Matematyczne podstawy kognitywistyki

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
pogon@amu.edu.pl

Całkowanie

- Jak widzieliśmy w poprzednim wykładzie, pochodna funkcji ma prostą interpretację geometryczną, związaną ze styczną do krzywej. Całka (oznaczona, w przedziale $[a, b]$) funkcji $f(x)$ także ma prostą interpretację geometryczną: jej wartość liczbowa równa jest polu powierzchni ograniczonej osią odciętych, krzywą $f(x)$ oraz prostymi o równaniach $x = a$ i $x = b$.
- Aby w poprawny i precyzyjny sposób mówić o *polach* figur ograniczonych dowolnymi krzywymi, trzeba dysponować pojęciem *miary*. Podobnie dla takich pojęć, jak: *długość* (dowolnej krzywej), *pole* (dowolnej powierzchni) oraz *objętość* (dowolnej bryły).
- W przypadku zbiorów skończonych *miara* związana może być bezpośrednio z *liczbą elementów* takich zbiorów.
- Inaczej rzecz ma się jednak z dowolnymi zbiorami, w tym ze zbiorami nieskończonymi. Wprowadzone zostaje nowe pojęcie: zbioru *mierzalnego* (w określonym sensie, np. w mierze borelowskiej lub w mierze Lebesgue'a).

Rodzina $\mathbb{B}$ podzbiorów zbioru X jest *σ-ciałem zbiorów* w X (lub: *σ-algebrą* w X), gdy:

- $\emptyset \in \mathbb{B}$.
- $\mathbb{B}$ jest domknięta na operację dopełnienia (w X): jeśli $A \in \mathbb{B}$, to $X - A \in \mathbb{B}$.
- $\mathbb{B}$ jest domknięta na przeliczalne sumy: jeśli $\{A_i : i \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{B}$, to $\bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathbb{B}$.

- Dla dowolnej rodziny $\mathbb{B}$ podzbiorów zbioru X istnieje najmniejsza (względem inkluzji) σ-algebra w X, do której należą wszystkie zbiory z rodziny $\mathbb{B}$: nazywamy ją *σ-algebrą podzbiorów X generowaną przez rodzinę* $\mathbb{B}$.
- Parę $(X, \mathbb{B})$ złożoną ze zbioru X oraz σ-algebry jego podzbiorów $\mathbb{B}$ nazywamy *przestrzenią mierzalną*.

Niech $(X, \mathbb{B})$ będzie przestrzenią mierzalną. Mówimy, że funkcja μ jest *miarą* w tej przestrzeni, gdy:

- Dziedziną funkcji μ jest rodzina $\mathbb{B}$.
- Funkcja μ przyjmuje wartości rzeczywiste nieujemne lub wartość ∞.
- $\mu(\emptyset) = 0$.
- Dla dowolnej rodziny $\{A_i : i \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{B}$ zbiorów parami rozłącznych (czyli takich, że $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$) zachodzi:

  $$\mu(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_i)$$

- *Przestrzenią z miarą* nazywamy dowolną trójkę uporządkowaną $(X, \mathbb{B}, \mu)$, gdzie $(X, \mathbb{B})$ jest przestrzenią mierzalną, a μ jest miarą w tej przestrzeni.
- *Zbiory borelowskie*. σ-algebra generowana przez rodzinę wszystkich przedziałów otwartych o końcach wymiernych zawartych w $\mathbb{R}$ jest rodziną wszystkich tzw. *borelowskich* podzbiorów $\mathbb{R}$.

- W przestrzeni mierzalnej $(\mathbb{R}, \mathbb{B}(\mathbb{R}))$ (gdzie $\mathbb{B}(\mathbb{R})$ jest rodziną zbiorów borelowskich w $\mathbb{R}$) można określić miarę μ na różne sposoby.
- Wyróżnionym sposobem jest przyjęcie, że $\mu((a, b]) = b - a$ (wtedy również $\mu((a, b)) = \mu([a, b]) = \mu([a, b)) = b - a$).
- Nazwijmy tę miarę *miarą borelowską*. Można tego typu miarę określić oczywiście również w dowolnej przestrzeni $(\mathbb{R}^n, \mathbb{B}(\mathbb{R}^n))$.

- Przykładem miary jest *funkcja prawdopodobieństwa*, określona na σ-algebrze *zdarzeń* danej przestrzeni zdarzeń elementarnych.
- Różne pojęcia całki (np. całka Riemanna, całka Lebesgue'a) także związane są z pojęciem miary.

- Niech funkcja f będzie określona w przedziale (a, b). *Funkcją pierwotną* funkcji f nazywamy każdą funkcję F określoną w przedziale (a, b) i różniczkowalną w każdym punkcie przedziału (a, b), która dla wszystkich $x \in (a, b)$ spełnia warunek: $F'(x) = f(x)$.
- Jeśli dla funkcji f istnieje jej funkcja pierwotna w (a, b), to mówimy, że f jest *całkowalna* w (a, b).
- Wprost z definicji wynika, że funkcja pierwotna funkcji f całkowalnej w (a, b) jest określona z dokładnością do stałej.

- *Całką nieoznaczoną* funkcji f nazywamy rodzinę wszystkich funkcji pierwotnych funkcji f. Powszechnie przyjętym oznaczeniem dla całki nieoznaczonej funkcji f jest $\int f(x)dx$. Tak więc, jeśli $F'(x) = f(x)$, to $\int F'(x)dx = F(x) + C$.
- Słuchacze zechcą traktować występujący tu symbol dx jako swoisty znak interpunkcyjny, wskazujący względem jakiej zmiennej odbywa się całkowanie.

Przykłady

Wprost ze znanych już wzorów na pochodne funkcji otrzymujemy wzory dotyczące niektórych całek nieoznaczonych (zwykle pomijamy, z lenistwa, stałą C):

- $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, dla $\alpha \neq -1$, $x > 0$ (jeśli $\alpha \in \mathbb{N}$, to wzór zachodzi dla $x \neq 0$)
- $\int \frac{dx}{x} = \ln |x|$, dla $x \neq 0$
- $\int e^x dx = e^x$
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}$, gdzie $a > 0$, $a \neq 1$
- $\int \sin x dx = -\cos x$
- $\int \cos x dx = \sin x$
- $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x$, dla $x \neq n \cdot \pi + \frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$
- $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x$, dla $x \neq n \cdot \pi$, $n \in \mathbb{Z}$

Działania arytmetyczne. Jeśli funkcje f i g są całkowalne w przedziale I (otwartym lub domkniętym), a $c \in \mathbb{R}$, to całkowalne w I są również funkcje $f+g$, $f-g$, $c \cdot f$ oraz zachodzą wzory:

- $\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
- $\int (f(x)-g(x))dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$
- $\int c \cdot f(x)dx = c \cdot \int f(x)dx$.

- *Całkowanie przez części*. Jeśli funkcje f i g mają ciągłe pochodne f' i g' w przedziale I (otwartym lub domkniętym), to:
  $\int f(x) \cdot g'(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)dx$
- *Całkowanie przez podstawienie*. Załóżmy, że f jest ciągła w przedziale (a, b), a g ma ciągłą pochodną w przedziale (c, d), przy czym $a < g(t) < b$ dla $t \in (c, d)$. Wtedy dla $t \in (c, d)$:
  $\int f(x)dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t)dt$

- Załóżmy, że g ma ciągłą pochodną w przedziale (a, b) oraz $g(t) \neq 0$ dla $t \in (a, b)$. Wtedy dla $t \in (a, b)$:
  $\int \frac{g'(t)}{g(t)} dt = \ln |g(t)|$.
- Zauważmy, że ten (użyteczny w zastosowaniach) wzór wynika z twierdzenia o całkowaniu przez podstawienie (wystarczy przyjąć $f(x) = \frac{1}{x}$ w założeniach metody całkowania przez podstawienie).
- Opracowano wiele dalszych metod obliczania całek nieoznaczonych, m.in.: wzory rekurencyjne, rozkład (funkcji wymiernych) na ułamki proste, wzory na obliczanie całek złożonych funkcji niewymiernych oraz trygonometrycznych, itd.

- Rozważmy całkę $\int x \cdot e^x dx$. Skorzystamy z metody całkowania przez części, przyjmując: $f(x) = x$ oraz $g(x) = e^x$. Ponieważ $(e^x)' = e^x$, więc:

$$\int x \cdot e^x dx = x \cdot e^x - \int (x)' \cdot e^x dx = x \cdot e^x - e^x = (x-1) \cdot e^x.$$

- Rozważmy całkę $\int 3^{4 \cdot x - 1} dx$. Dokonujemy podstawienia: $t = 4 \cdot x - 1$. Wtedy $x = \frac{t+1}{4} = g(t)$, czyli $g'(t) = \frac{1}{4}$. Korzystamy z wzoru na obliczanie całki przez podstawienie:

$$\int 3^{4 \cdot x - 1} dx = \int 3^t \cdot \frac{1}{4} dt = \frac{1}{4} \cdot \int 3^t dt = \frac{1}{4} \cdot \frac{3^t}{\ln 3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3^{4 \cdot x - 1}}{\ln 3}.$$

Rozważmy całkę $\int \frac{1}{\sin x} dx$ dla $x \neq n \cdot \pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Wykorzystajmy najpierw znane fakty trygonometryczne:

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{2 \cdot \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}} = \frac{1}{2 \cdot \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}} \cdot \frac{\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}.$$

Pamiętamy, że:

$$(\operatorname{tg} \frac{x}{2})' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}.$$

Otrzymujemy zatem:

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{(\operatorname{tg} \frac{x}{2})'}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} dx = \ln |\operatorname{tg} \frac{x}{2}|,$$

w każdym z przedziałów $(n \cdot \pi, (n+1) \cdot \pi)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Niech wykresem funkcji $f(x)$ w przedziale $[a, b]$ będzie prosta o równaniu $y = m \cdot x + n$. Wtedy obszar ograniczony odcinkiem $[a, b]$, krzywą $y = m \cdot x + n$ oraz prostymi o równaniach $x = a$ i $x = b$ jest trapezem. Pole tego obszaru dane jest zatem wzorem:

$$\frac{1}{2} \cdot (m \cdot (a + b) + 2 \cdot n) \cdot (b - a).$$

Jaki jest związek tego pola z całką nieoznaczoną $F(x) = \int (m \cdot x + n)dx$?
Po pierwsze: $F(x) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot x^2 + n \cdot x + C$, gdzie C jest stałą całkowania.
Po drugie:

1. $F(a) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot a^2 + n \cdot a + C$
2. $F(b) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot b^2 + n \cdot b + C$

Wreszcie, po trzecie: $F(b) - F(a) = \frac{1}{2} \cdot (m \cdot (a + b) + 2 \cdot n) \cdot (b - a)$, co wykazujemy prostym rachunkiem. Tak więc, rozważane pole jest równe różnicy wartości funkcji pierwotnej dla funkcji $f(x) = m \cdot x + n$, branych na końcach przedziału $[a, b]$.

Niech $f(x)$ będzie funkcją łamaną w przedziale $[a, b]$. Wtedy obszar ograniczony krzywą $f(x)$, odcinkiem $[a, b]$ oraz prostymi o równaniach $x = a$ i $x = b$ jest sumą trapezów. Jeśli bowiem punkty $x_i \in [a, b]$ są takie, że $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ oraz że funkcja $f(x)$ jest liniowa w każdym z przedziałów $[x_{i-1}, x_i]$, dla $0 < i \leqslant n$, to – na mocy obliczeń wykonanych w poprzednim punkcie – dla dowolnej funkcji $F(x)$ pierwotnej dla $f(x)$ pole tego obszaru jest równe:

$$\sum_{i=1}^{n}(F(x_i) - F(x_{i-1})) = F(x_n) - F(x_0) = F(b) - F(a).$$

A zatem również w tym przypadku rozważane pole jest równe różnicy wartości funkcji pierwotnej dla funkcji $f(x)$, branych na końcach przedziału $[a, b]$.

Te przykłady mogą służyć za punkt wyjścia do następującej definicji.

- Niech F będzie funkcją pierwotną dla funkcji f ciągłej w przedziale $[a, b]$. *Całką oznaczoną* z funkcji f w przedziale $[a, b]$ nazywamy liczbę:
  $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.
- Liczby a oraz b nazywamy wtedy, odpowiednio, *dolną* oraz górną granicą całkowania.
- Powszechnie używa się również skrótu: $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.
- Czy w przypadku *dowolnej* funkcji $f(x)$ określonej w przedziale $[a, b]$ pole obszaru ograniczonego odcinkiem $[a, b]$, krzywą $f(x)$ oraz prostymi o równaniach $x = a$ i $x = b$ równe jest $F(b) - F(a)$, gdzie F jest funkcją pierwotną dla funkcji f?
- Odpowiedzi na to pytanie dostarczają różne propozycje zdefiniowania wielkości $\int\limits_a^b f(x)dx$ tak, aby była ona równa $F(b) - F(a)$ oraz istotnie odpowiadała ona mierze rozważanego obszaru.

Zauważmy, że obszar pod dowolną krzywą $f(x)$ w przedziale $[a, b]$ może być przybliżany sumami obszarów prostokątnych na dwa sposoby:

- Możemy dzielić przedział $[a, b]$ (czyli dziedzinę funkcji), otrzymując prostokątne pionowe paski, których suma przybliża rozważany obszar. Ten pomysł prowadzi do *całki Riemanna*.
- Możemy dzielić przedział $[f(a), f(b)]$ (czyli przeciwdziedzinę funkcji), otrzymując inne prostokątne paski, których suma przybliża rozważany obszar. Ten pomysł prowadzi do *całki Lebesgue'a*.

- Miarę rozważanego obszaru chcemy obliczać (przybliżać) jako sumę miar jakichś prostszych jego obszarów składowych. Owe obszary składowe powinny być przy tym stosownie małe, aby suma ich miar była dowolnie bliska mierze całego rozważanego obszaru.
- Czujemy zatem, że za chwilę pojawi się jakieś przejście graniczne: miara całego obszaru będzie określana jako granica sum obszarów składowych.

Własności arytmetyczne. Załóżmy, że f i g są funkcjami ciągłymi w przedziale $[a, b]$. Wtedy:

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

$$\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx. \qquad |\int_a^b f(x)dx| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx.$$

Jeśli $f(x) \leqslant g(x)$ dla $x \in [a, b]$, to $\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx$.

Jeśli $f(x) \geqslant 0$ dla $x \in [a, b]$, to $\int_a^b f(x)dx \geqslant 0$.

Jeśli $0 < h \leqslant b - a$, to istnieje $t \in (0, 1)$ taka, że:

$\int_a^{a+h} f(x)dx = h \cdot f(a + t \cdot h)$. Zatem: $|\int_a^b f(x)dx| \leqslant (b - a) \cdot \max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x)|$.

Jeśli $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ dla $x \in [a, b]$, to $F'(x) = f(x)$ w $[a, b]$. Zatem: jeśli F ma ciągłą pochodną F' w $[a, b]$, to $\int_a^x F'(x)dx = F(x) - F(a)$.

- *Całkowanie przez części.* Załóżmy, że funkcje f i g mają ciągłe pochodne f' i g' w przedziale $[a, b]$. Wtedy:

$$\int\limits_a^b f(x) \cdot g'(x)dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int\limits_a^b f'(x) \cdot g(x)dx,$$

  gdzie $[f(x) \cdot g(x)]_a^b = f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(a)$.

- *Całkowanie przez podstawienie.* Załóżmy, że f jest ciągła w $[a, b]$ oraz że g ma ciągłą pochodną g' w $[c, d]$, przy czym $a \leqslant g(t) \leqslant b$ dla $t \in [c, d]$ oraz $g(c) = a$, $g(d) = b$. Wtedy:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_c^d f(g(t)) \cdot g'(t)dt.$$

- *Pierwsze twierdzenie o wartości średniej*. Załóżmy, że f i g są funkcjami ciągłymi w przedziale $[a, b]$ oraz że g ma stały znak w $[a, b]$. Istnieje wtedy liczba $t \in [a, b]$ taka, że:

$$\int\limits_a^b f(x) \cdot g(x) dx = f(t) \cdot \int\limits_a^b g(x) dx.$$

- *Drugie twierdzenie o wartości średniej*. Załóżmy, że f i g są funkcjami ciągłymi w przedziale $[a, b]$ oraz że g jest monotoniczna i ma ciągłą pochodną w $[a, b]$. Istnieje wtedy liczba $t \in [a, b]$ taka, że:

$$\int\limits_a^b f(x) \cdot g(x) dx = g(a) \cdot \int\limits_a^t f(x) dx + g(b) \cdot \int\limits_t^b f(x) dx.$$

Niech $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Każdy taki ciąg nazywamy *podziałem* odcinka $[a, b]$. Poszczególne przedziały $[x_i, x_{i+1}]$ $(0 \leqslant i < n)$ nazywamy wtedy *podprzedziałami* tego podziału. *Średnicą* takiego podziału nazywamy liczbę $\max\limits_{0 \leqslant i < n} (x_{i+1} - x_i)$. Średnicę podziału Π oznaczamy przez $\delta(\Pi)$. *Normalnym ciągiem podziałów* (odcinka $[a, b]$) nazywamy każdy taki ciąg Π_m podziałów tego odcinka, których średnica dąży do zera, czyli taki, iż: $\lim\limits_{m \to \infty} \delta(\Pi_m) = 0$.

Niech f będzie funkcją ograniczoną w przedziale $[a, b]$ i niech Π będzie podziałem tego przedziału, wyznaczonym przez punkty: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Ponadto, niech $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ dla wszystkich $1 \leqslant i \leqslant n$. Niech T będzie zbiorem wszystkich tych *punktów pośrednich* t_i. *Sumą Riemanna* funkcji f dla podziału Π przy wyborze punktów pośrednich w zbiorze T nazywamy liczbę:

$$R(\Pi) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i) \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

Słuchacze nie powinni mieć trudności z interpretacją geometryczną sum Riemanna.

Twierdzenie. *Załóżmy, że funkcja f jest ciągła w przedziale $[a,b]$. Wtedy:*

- *Dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że dla każdego podziału Π odcinka $[a,b]$: jeśli $\delta(\Pi) < \delta$, to $|R(\Pi) - \int\limits_a^b f(x)dx| < \varepsilon$.*
- *Dla każdego normalnego ciągu (Π_m) podziałów odcinka $[a,b]$ zachodzi równość: $\lim\limits_{m\to\infty} R(\Pi_m) = \int\limits_a^b f(x)dx$.*

Załóżmy, że f jest funkcją ograniczoną w przedziale $[a,b]$. Mówimy, że f jest funkcją *całkowalną w sensie Riemanna* w $[a,b]$, gdy dla każdego normalnego ciągu podziałów (Π_m) przedziału $[a,b]$ oraz przy dowolnym wyborze punktów pośrednich z podprzedziałów tego przedziału ciąg sum Riemanna $(R(\Pi_m))$ jest zbieżny. Granicę $\lim\limits_{m\to\infty} R(\Pi_m)$ nazywamy wtedy *całką Riemanna* z funkcji f w przedziale $[a,b]$ i oznaczamy przez $\int\limits_a^b f(x)dx$.

- Dla funkcji ciągłych całka Riemanna jest równa całce oznaczonej.
- Istnieją funkcje ograniczone nieciągłe (a nawet nie posiadające funkcji pierwotnej), które są całkowalne w sensie Riemanna. Taka jest np. funkcja f określona w przedziale $[0,1]$ następująco: $f(x) = 1$ dla $x \in [0, \frac{1}{2})$, $f(x) = 0$ dla $x \in [\frac{1}{2}, 1]$. Można wykazać, że dla każdego normalnego ciągu podziałów odcinka $[0,1]$ ciąg jego sum Riemanna jest zbieżny do $\frac{1}{2}$.
- Istnieją jednak także funkcje ograniczone, które nie są całkowalne w sensie Riemanna – taka jest np. funkcja Dirichleta (funkcja charakterystyczna zbioru liczb wymiernych).

- Całka Riemanna jest przyjaznym obiektem matematycznym, jeśli chodzi np. o jej walory dydaktyczne.
- Pewnych jej mankamentów teoretycznych (np. dotyczących przejść granicznych) można pozbyć się, przechodząc do ogólniejszego pojęcia całki.

Długość łuku krzywej. Jeżeli funkcja f ma ciągłą pochodną w przedziale $[a, b]$, to długość łuku krzywej L o równaniu $y = f(x)$, gdzie $x \in [a, b]$, wynosi: $|L| = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$.

Pole powierzchni figury płaskiej. Jeżeli funkcje f i g są ciągłe w przedziale $[a, b]$ i spełniają w nim warunek $g(x) \leqslant f(x)$, to pole obszaru P, ograniczonego krzywymi $y = f(x)$, $y = g(x)$ oraz prostymi $x = a$ i $x = b$, jest równe: $|P| = \int\limits_a^b (f(x) - g(x)) dx$.

Pole powierzchni bryły obrotowej. Jeżeli funkcja f ma ciągłą pochodną w przedziale $[a, b]$, to pole powierzchni bryły obrotowej S, powstałej przez obrót wokół osi odciętych wykresu funkcji $y = f(x)$, dla $x \in [a, b]$, wynosi:
$|S| = 2 \cdot \pi \cdot \int\limits_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$.

Objętość bryły obrotowej. Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale $[a, b]$, to objętość bryły obrotowej V powstałej przez obrót wokół osi odciętych wykresu funkcji $y = f(x)$, dla $x \in [a, b]$, wynosi: $|V| = \pi \cdot \int\limits_a^b f^2(x) dx$.

- *Droga w ruchu o zmiennej prędkości*. Jeśli punkt materialny porusza się ruchem prostoliniowym ze zmienną w czasie prędkością $v(t)$, to droga s przebyta przez ten punkt w przedziale czasowym $[t_1, t_2]$ wyraża się wzorem: $s = \int\limits_{t_1}^{t_2} v(t)dt$.
- *Praca*. Jeżeli równolegle do osi odciętych działa zmienna siła F, to praca wykonana przez tę siłę na drodze od punktu a do punktu b wyraża się wzorem: $W = \int\limits_{a}^{b} F(x)dx$.
- *Energia*. Jeżeli u oraz i oznaczają odpowiednio wartości chwilowe napięcia i natężenia prądu zmiennego, to całkowita energia pobrana w czasie t ze źródła tego prądu wynosi: $E = \int\limits_{0}^{t} u(t) \cdot i(t)dt$.

- W tekście wykładu *Całkowanie* znajdą słuchacze dalsze przykłady zastosowań: obliczanie środka masy oraz momentu bezwładności.

Zapas towaru. Załóżmy, że funkcja całkowalna $f(t)$ określa intensywność napływu towaru do magazynu w zależności od czasu $t \in [0, T]$. Wtedy wielkość zgromadzonego po upływie czasu T w magazynie towaru jest równa $\int\limits_0^T f(t)dt$. Wielkość zapasów zgromadzonych od chwili t_1 do chwili t_2 (gdzie $0 < t_1 < t_2 < T$) równa jest $\int\limits_{t_1}^{t_2} f(t)dt$. Wreszcie, średnia wielkość zapasów zgromadzonych w okresie od t_1 do t_2 jest równa: $\frac{1}{t_2 - t_1} \int\limits_{t_1}^{t_2} f(t)dt$.

Realny zysk. Zysk $z(t)$ otrzymany z eksploatacji jakiegoś urządzenia (np. gilotyny) obliczamy odejmując od dochodu $D(t)$ z eksploatacji koszty $K(t)$ utrzymania tego urządzenia: $z(t) = D(t) - K(t)$. *Przedziałem opłacalności urządzenia* nazywamy przedział czasowy $[0, T]$, gdzie T jest największą liczbą t, dla której $z(t) \geqslant 0$. Realny zysk uzyskany z eksploatacji urządzenia w czasie od t_1 do t_2 (gdzie $0 < t_1 < t_2 < T$) jest równy: $Z = \int\limits_{t_1}^{t_2} z(t)dt$.

Kapitał. Niech $K(t)$ oznacza zasób kapitału w chwili t. Wtedy $K'(t)$ oznacza prędkość wzrostu kapitału. Przyrost kapitału w chwili t jest równy wartości strumienia inwestycji netto $I(t)$ w chwili t. Tak więc: $K'(t) = I(t)$. Otrzymujemy zatem: $K(t) = \int I(t)dt$. Wielkość kapitału w przedziale czasowym $[t_1, t_2]$ równa jest: $\int\limits_{t_1}^{t_2} I(t)dt = K(t_2) - K(t_1)$.

Modele wzrostu. W makroekonomii proponuje się modele matematyczne, opisujące zależności między takimi czynnikami, jak np. dochód narodowy, konsumpcja, kapitał, produkcja, stan technologii, itd. To, na ile modele te trafnie oddają zależności ekonomiczne zależy m.in. od przyjmowanych założeń na temat gospodarowania. Jest dość oczywiste, że matematyczne aspekty takich rozważań uwzględniać muszą pojęcia związane z rachunkiem różniczkowym i całkowym (a także z, m.in.: rachunkiem wariacyjnym, teorią równań różniczkowych, algebrą liniową, programowaniem, itd.). Jeśli ktoś ze słuchaczy miałby ambicję zostania Ministrem Finansów (Premierem?), to musiałby to wszystko umieć.

Myśl przekornie!

- Czy całkowanie jest procesem algorytmicznym?
- Jak obliczamy pole powierzchni „zakrzywionej”?
- Jak obliczamy objętość bryły ograniczonej takim „zakrzywionymi” powierzchniami?
- Jak obliczamy długość krzywej na takiej „zakrzywionej” powierzchni?

- Rozważaliśmy całki oznaczone funkcji określonych w pewnym przedziale. Jak zdefiniować całkę oznaczoną funkcji w przedziale $[a, \infty)$ lub $(-\infty, \infty)$?
- Jak zdefiniować całkowanie funkcji wielu zmiennych?
- Jak zdefiniować całkowanie funkcji zmiennej zespolonej?

Co musisz ZZZ

- Całka nieoznaczona: definicja, całkowanie przez części i przez podstawienie.
- Całka oznaczona: definicja i interpretacja geometryczna.
- Całka Riemanna: definicja i interpretacja geometryczna.

Słuchacze będą mieli wielokrotnie do czynienia z pojęciami rachunku różniczkowego i całkowego w trakcie dalszych studiów kognitywnych.