\Box$ , a operator  $P_x$  zachowuje się tak, jak operator możliwości  $\Diamond$ .

Wtedy możemy wykorzystać:

- znane wyniki dotyczące szeregu logik modalnych;
- semantykę algebraiczną (Kripkego) dla tak interpretowanych operatorów epistemicznych.

# System Gödla-Löba

Logika **Gödla-Löba**, zwana też logiką **dowodliwości** jest logiką modalną, w której operator  $\Box$  może być interpretowany jako **dowodliwość** (w ustalonym systemie).

Można także korzystać z tej logiki przy modelowaniu systemów przekonań, z użyciem operatora **B**. W istocie, robiliśmy to na dwóch pierwszych wykładach, wzorując się na książce Smullyana *Forever Undecided*.

Logika Gödla-Löba ma następujące **aksjomaty**:

- wszystkie tautologie (KRZ);
- aksjomaty rozdzielności:  $B(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (B\alpha \rightarrow B\beta)$ ;
- wszystkie formuły postaci:  $B(B\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow B\alpha$ .

Regułami wnioskowania są: *modus ponens* oraz *ukoniecznianie*.

# Systemy świadomych, racjonalnych przekonań

Jedną z propozycji rozumienia pojęcia **świadome racjonalne przekonanie** jest system aksjomatyczny LB podany przez Marka Tokarza w *Elementach pragmatyki logicznej*, będący zdaniową logiką modalną z operatorem **B** oraz:

Aksjomatami:

- $\alpha$ , dla wszystkich tautologii  $\alpha$
- $B\alpha \equiv BB\alpha$
- $\neg B\alpha \equiv B\neg B\alpha$
- $B\neg\alpha \rightarrow \neg B\alpha$
- $B(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (B\alpha \rightarrow B\beta)$ .

Regułami:

- *modus ponens*: z  $\alpha \rightarrow \beta$  i  $\alpha$  możemy wyprowadzić  $\beta$
- *regułą modalną*: z  $\alpha$  możemy wyprowadzić  $B\alpha$ .

## Niektóre tezy systemu LB

- $\neg \mathbf{B}(\alpha \wedge \neg \alpha)$
- $\mathbf{B}(\alpha \equiv \beta) \rightarrow (\mathbf{B}\alpha \equiv \mathbf{B}\beta)$
- $(\mathbf{B}\alpha \vee \mathbf{B}\beta) \rightarrow \mathbf{B}(\alpha \vee \beta)$
- $(\mathbf{B}\alpha \wedge \mathbf{B}\beta) \equiv \mathbf{B}(\alpha \wedge \beta)$
- $\mathbf{B}\alpha \rightarrow \neg \mathbf{B}\neg \alpha$
- $(\mathbf{B}(\alpha \vee \beta) \wedge \neg \mathbf{B}\alpha) \rightarrow \neg \mathbf{B}\neg \beta$
- $(\mathbf{B}(\alpha \vee \beta) \wedge \mathbf{B}\neg \alpha) \rightarrow \mathbf{B}\beta$
- $\mathbf{B}(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\mathbf{B}\neg \beta \rightarrow \mathbf{B}\neg \alpha)$
- $\neg \mathbf{B}(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg \mathbf{B}\neg \alpha \wedge \neg \mathbf{B}\beta)$
- $\mathbf{B}(\mathbf{B}\alpha \vee \mathbf{B}\beta) \rightarrow \mathbf{B}(\alpha \vee \beta)$
- $\mathbf{B}(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \mathbf{B}(\mathbf{B}\alpha \rightarrow \beta)$
- $\mathbf{B}(\mathbf{B}\alpha \rightarrow \alpha)$



# Własności systemu LB

- W LB zachodzi **Twierdzenie o Dedukcji**.
- System LB jest domknięty na regułę **ekstensjonalności**:  
jeśli  $\vdash \alpha \equiv \beta$ , to  $\vdash \mathbf{B}\alpha \equiv \mathbf{B}\beta$ .
- **Pełność LB**. Formuła  $\alpha$  jest tezą logiki LB wtedy i tylko wtedy, gdy jest prawdziwa we wszystkich właściwych algebrach filtrowych, tj. w strukturach postaci  $\langle A, -, \cap, \cup, *, F \rangle$ , gdzie  $\langle A, -, \cap, \cup \rangle$  jest algebrą Boole'a,  $F$  właściwym filtrem tej algebry, a  $*$  funkcją charakterystyczną zbioru  $F$ .
- Logika LB ma własność modeli skończonych (FMP), a więc jest **rozstrzygalna**.

## Rozszerzenia systemu LB

Logikę LCB otrzymujemy z LB przez dodanie aksjomatu:  $B\alpha \vee B\neg\alpha$ .  
Równoważnie, dla otrzymania LCB można dodać do LB każdą z następujących formuł:

- $\neg B\alpha \rightarrow B\neg\alpha$
- $B(\alpha \vee \beta) \rightarrow (B\alpha \vee B\beta)$
- $(B\alpha \rightarrow B\beta) \rightarrow B(\alpha \rightarrow \beta)$ .
- Logika LCB jest logiką świadomego, racjonalnego *Besserwissera* — kogoś, kto ma wyrobioną opinię w każdej sprawie.
- **Pełność LCB.** Formuła  $\alpha$  jest tezą logiki LCB wtedy i tylko wtedy, gdy jest prawdziwa we wszystkich ultraalgebrach, tj. w strukturach postaci  $\langle A, -, \cap, \cup, *, F \rangle$ , gdzie  $\langle A, -, \cap, \cup \rangle$  jest algebrą Boole'a,  $F$  ultrafiltrem tej algebry, a  $*$  funkcją charakterystyczną zbioru  $F$ .
- Logika LCB ma własność modeli skończonych (FMP), a więc jest rozstrzygalna.

## Rozszerzenia systemu LB

Dodanie do aksjomatów LB aksjomatu:  $B\alpha \rightarrow \alpha$  pozwala interpretować otrzymaną w ten sposób logikę LWB jako logikę **wiedzy**.

- LCB jest równoważna systemowi modalnemu S5.
- **Pełność LWB**. Formuła  $\alpha$  jest tezą logiki LWB wtedy i tylko wtedy, gdy jest prawdziwa we wszystkich strukturach postaci  $\langle A, -, \cap, \cup, *, F \rangle$ , gdzie  $\langle A, -, \cap, \cup \rangle$  jest algebrą Boole'a,  $F$  filtrem jednostkowym tej algebry, a  $*$  funkcją charakterystyczną zbioru  $F$ .
- Logika LWB ma własność modeli skończonych (FMP), a więc jest **rozstrzygalna**.

# Teorie zmiany przekonań

**Model AGM.** W jaki sposób opisywać zmiany systemu przekonań?

Czasami zmieniamy przekonania — uzyskujemy nową wiedzę, porzucamy jedno przekonania na rzecz innych, itp.

Rozważa się trzy operacje na systemach wiedzy:

- **ekspansję** — dołączenie nowego zdania do systemu;
- **kontrakcję** — odrzucenie pewnego zdania;
- **rewizję** — zastąpienie pewnego twierdzenia jego negacją.

Każda z tych operacji musi spełniać stosowne założenia. Podamy, dla przykładu, aksjomaty charakteryzujące **kontrakcję**.

Niech  $T - \alpha$  oznacza stan przekonań powstający z  $T$  w wyniku usunięcia zdania  $\alpha$ .

# Aksjomaty kontrakcji

Przypuśćmy, że stan naszych przekonań jest reprezentowany przez teorię  $T$ . Usunięcie  $\alpha$  z systemu przekonań  $T$  powoduje, że musimy z tego systemu przekonań usunąć również inne zdania (z których  $\alpha$  może wynikać). Aksjomaty kontrakcji mają zapewniać, że operacja ta ma pożądane własności logiczne:

- $T - \alpha$  jest teorią (jest domknięty na operację konsekwencji).
- $T - \alpha \subseteq T$ .
- Jeśli  $\alpha$  nie jest tautologią, to  $\alpha \notin T - \alpha$ .
- Jeśli  $\alpha \notin T$ , to  $T - \alpha = T$ .
- Jeśli  $\alpha \equiv \beta$  jest tautologią, to  $T - \alpha = T - \beta$ .
- $T$  jest najmniejszą teorią zawierającą  $(T - \alpha) \cup \{\alpha\}$ .

# Koniec

Dziękuję za zainteresowanie wykładami.

Żywię nadzieję, że okazały się przydatne.