JĘZYKOZNAWSTWO OGÓLNE

Kognitywistyka UAM, rok II

WYKŁAD 10: SEMANTYKA WYRAŻEŃ ZŁOŻONYCH

JERZY POGONOWSKI

ZAKŁAD LOGIKI I KOGNITYWISTYKI UAM

1 Uwagi wstępne

Znaczenia dla prostych składniowo jednostek językowych podawane były przez wyliczenie. Inaczej mówiąc, w tych przypadkach dysponujemy inwentarzami znaczeń, które możemy jakoś katalogować, umieścić w słownikach, a nawet – posiadając takie zdolności – nauczyć się ich wszystkich na pamięć. Odmiennie przedstawia się podejście lingwistów do znaczeń wyrażeń złożonych: zdań, ich relewantnych składniowo fragmentów oraz większych całości, zbudowanych ze zdań. W tych przypadkach marzy się o sformułowaniu stosownych reguł, które pozwalałyby otrzymywać znaczenia wyrażeń złożonych znając znaczenia ich wyrażeń składowych oraz sposób ich połączenia (ewentualnie inne jeszcze czynniki, np. kontekst).

Poniżej (bardzo skrótowo) przedstawimy dość tradycyjne podejście do tych zagadnień, wykorzystując materiał z części drugiej książki Grzegorczykowa 1990. W drugiej części wykładu podamy przykład analizy semantycznej wybranej kategorii lingwistycznej, a mianowicie *kwantyfikatorów*.

2 Struktura predykatowo-argumentowa

Według przywołanej wyżej pracy (Grzegorczykowa 1990, 91), na strukturę wypowiedzi składają się:

1. *Struktura logiczno-semantyczna.*
2. *Struktura funkcjonalna (tematyczno-rematyczna).*
3. *Treści pragmatyczne.*

Z kolei, struktura logiczno-semantyczna obejmuje:

1. *Predykaty modalne*: asercje, imperatywy, interrogatywy, ekspresywy.
2. *Nadawcę oraz odbiorcę*.
3. *Składnik propozycjonalny*.

Wreszcie, składnik propozycjonalny zawiera:

1. *Predykaty wyższego rzędu i operatory logiczne*.
2. *Strukturę predykatowo-argumentową*, na którą składają się:
   (a) *Predykaty złożone ze składników*.
   (b) *Argumenty wraz z charakterystyką referencjalną*.

Ta hierarchia oddaje ogólną strukturę wypowiedzi, pozwalającą na ustalanie jej znaczenia. Mogą dochodzić jeszcze pewne inne czynniki (np. presupozycje). Jak pisze autorka (Grzegorczykowa 1990, 92):

> Ukazany wyżej schemat zdaje sprawę z zawartości semantycznej całej wypowiedzi rozumianej jako konkretny akt mowy (wraz ze znaczeniami pragmatycznymi, wtórnymi intencjami nadawcy, znaczeniami wynikającymi ze struktury tematyczno-rematycznej). Opis ściśle semantyczny obejmuje tylko część tych informacji, mianowicie informacje przekazywane przez strukturę logiczno-semantyczną i tematyczno-rematyczną.

Relacja predykacji polega na przypisaniu własności (stanu) określonemu obiektowi lub obiektom. Takim obiektem może być również zdarzenie, o którym orzekamy, iż ma określone właściwości.

Proponujemy słuchaczom myślenie o strukturze predykatowo-argumentowej takie, jakie przyjęte jest w odniesieniu do języka logiki predykatów. Jak pamiętamy, *formułą atomową* w takich językach jest konstrukcja o postaci

$$P(t_1, t_2, \ldots, t_n),$$

gdzie P jest predykatem n-argumentowym, zaś $t_1, t_2, \ldots, t_n$ są termami. W języku logiki predykatów rozważamy predykaty o dowolnej liczbie argumentów, natomiast w przypadku języków etnicznych w użyciu są najczęściej jedynie predykaty o liczbie argumentów co najwyżej cztery.

Pozwolimy sobie dodać kilka uwag dotyczących możliwości wykorzystania (dobrze określonej) semantyki języka logiki predykatów w analizach semantycznych języków etnicznych.

1. Języki etniczne są uniwersalnymi systemami semiotycznymi, natomiast język logiki predykatów ma precyzyjnie określoną składnię oraz semantykę: można w nim „mówić” jedynie o tym, co przez ową składnię i semantykę jest wyznaczone.

2. W opisie znaczenia wyrażeń złożonych języków etnicznych istotną rolę odgrywają czynniki natury pragmatycznej.

3. W językach etnicznych nie ma formalnego odróżnienia między językiem przedmiotowym a metajęzykiem.

4. W językach etnicznych naturalne jest zjawisko *elipsy*: argumenty predykatów mogą mieć charakter fakultatywny, co powoduje, iż kategorialny opis takich predykatów bywa bardzo skomplikowany.

5. Wiele wyrażeń języków etnicznych to wyrażenia *nieostre*, których denotacje są zbiorami (w jakimś, pozostającym do uściślenia, sensie) „rozmytymi”. Wbrew niektórym potocznym opiniom, zjawisko nieostrości jest bardzo pomocne w komunikacji językowej.

6. Pojęcie *prawdy* jest dobrze określone dla języków logiki formalnej (oraz teorii matematycznych). Merytorycznie trafna i poprawna formalnie definicja prawdy dla wyrażeń (zdań) języków etnicznych napotyka na poważne trudności, jak wiadomo z klasycznych wyników Alfreda Tarskiego, dotyczących tej problematyki.

7. W sztucznych językach logiki pojęcie *stałej logicznej* może zostać poprawnie scharakteryzowane. Co mogłoby odpowiadać temu pojęciu w przypadku języków etnicznych? Czy możemy sensownie mówić o *stałych lingwistycznych*? W drugiej części wykładu podamy kilka uwag i refleksji na ten temat.

8. Z kursu logiki słuchacze mogą znać twierdzenia o *niewyróżnianiu stałych indywidualnych, symboli funkcyjnych oraz predykatów*. Głoszą one, w uproszczeniu, że poza stałymi logicznymi (z włączeniem predykatu identyczności) wszystkie inne rozważane w języku logiki predykatów symbole (stałe indywidualne, symbole funkcyjne, predykaty) są nieodróżnialne ze względu na to, co można o nich (w danym systemie logiki) udowodnić. Nie ma dokładnego odpowiednika tych twierdzeń dla wyrażeń języków etnicznych, z kilku powodów. Może najbliższe takim twierdzeniom jest założenie o konwencjonalnym charakterze symboli językowych.

9. Zwróćmy jednak uwagę, że pewne typy informacji pełnią rolę wyróżnioną w wypowiedziach złożonych. Są to m.in. informacje dotyczące: modalności, charakterystyki temporalnej i lokatywnej (zdarzeń, o których mowa w wypowiedzi).

3 Rozkład semantyczny predykatów

W zasadzie możliwe są dwa podejścia do charakterystyki zasobu predykatów języków etnicznych:

1. Uznać, że wszystkie predykaty są niejako pierwotne, całkowicie odrębne. Wtedy nie staramy się redukować jednych predykatów do ewentualnych kombinacji innych predykatów.

2. Uznać, że niektóre predykaty możemy poddawać analizie i dokonywać ich rozkłady na predykaty prostsze. Wtedy staramy się znaleźć zestaw takich najprostszych predykatów, których połączenia dawałyby wszystkie predykaty obecne w języku. Ponadto, zestaw taki miałby być wystarczający dla odróżnienia poszczególnych predykatów złożonych oraz – taką fantazję również możemy wyrażać – zestaw ów byłby minimalnym zestawem najprostszych predykatów.

Wspominaliśmy już o *atomach znaczenia* na wykładzie poświęconym semantyce leksykalnej. Powody poszukiwania atomów znaczenia są dość oczywiste: miałyby one dostarczać maksymalnie ekonomicznego, spójnego opisu inwentarza znaczeń. Wspominaliśmy też o trudnościach w realizacji tego zadania. Mimo wszystko, próby takie były wielokrotnie podejmowane i nadal są kontynuowane, przy różnych założeniach teoretycznych (np.: koncepcje Katza i Fodora, Bierwischa, Mielczuka, Apresjana, Wierzbickiej, Bogusławskiego). Choć całość inwentarza znaczeń może pozostawać poza zasięgiem takiego opisu, to interesujące są np. próby znalezienia atomów znaczenia, przydatnych w charakterystyce wybranych pól semantycznych (np.: stosunki pokrewieństwa, czasowniki ruchu, itd.).

W pracy Grzegorczykowa 1990 na stronach 116–118 znajdujemy propozycję typologii predykatów (języka polskiego), odwołującą się do wybranych cech semantycznych tych predykatów. Pierwszy podział to:

1. *Predykaty statyczne*. Wskazują bądź na pewne własności przedmiotów bądź na relacje zachodzące między przedmiotami, a więc mogą być jednoargumentowe (*jest wredny*) lub wieloargumentowe (*jest podobny*).

2. *Predykaty dynamiczne*. Nazywają sytuacje działania się, które mają określone granice czasowe.

Predykaty dynamiczne dzieli się dalej na:

1. *Procesy*. Nazywają sytuacje, gdy coś dzieje się bez zmiany. Mogą to być procesy nieakcyjne (niezamierzone), jak np. *spać*, *kwitnąć*, lub akcyjne (świadome czynności), jak np. *biegać*, *śpiewać*.

2. *Zdarzenia*. Nazywają sytuacje, gdy coś dzieje się ze zmianą. Podobnie jak w poprzednim przypadku, mogą to być zdarzenia nieakcyjne (niezamierzone), jak np. *zachorować*, *upaść*, lub akcyjne (zamierzone czynności), jak np. *położyć*, *usiąść*.

4 Referencja i kwantyfikacja

W języku polskim kategoria określoności nie jest wyrażana w sposób gramatyczny, inaczej niż np. w angielskim czy rumuńskim. Możemy jednak oczywiście w języku polskim określić czy mowa jest o jednym obiekcie czy też ich wielości, czy jest to obiekt nowy, dotąd nie wspomniany czy też obiekt znany w kontekście wypowiedzi.

Możemy kwantyfikować nie tylko obiekty, ale również precyzować, przez stosowną kwantyfikację, określenia czasu, miejsca, sposobu.

Negacja w połączeniu z kwantyfikacją może czasem sprawiać kłopoty, czego niewątpliwie świadomi są studenci, poddawani okrutnym ćwiczeniom z logiki na pierwszym roku studiów.

Zjawisko *anafory* polega na odsyłaniu przez pewne wyrażenia językowe (zaimki) do innych wyrażeń, użytych wcześniej w wypowiedzi.

5 Modalność

We wstępnych zdaniach rozdziału IV pracy Grzegorczykowa 1990 autorka pisze (strona 134):

> Każde użyte zdanie to wypowiedź mająca swego nadawcę i skierowana prawie zawsze do kogoś, jakiegoś odbiorcy (wyjątek stanowią czyste ekspresje, o czym dalej). Zawsze więc wyrażona jest w wypowiedzi jakaś postawa nadawcy wobec treści komunikowanej, a także

często wobec odbiorcy. Owa postawa nadawcy wobec komunikowanego zjawiska, wyróżnionego przez strukturę predykatowo-argumentową (proposition), ujmująca je jako rzeczywiste, nierzeczywiste, możliwe, pożądane itp. nazywana jest najogólniej modalnością.

O modalnościach w lingwistyce pisze się nieco inaczej niż o modalnościach, traktowanych jako obiekt zainteresowania logiki. Zacytujmy jeszcze jeden fragment z pracy Grzegorczykowa 1990 (strona 138), odnoszący się do typów modalności wyróżnianych przez lingwistów:

> Podstawowe odróżnienie oddziela modalność rozumianą jako informacja o intencji, z jaką nadawca tworzy wypowiedź, zawartą w sposób konieczny w każdym zdaniu, od bardziej szczegółowych informacji o postawie poznawczej (epistemicznej) i wolitywnej (deontycznej) nadawcy, która pojawia się, i to nieobligatoryjnie, w jednym typie intencjonalnym wypowiedzi, mianowicie w tzw. zdaniach deklaratywnych. Ten pierwszy typ językoznawcy nazywają na ogół modalnością *intencjonalną*, czasem zdaniową [...], pozostałe określa się jako modalność prawdziwościową, *epistemiczną* [...], oraz wolitywną, *deontyczną* [...]

Jak pisze autorka na stronie 138, główne typy modalności intencjonalnej to:

1. *Declarativa*: zdania o intencji powiadomień.
2. *Imperativa*: zdania o intencji skłonienia odbiorcy do spowodowania pożądanego stanu rzeczy.
3. *Interrogativa*: zdania o intencji uzyskania odpowiedzi odbiorcy.
4. *Expressiva*: zdania wyrażające stan mentalny (intelektualny, wolitywny, emocjonalny) nadawcy.

W zakresie zdań o modalności deklaratywnej wyróżniamy:

1. *Konstatacje*. Ewa zdała egzamin.
2. *Hipotezy*. Podobno Ewa zdała egzamin.
3. *Postulaty*. Ewa powinna zdać egzamin.

Dodajmy jeszcze, że expressiva obejmują:

1. *Ekspresje woli*. Niechbym zdała ten egzamin!
2. *Ekspresje uczuć*. Jakie piękne pytania egzaminacyjne!
3. *Ekspresje sądów*. Zdałam ten egzamin!

Modalności zwane w lingwistyce epistemicznymi oraz deontycznymi powiązane są z kategorią gramatyczną trybu, omawianą w jednym z wcześniejszych wykładów. Różnica polega tu na tym, że informacja trybu oddawana jest za pomocą gramatycznych środków wyrażania, natomiast wspomniane modalności mają wykładniki leksykalne.

W filozofii tradycyjnie dokonuje się odróżnienia:

1. Modalność *de re*. Odnosi się do przysługiwania przedmiotom cech. *Tyran jest bezwzględny*.
2. Modalność *de dicto*. Odnosi się do stanów rzeczy (np. w stwierdzeniach, że są konieczne, możliwe, itd.). *Przejście od demokracji do tyranii jest możliwe*.

Główne typy modalności z punktu widzenia logiki to:

1. *Aletyczna*. Dotyczy *konieczności* oraz *możliwości*, a także ich zaprzeczeń: *niekonieczności* oraz *niemożliwości*.
2. *Doksastyczna*. Dotyczy żywionych przekonań. W stosunku do zachodzenia jakiegoś stanu rzeczy możemy np.: *być przekonanym*, *wątpić*, *mniemać*, *głęboko wierzyć*, *podejrzewać*, *sądzić*, itp. Żywienie przekonań jest stopniowalne.
3. *Epistemiczna*. Ten typ modalności dotyczy naszej *wiedzy* (oraz, rzecz jasna, *niewiedzy*). Wedle dość tradycyjnego ujęcia, wiedza to uzasadnione prawdziwe przekonanie.
4. *Deontyczna*. Jest to modalność dotycząca *powinności*, czyli tego, co jest: *nakazane*, *zakazane*, *dozwolone*, *niedozwolone*.

Logika współczesna dość dobrze radzi sobie z opisem modalności wspomnianych wyżej typów. Studenci kognitywistyki UAM mają możliwość usłyszenia o tym na kilku kursach logiki. Poznaje się na nich nie tylko najprostsze fakty dotyczące tych modalności (jak np. różne *kwadraty logiczne*), ale także współczesną teorię dowodu dla logik modalnych oraz różne wersje proponowanych dla nich semantyk.

6 Charakterystyka temporalna

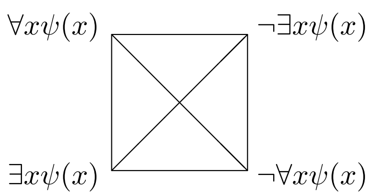
W rozważaniach semantycznych zastanawiamy się również nad postrzeganiem oraz językowym wyrażaniem relacji temporalnych. Jak pamiętamy z wykładu dotyczącego kategorii gramatycznych w językach świata, języki etniczne na przeróżne sposoby kategoryzują zależności czasowe. Przypominamy, że relacjonowane zdarzenia mogą być sytuowane w odniesieniu do czasu samej wypowiedzi (czas absolutny), bądź w odniesieniu do innego momentu (czas względny). Informacje temporalne wprowadzane być mogą także przez użycie określników adverbialnych (przysłówków).

7 Wesoła dygresja: semantyka uogólnionych kwantyfikatorów

Dla uciechy podamy garść informacji dotyczących badanych z różną intensywnością w ostatnim półwieczu tzw. *uogólnionych kwantyfikatorów*. Materiał ten bazuje m.in. na naszych wykładach z *Semiotyki logicznej*. Korzystamy również z fragmentów rozprawy magisterskiej Pani Joanny Smigerskiej, napisanej kilka lat temu pod opieką piszącego te słowa.

Słuchacze znają – z elementarnego kursu logiki – dwa kwantyfikatory: generalny (ogólny) $\forall$ oraz egzystencjalny (szczegółowy) $\exists$, odnoszące się, odpowiednio, do *wszystkich* bądź *pewnych* elementów uniwersum. W językach etnicznych występuje wiele innych jeszcze – oprócz powyższych dwóch – zwrotów kwantyfikujących. Nie chodzi przy tym jedynie o kwantyfikacje, które możemy wyrazić przez $\forall$ oraz $\exists$, ale przede wszystkim o te sposoby kwantyfikacji, które wykraczają poza logikę pierwszego rzędu FOL.

Ten diagram (i zawarte w nim związki logiczne) znamy wszyscy z elementarnego kursu logiki:



W dalszym ciągu, będziemy mówić o występujących tu kwantyfikatorach jako o kwantyfikatorach z *tradycyjnego kwadratu logicznego* (TKL). Pamiętamy również figury sylogistyki Arystotelesa:

$$\begin{array}{cccc}
Q_1ZY & Q_1YZ & Q_1ZY & Q_1YZ \\
\underline{Q_2XZ} & \underline{Q_2XZ} & \underline{Q_2ZX} & \underline{Q_2ZX} \\
Q_3XY & Q_3XY & Q_3XY & Q_3XY
\end{array}$$

Każdy z Q_i $(1 \leq i \leq 4)$ może być jednym z kwantyfikatorów z TKL. Możliwych trybów jest 256, trybów poprawnych (takich, w których wniosek wynika logicznie z przesłanek) jest 24. Jest też wiele *sylogistyk niestandardowych* (z dodatkowymi spójkami, negacją przynazwową, itd.)

Kwantyfikatory $\forall$ oraz $\exists$ pojawiają się już w pracach Charlesa Peirce'a oraz Gottloba Fregego. W wieku XIX mamy pierwsze algebraiczne interpretacje kwantyfikatorów. Dyskutuje się też możliwość „kwantyfikacji orzecznika" (Hamilton). Stanisław Leśniewski stosuje kwantyfikację po zmiennych zdaniowych. Alfred Tarski pokazuje, jak z pomocą kwantyfikatora ogólnego oraz negacji zdefiniować pozostałe stałe logiczne. Roman Suszko przypisuje kwantyfikatorom kategorie syntaktyczne (w sensie Ajdukiewicza). Andrzej Mostowski wprowadza pierwsze kwantyfikatory uogólnione, Per Lindström przedstawia je w nieco ogólniejszej postaci, Leon Henkin rozważa pierwsze kwantyfikatory rozgałęzione. Współcześnie uogólnionymi kwantyfikatorami zajmowało się wielu logików, np.: Richard Montague, Jon Barwise, Jerome H. Keisler, Johan van Benthem, Dag Westerståhl, Michał Krynicki, Marcin Mostowski i in.

7.1 Kwantyfikatory Mostowskiego

Za pierwszą pracę dotyczącą kwantyfikatorów uogólnionych uważamy artykuł Andrzeja Mostowskiego z 1957 roku: *On generalization of quantifiers*. *Fundamenta Mathematicae* **44**, 12–36. Mostowski wprowadza kwantyfikatory *ilościowe*. *Kwantyfikator* (lokalny) *na* M jest zbiorem podzbiorów M. *Kwantyfikator* (globalny) jest funktorem $\boldsymbol{Q}$ przypisującym każdemu niepustemu zbiorowi M kwantyfikator $\boldsymbol{Q}_M$ na M. Przykładami takich kwantyfikatorów są (tu i dalej $|X|$ oznacza moc zbioru X):

$$\forall_M = \{M\},$$

$$\exists_M = \{X \subseteq M : X \neq \emptyset\},$$

$$(\exists_{\geq n})_M = \{X \subseteq M : |X| \geq n\},$$

$$(\boldsymbol{Q}_\alpha)_M = \{X \subseteq M : |X| \geq \aleph_\alpha\},$$

$$(\boldsymbol{Q}_R)_M = \{X \subseteq M : |X| > |M - X|\}, \quad \text{(kwantyfikator Reschera)},$$

$$(\boldsymbol{Q}_C)_M = \{X \subseteq M : |X| = |M|\}, \quad \text{(kwantyfikator Changa)}.$$

Kwantyfikatory dotyczą tylko *liczby* elementów, a zatem nie powinny rozróżniać elementów w M, co zapisujemy w postaci następującego warunku, sformułowanego już przez Andrzeja Mostowskiego:

ISOM *Jeżeli f jest bijekcją z M do M', to*
$X \in \boldsymbol{Q}_M \equiv f[X] \in \boldsymbol{Q}_{M'}$.

Ten warunek przyjmowany jest we wszystkich późniejszych pracach dotyczących uogólnionych kwantyfikatorów.

7.2 Kwantyfikatory Lindströma

Pojęcie uogólnionego kwantyfikatora wprowadzone przez Mostowskiego nie obejmowało takich kwantyfikatorów jak np. binarny kwantyfikator większości **most** w zdaniach typu:

Most φ are ψ

wyznaczający na każdym uniwersum M binarną relację pomiędzy podzbiorami uniwersum M:

$$\mathbf{most}_M = \{(X, Y) : X \subseteq M \wedge Y \subseteq M \wedge |X \cap Y| >| X - Y |\}.$$

Per Lindström wprowadził zdefiniowane niżej pojęcie *kwantyfikatora uogólnionego* związanego z typem (tj. ciągiem $\langle k_1, \dots , k_n \rangle$ liczb naturalnych. W myśl tej definicji, kwantyfikatory Mostowskiego posiadają typ $\langle 1 \rangle$, powyższy kwantyfikator **most** typ $\langle 1, 1 \rangle$).

(Lokalnym) *kwantyfikatorem uogólnionym na M typu* $\langle k_1, k_2, \dots, k_n \rangle$ nazywamy dowolną n-argumentową relację pomiędzy podzbiorami zbiorów M^{k_1}, M^{k_2}, $\dots$, M^{k_n}. (Globalnym) *kwantyfikatorem uogólnionym typu* $\langle k_1, \dots, k_n \rangle$ jest funktor $\boldsymbol{Q}$, który każdemu zbiorowi M przyporządkowuje kwantyfikator lokalny $\boldsymbol{Q}_M$ typu $\langle k_1, \dots, k_n \rangle$. Tak więc, każdy kwantyfikator Mostowskiego to rodzina podzbiorów uniwersum. Powyższy kwantyfikator **most** to rodzina par podzbiorów uniwersum.

W większości przypadków będziemy dalej mówili o tzw. kwantyfikatorach uogólnionych *monadycznych*, czyli typu $\langle 1, 1, \dots, 1 \rangle$. Można również mówić o monadycznych kwantyfikatorach *unarnych*, *binarnych*, itd., co oznacza kwantyfikatory uogólnione typu, odpowiednio, $\langle 1 \rangle$, $\langle 1, 1 \rangle$ itd. Większość dalszych przykładów będzie dotyczyła *binarnych kwantyfikatorów monadycznych*, czyli kwantyfikatorów typu $\langle 1, 1 \rangle$ – odpowiadają one dość naturalnym konstrukcjom w językach etnicznych. Z semantycznego punktu widzenia, kwantyfikatory takie są relacjami między podzbiorami uniwersum.

W pracach logicznych rozważa się czasami o wiele bardziej złożone kwantyfikatory. Mogą one wiązać nie tylko jedną zmienną i być dołączane do jednej formuły, ale mogą wiązać ciąg zmiennych oraz być dołączane do ciągu formuł.

Rozważane dalej przykłady ilustrowane będą konstrukcjami z języka angielskiego, z dwóch m.in. powodów: po pierwsze, większość literatury przedmiotu odnosi się do takich właśnie przykładów, a po drugie, wskazuje się na pewne związki kwantyfikacji z gramatyczną kategorią określoności.

Oto kilka przykładów kwantyfikatorów Lindströma:

$$\mathbf{all}_M = \{(X,Y) : X \subseteq M \wedge Y \subseteq M \wedge X \subseteq Y\},$$

$$\mathbf{some}_M = \{(X,Y) : X \subseteq M \wedge Y \subseteq M \wedge X \cap Y \neq \emptyset\},$$

$$\mathbf{more}_M = \{(X,Y) : X \subseteq M \wedge Y \subseteq M \wedge |X| > |Y|\},$$

$$\mathbf{I}_M = \{(X,Y) : X \subseteq M \wedge Y \subseteq M \wedge |X| = |Y|\}, \quad \text{(kwantyfikator Härtiga).}$$

7.3 Kwantyfikatory rozgałęzione

Pamiętamy, że przy tworzeniu prefiksowej postaci normalnej formuły języka rachunku predykatów wszystkie kwantyfikatory poprzedzają matrycę formuły. Przy skolemizacji takiej formuły eliminujemy kwantyfikatory egzystencjalne, wprowadzając nowe symbole funkcyjne (dla funkcji Skolema). Symbol funkcyjny f wprowadzony przez eliminację kwantyfikatora egzystencjalnego $\exists$ z prefiksu kwantyfikatorowego $Q_1 Q_2 \ldots Q_n$ ma tyle argumentów, ile kwantyfikatorów ogólnych poprzedza ów eliminowany kwantyfikator $\exists$ w prefiksie $Q_1 Q_2 \ldots Q_n$. Powstaje problem, czy ta procedura dobrze opisuje sytuacje, w których dokonujemy *wyborów niezależnych*. Henkin wprowadził uogólnienie tej procedury, dopuszczając prefiksy częściowo uporządkowane lub inaczej prefiksy rozgałęzione, za pomocą których można wyrazić zależności, których nie można przedstawić w sposób liniowy. Kwantyfikator Henkina ma postać następującą:

$$\left.\begin{array}{l} \forall x \text{——} \exists y \\ \forall u \text{——} \exists v \end{array}\right> \phi(x,y,u,v)$$

Częściowy porządek prefiksu ma oddawać sytuację, gdy dokonujemy wyborów niezależnych. Semantykę dla tego kwantyfikatora ustala się następująco:

Kwantyfikator Henkina to kwantyfikator typu $\langle 4 \rangle$ taki, że:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H} \quad = \quad & \{R \subseteq M^4 : \textit{istnieją funkcje } f, g \textit{ na } M \textit{ takie,że} \\ & \textit{dla dowolnych } a, b \in M \quad (a, f(a), b, g(b)) \in R\}. \end{aligned}$$

Język z kwantyfikatorem Henkina ma moc wyrażania istotnie większą niż język klasycznego rachunku predykatów. Można pokazać, że kwantyfikator Q_0 Mostowskiego ($Q_0 x \ \varphi(x)$ interpretujemy: istnieje nieskończenie wiele x takich, że $\varphi(x)$) jest definiowalny przez kwantyfikator Henkina.

Jaakko Hintikka podał przykład, pokazujący, że w językach etnicznych posługujemy się tego typu kwantyfikacją: *Some relative of each villager and some relative of each townsman hate each other*, co po polsku oddać możemy następująco: *Każdy wieśniak ma takiego krewniaka, który nienawidzi pewnego krewniaka dowolnie wybranego mieszczucha*.

7.4 Przyjmowane założenia

Aby podać trafny formalny opis uogólnionych kwantyfikatorów typu $\langle 1, 1\rangle$ przyjmuje się o nich pewne założenia.

Warunek izomorfizmu:

ISOM *Jeżeli f jest bijekcją z M do M', to* $\boldsymbol{Q}_M AB \equiv \boldsymbol{Q}_{M'} f[A]f[B]$.

Ten warunek stanowi o tym, że kwantyfikatory odnoszą się do *ilości*, a nie do *jakości* elementów uniwersum. Współcześnie używa się także *QUANT* na oznaczenie tego warunku.

Warunek zachowawczości:

CONSERV Dla wszystkich M oraz wszystkich $A, B \subseteq M$, $\boldsymbol{Q}_M AB \equiv \boldsymbol{Q}_M A\ A \cap B$.

Warunek ten nawiązuje do tradycyjnego rozumienia kwantyfikacji (podmiotu) w zdaniach podmiotowo-orzecznikowych (przypomnijmy sobie warunki prawdziwości dla zdań kategorycznych, sformułowane w terminach diagramów Venna).

Warunek rozszerzenia:

EXT *Jeżeli $A_1, A_2 \subseteq M \subseteq M'$, to* $\boldsymbol{Q}_M A_1 A_2 \equiv \boldsymbol{Q}_{M'} A_1 A_2$.

Ten warunek głosi, że znaczenie (denotacja) kwantyfikatora nie zmienia się, gdy rozszerzamy uniwersum.

Kwantyfikator n-argumentowy ($n \geq 1$) nazywamy *logicznym* jeżeli spełnia *CONSERV*, *EXT*, *QUANT*. W przypadku kwantyfikatorów binarnych własność ta daje się wyrazić poprzez zależności między liczbami: $|A - B|$ oraz $|A \cap B|$. Zachodzi bowiem następujące:

TWIERDZENIE. Binarny kwantyfikator $\boldsymbol{Q}$ jest *logiczny* wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich M, M' oraz wszystkich $A, B \subseteq M$ i $A', B' \subseteq M'$:
$|A - B| = |A' - B'|$ oraz $|A \cap B| = |A' \cap B'|$ implikuje
$\boldsymbol{Q}_M AB \equiv \boldsymbol{Q}_{M'} A'B'$.

Na mocy tego twierdzenia binarne relacje między *zbiorami* mogą być zastąpione binarnymi relacjami pomiędzy *liczbami kardynalnymi*. Pozwoli to później na numeryczne charakterystyki kwantyfikatorów.

Negację (zewnętrzną) kwantyfikatora definiujemy w sposób oczywisty:

$$\mathbf{not}\ \boldsymbol{Q}_M AB \equiv \neg \boldsymbol{Q}_M AB,$$

Zauważmy, że np.:

$$\begin{aligned} \neg \mathbf{most}_M AB &\equiv |A \cap B| \leq |A - B| \\ &\equiv |A \cap B| \leq \frac{1}{2}|A| \text{(na zbiorach skończonych)} \\ &\equiv \mathbf{not\ more\ than\ half\ (of\ the)}_M AB. \end{aligned}$$

Negację (wewnętrzną) kwantyfikatora definiujemy w sposób następujący:

$$(\mathbf{Q}\neg)_M A\ B \equiv \boldsymbol{Q}_M A\ M - B.$$

Kwantyfikatorem *dualnym* $\breve{\boldsymbol{Q}}$ do $\boldsymbol{Q}$ jest kwantyfikator $\neg(\boldsymbol{Q}\neg)$, (co jest tym samym, co kwantyfikator $(\neg\boldsymbol{Q})\neg$).

Negacje zewnętrzna oraz wewnętrzna korespondują odpowiednio z negacją zdania oraz negacją frazy orzecznikowej.

W poniższej tabeli podane są przykłady kwantyfikatorów języka angielskiego, dla których można znaleźć negacje oraz kwantyfikatory dualne. Znak „–” oznacza, iż trudno znaleźć negację kwantyfikatora bądź kwantyfikator dualny do danego.

Powiemy, że n-argumentowy kwantyfikator jest *trywialny na* M, jeżeli $\boldsymbol{Q}_M$ jest relacją pustą lub pełną. Rozważamy następujący warunek:

NONTRIV $\quad$ $\boldsymbol{Q}$ *nie jest trywialny na pewnych uniwersach.*

Wzmocnioną wersją *NONTRIV* jest *activity*:

ACT $\quad$ $\boldsymbol{Q}$ *jest nietrywialny na każdym universum.*

Wiele kwantyfikatorów języka naturalnego spełnia *ACT*, chociaż nawet pośród prostych kwantyfikatorów istnieją wyjątki, np.: **both, two, three**, itp. (Jeżeli w M jest

Tablica 1:

$\boldsymbol{Q}$	$\neg\boldsymbol{Q}$	$\boldsymbol{Q}\neg$	$\breve{\boldsymbol{Q}}$
some	*no*	*not every*	*every*
every	*not every*	*no*	*some*
no	*some*	*every*	*not every*
most	*at most half*	*less than half*	*at least half*
many	*few*	-	*all but a few*
infinitely many	*at most finitely many*	-	*all but finitely many*
(at least) n	*less than n*	-	*all but less than n*
at most n	*more than n*	*all but at most n*	-
(exactly) n	*not exactly n*	*all but n*	-
more...than...	*at most as many...as...*	-	-
fewer...than...	*at least as many...as...*	-	-

mniej niż cztery elementy, to $\mathbf{four}_M AB$ jest zawsze fałszywe). Johan van Benthem podaje jeszcze mocniejszą wersję *ACT* dla binarnych kwantyfikatorów, *variety*, zaś Westerståhl uogólnia ją do $(n+1)$-argumentowych kwantyfikatorów:

VAR *Dla każdego M oraz wszystkich $A_1, \ldots, A_n \subseteq M$, takich, że $A_1 \cap \ldots \cap A_n \neq \emptyset$, istnieją B_1, B_2, takie, że $\boldsymbol{Q}_M A_1 \ldots A_n B_1$ oraz $\neg\boldsymbol{Q}_M A_1 \ldots A_n B_2$.*

Zachodzą następujące implikacje:

$$VAR \Longrightarrow ACT \Longrightarrow NONTRIV,$$

jednak odwrotne implikacje nie są prawdziwe. Przykładem kwantyfikatora, który spełnia *ACT* zaś narusza *VAR* jest $\boldsymbol{Q}_M AB \equiv |A| = 1$.

7.5 Monotoniczność

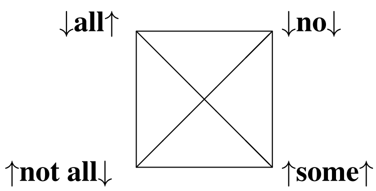
Mówimy, że binarny kwantyfikator $\boldsymbol{Q}$ jest:

MON↑, gdy zachodzi implikacja $\boldsymbol{Q}_M AB \ \wedge \ B \subseteq B' \Rightarrow \boldsymbol{Q}_M AB'$,
MON↓, gdy zachodzi implikacja $\boldsymbol{Q}_M AB \ \wedge \ B' \subseteq B \Rightarrow \boldsymbol{Q}_M AB'$,
↑*MON*, gdy zachodzi implikacja $\boldsymbol{Q}_M AB \ \wedge \ A \subseteq A' \Rightarrow \boldsymbol{Q}_M A'B$,
↓*MON*, gdy zachodzi implikacja $\boldsymbol{Q}_M AB \ \wedge \ A' \subseteq A \Rightarrow \boldsymbol{Q}_M A'B$.

Kwantyfikator $\boldsymbol{Q}$ jest *monotoniczny prawostronnie* (*RIGHT MON*), gdy jest *MON*↑ lub *MON*↓, zaś *monotoniczny lewostronnie* (*LEFT MON*), gdy jest ↑*MON* lub ↓*MON*.

Q jest $\downarrow$*MON*$\downarrow$, gdy jest $\downarrow$*MON* i *MON*$\downarrow$ jednocześnie. Analogicznie dla $\uparrow$*MON*$\uparrow$, $\downarrow$*MON*$\uparrow$, $\uparrow$*MON*$\downarrow$.

Cztery typy *podwójnej monotoniczności* są obecne w kwadracie logicznym:



Inne przykłady podwójnie monotonicznych kwantyfikatorów to, m.in.: $\uparrow$*MON*$\uparrow$: **at least n, infinitely many**, $\downarrow$*MON*$\downarrow$: **at most n, at most finitely many**. Kwantyfikatory **most, the, John's** są *MON*$\uparrow$, ale nie są *LEFT MON*, zaś kwantyfikatory **exactly n, all but n, between five and ten** nie są ani *LEFT MON* ani *RIGHT MON*. Różne rodzaje monotoniczności są silnymi własnościami kwantyfikatorów. Związane są też z rozważanym w tradycyjnej sylogistyce *rozłożeniem terminów*.

1. Zewnętrzna negacja odwraca kierunki zarówno *RIGHT* jak i *LEFT MON*.

2. Wewnętrzna negacja odwraca kierunek *RIGHT MON* jednak zachowuje *LEFT MON*.

3. Operacja tworzenia kwantyfikatora dualnego zachowuje kierunek *RIGHT MON* jednak odwraca kierunek *LEFT MON*.

W teorii uogólnionych kwantyfikatorów dowodzi się szeregu twierdzeń głoszących, że pewne kwantyfikatory są wyróżnione ze względu na posiadane przez nie własności. W szczególności, okazuje się, że kwantyfikatory z tradycyjnego kwadratu logicznego są wyróżnione spośród innych i to na wiele sposobów.

TWIERDZENIE. Przy spełnionych *CONSERV* oraz *VAR*, jedynymi podwójnie monotonicznymi kwantyfikatorami są dokładnie te z tradycyjnego kwadratu logicznego.

7.6 Kwantyfikatory jako relacje

W dalszym ciągu zakładamy, wszystkie rozważane kwantyfikatory są logiczne (czyli spełniają *CONSERV*, *EXT*, oraz *QUANT*) oraz spełniają *NONTRIV*. Dla (większości) kwantyfikatorów w językach etnicznych wydaje się uzasadnione przyjęcie następującego założenia:

FIN *Bierzemy pod uwagę jedynie skończone uniwersa.*

Założenia tego nie uwzględnimy oczywiście przy badaniu kwantyfikatorów „mówiących”, że istnieje nieskończenie wiele obiektów, lub że pewna własność przysługuje wszystkim obiektom, oprócz skończonej ich liczby. Wprowadza się następującą terminologię:

WŁASNOŚĆ	**DEFINICJA**	**PRZYKŁADY**
Kwantyfikator $\boldsymbol{Q}$ *jest:*	*gdy:*	
SYMETRYCZNY	$\boldsymbol{Q}AB \Rightarrow \boldsymbol{Q}BA$	**some, no, at least n at most n, exactly n, between n and m**
ANTYSYMETRYCZNY	$\boldsymbol{Q}AB \wedge \boldsymbol{Q}BA \Rightarrow A = B$	**all**
ASYMETRYCZNY	$\boldsymbol{Q}AB \Rightarrow \neg\boldsymbol{Q}BA$	-
ZWROTNY	$\boldsymbol{Q}AA$	**all, at least five all but finitely many**
QUASI-ZWROTNY	$\boldsymbol{Q}AB \Rightarrow \boldsymbol{Q}AA$	**some, most at least n**
SŁABO ZWROTNY	$\boldsymbol{Q}AB \Rightarrow \boldsymbol{Q}BB$	**some, most at least n**
QUASI-UNIWERSALNY	$\boldsymbol{Q}AA \Rightarrow \boldsymbol{Q}AB$	**no, not all, all but n**
PRZECIWZWROTNY	$\neg\boldsymbol{Q}AA$	**not all, all but n**
LINIOWY	$\boldsymbol{Q}AB \vee \boldsymbol{Q}BA \vee A = B$	**not all**
PRZECHODNI	$\boldsymbol{Q}AB \wedge \boldsymbol{Q}BC \Rightarrow \boldsymbol{Q}AC$	**all, all but finitely many**
KOŁOWY	$\boldsymbol{Q}AB \wedge \boldsymbol{Q}BC \Rightarrow \boldsymbol{Q}CA$	-
EUKLIDESOWY	$\boldsymbol{Q}AB \wedge \boldsymbol{Q}AC \Rightarrow \boldsymbol{Q}BC$	-
ANTYEUKLIDESOWY	$\boldsymbol{Q}AB \wedge \boldsymbol{Q}CB \Rightarrow \boldsymbol{Q}AC$	-

Dowodzi się, że nie istnieją (logiczne) kwantyfikatory:

1. asymetryczne,
2. euklidesowe
3. kołowe.

Dowodzi się również, że żaden kwantyfikator nie jest jednocześnie:

1. symetryczny i przechodni,
2. symetryczny i antyeuklidesowy,
3. symetryczny i zwrotny,
4. quasi-uniwersalny i zwrotny.

Jedynym zwrotnym i antysymetrycznym kwantyfikatorem jest **all**.

1. Jeżeli $\boldsymbol{Q}$ jest zwrotny i przechodni, to $\boldsymbol{Q}$ jest $\downarrow$*MON*$\uparrow$.

2. Jeżeli $\boldsymbol{Q}$ jest symetryczny, to:

   (a) $\boldsymbol{Q}$ jest quasi-zwrotny wtedy i tylko wtedy, gdy $\boldsymbol{Q}$ jest *MON*$\uparrow$,

   (b) $\boldsymbol{Q}$ jest quasi-uniwersalny wtedy i tylko wtedy, gdy $\boldsymbol{Q}$ jest *MON*$\downarrow$.

Przy założeniu *FIN* oraz *ACT*, jedynym zwrotnym i przechodnim kwantyfikatorem jest **all**.

Kwantyfikatory z kwadratu logicznego posiadają następujące własności (przy założeniu *VAR*):

$\mathbf{all}$	: zwrotny, przechodni,
$\mathbf{some}$	: symetryczny, quasi-zwrotny,
$\mathbf{not\ all}$	: przeciwzwrotny, liniowy,
$\mathbf{no}$	: symetryczny, quasi-uniwersalny.

7.7 Reprezentacja numeryczna

Gdy założymy *FIN*, to rozważane kwantyfikatory można traktować jako relacje między liczbami naturalnymi. Do ich opisu wykorzystać można *drzewko numeryczne*, w którym każdy punkt (x, y) posiada dwa następniki $(x+1, y)$, $(x, y+1)$, które to punkty są z kolei poprzednikami punktu $(x+1, y+1)$.

wiersz $x = |A - B|$ (0,0)

(1,0) (0,1) kolumna $y = |A \cap B|$

(2,0) (1,1) (0,2)

(3,0) (2,1) (1,2) (0,3)

(4,0) (3,1) (2,2) (1,3) (0,4) $x + y = |A|$

Przekątna (*diagonalna*) w takim drzewie numerycznym to ciąg tych par (x, y) dla których $x + y = |A|$.

$$\begin{array}{c} + \\ - \quad + \\ - \quad - \quad + \\ - \quad - \quad - \quad + \\ - \quad - \quad - \quad - \quad + \end{array}$$

all

$$\begin{array}{c} - \\ - \quad + \\ - \quad + \quad - \\ - \quad + \quad - \quad - \\ - \quad + \quad - \quad - \quad - \end{array}$$

exactly one

$$\begin{array}{c} - \\ - \quad + \\ - \quad - \quad + \\ - \quad - \quad + \quad + \\ - \quad - \quad - \quad + \quad + \end{array}$$

most

$$\begin{array}{c} - \\ - \quad - \\ - \quad - \quad + \\ - \quad - \quad + \quad + \\ - \quad - \quad + \quad + \quad + \end{array}$$

at least two

$$\begin{array}{c} + \\ - \quad + \\ - \quad + \quad + \\ - \quad - \quad + \quad + \\ - \quad - \quad + \quad + \quad + \end{array}$$

half or more

$$\begin{array}{c} + \\ - \quad + \\ + \quad - \quad + \\ - \quad + \quad - \quad + \\ + \quad - \quad + \quad - \quad + \end{array}$$

all but an even number

Dzięki tej technice, można podać jakie warunki muszą spełniać graficzne reprezentacje kwantyfikatorów, aby kwantyfikatory te posiadały określone własności:

NONTRIV $\equiv$ w drzewku pojawia się przynajmniej jeden $+$ oraz przynajmniej jeden $-$,

ACT $\equiv$ w górnym trójkącie (0,0), (1,0), (0,1) pojawia się przynajmniej jeden $+$ oraz przynajmniej jeden $-$,

VAR $\equiv$ na każdej diagonalnej (za wyjątkiem (0,0)) pojawia się przynajmniej jeden $+$ i przynajmniej jeden $-$.

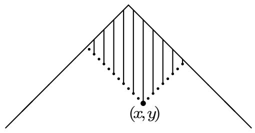
Podobne warunki można określić dla monotoniczności:

MON$\uparrow$ $\equiv$ jeżeli jakiś punkt należy do $\boldsymbol{Q}$, to wszystkie punkty na tej samej diagonalnej na prawo od danego punktu również należą do $\boldsymbol{Q}$ (każdy $+$ wypełnia swoją diagonalną plusami w prawą stronę),

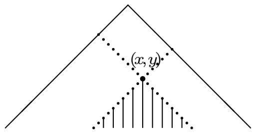
MON$\downarrow$ $\equiv$ analogicznie do *MON*$\uparrow$, tylko w lewą stronę,

RIGHT CONT pomiędzy dowolnymi dwoma $+$ na danej diagonalnej pojawiają się tylko plusy.

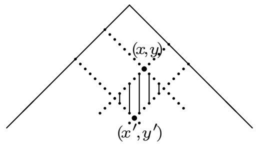
Reguły dla lewostronnej wersji monotoniczności (oraz nie omówionej w tej notatce własności ciągłości) obrazują wykresy:



$\downarrow MON$



$\uparrow MON$



LEFT CONT

Wykresy te mówią, że jeżeli punkt (x, y) należy do kwantyfikatora $\boldsymbol{Q}$, to należą do niego wszystkie punkty z zakreskowanego obszaru. Zachodzi następujące:

TWIERDZENIE. Kwantyfikatorami lewostronnie monotonicznymi są dokładnie te z kwadratu logicznego (przy założeniu *VAR*).

Reprezentacje numeryczne kwantyfikatorów uogólnionych są wykorzystywane także w badaniu pewnych problemów związanych ze złożonością obliczeniową.

7.8 Kwantyfikator Szrejdera-Vilenkina

Wyrażenie $Q_m x\ \alpha(x)$ czytamy: obiekty x takie, że $\alpha(x)$ tworzą większość w uniwersum. Aby podać rozsądną semantykę dla Q_m trzeba oczywiście nadać precyzyjne znaczenie terminowi „większość”. Nie interesuje nas przy tym poprzednie rozumienie tego terminu podane w pierwszej części prezentacji, tj. kwantyfikator:

$$\mathbf{most}_M AB \equiv |A \cap B| > |A - B|,$$

który miał prostą semantykę, zależną jedynie od mocy zbiorów: $A \cap B$ oraz $A - B$. Teraz chodzi o „większości” w całym uniwersum. Są różne możliwości ustalenia semantyki dla takiego kwantyfikatora. Podamy jedną z nich, proponowaną przez Szrejdera i Vilenkina.

Niech X będzie zbiorem niepustym i niech $\mathfrak{B}(X)$ będzie algebrą Boole'a jego (niekoniecznie wszystkich) podzbiorów taką, że $X \in \mathfrak{B}(X)$.

Rodzinę $\mathbb{M}(X)$ elementów $\mathfrak{B}(X)$ nazywamy *systemem większości*, jeśli:

1. $\mathbb{M}(X) \neq \emptyset$
2. jeśli $A \in \mathbb{M}(X)$ i $A \subseteq B$, to $B \in \mathbb{M}(X)$
3. jeśli $A \in \mathbb{M}(X)$, to dopełnienie A (w sensie algebry $\mathfrak{B}(X)$) nie należy do $\mathbb{M}(X)$.

Jeśli $\mathbb{M}(X)$ jest systemem większości w X, to układ $(X, \mathbb{M}(X))$ nazywamy *przestrzenią z większością*. Jeśli $A \in \mathbb{M}(X)$, to A nazywamy *większością* w X.

Jeśli $\mathbb{M}(X)$ jest systemem większości w X, to oczywiście:

1. $\emptyset \notin \mathbb{M}(X)$, $X \in \mathbb{M}(X)$
2. jeśli $A \in \mathbb{M}(X)$ i $B \in \mathbb{M}(X)$, to $A \cap B \neq \emptyset$.

Przestrzenie z większością mogą być otrzymane np. wtedy, gdy na X jest zadana unormowana skończenie addytywna miara μ, dla której $\mathfrak{B}(X)$ jest rodziną zbiorów mierzalnych, a systemem większości jest podrodzina rodziny $\mathfrak{B}(X)$, której elementy mają miarę nie mniejszą od jakiegoś ustalonego progu $\tau \geqslant \frac{1}{2}$. Jednak istnieją też przestrzenie z większością, które nie mogą być przez taką miarę określone.

Pomijamy tu bardziej szczegółowy opis przestrzeni z większością. Dodajmy jedynie, że stanowią one prostą i dość adekwatną aparaturę pojęciową dla opisu np. systemów podejmowania decyzji (przez grupy ekspertów).

Przestrzenie z większością dostarczają semantyki dla *kwantyfikatora większości* Q_m:

$\mathfrak{A} \models Q_m x\, \alpha(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $\{a \in dom(\mathfrak{A}) : \mathfrak{A} \models \alpha[a]\}$ jest większością w $dom(\mathfrak{A})$, dla pewnego systemu większości $\mathbb{M}(dom(\mathfrak{A}))$.

Kwantyfikator Q_m może być opisany aksjomatycznie:

1. $\forall x\, \alpha(x) \rightarrow Q_m x\, \alpha(x)$
2. $Q_m x\, \alpha(x) \rightarrow \neg Q_m x\, \neg\alpha(x)$
3. $\forall x\, (\alpha(x) \rightarrow \beta(x)) \rightarrow (Q_m x\, \alpha(x) \rightarrow Q_m x\, \beta(x))$.

Można pokazać, że ta aksjomatyka jest trafna i pełna względem podanej wyżej semantyki dla Q_m. Pierwszą pracą dotyczącą tego kwantyfikatora jest (o ile nam wiadomo): Vilenkin, Shreider 1977.

7.9 Pożytki sylogistyczne

Powyżej pokazano, że kwantyfikatory z TKL są pod wieloma względami wyróżnione: np. są jedynymi kwantyfikatorami podwójnie monotonicznymi, jedynymi kwantyfikatorami o ustalonych zestawach własności (gdy kwantyfikator traktujemy jako relację między podzbiorami uniwersum). Powstaje naturalne pytanie: czy aparatura pojęciowa związana z uogólnionymi kwantyfikatorami pozwala w prosty sposób charakteryzować rozumowania przeprowadzane w klasycznej sylogistyce? Podamy kilka przykładów (za van Eijck 1984) dotyczących praw TKL oraz teorii sylogizmów. Zakładamy *CONS*, *QUANT* i *EXT*. W tych przypadkach, gdy kwantyfikatory definiowane są przez drzewa numeryczne zakładamy też *FIN*.

Definiowanie przez drzewa numeryczne rozumiemy tu jako równoważność: $QAB \equiv R_Q(|A - B|, |A \cap B|)$ dla pewnej relacji R_Q określonej dla liczb. Dla kwantyfikatora Q (zdefiniowanego przez R_Q) określamy:

1. $\tilde{Q}AB \equiv QA(A - B)$, *co-quantifier*.
2. $\hat{Q}AB \equiv \neg QAB$, *opposite*.
3. $\check{Q}AB \equiv \neg QA(A - B)$, *dual*.

Mamy wtedy:

1. Jeśli $R_Q \equiv R(m, n)$, to:
   (a) $R_{\tilde{Q}}(m, n) \equiv R(n, m)$
   (b) $R_{\hat{Q}}(m, n) \equiv \neg R(m, n)$
   (c) $R_{\check{Q}}(m, n) \equiv \neg R(n, m)$.

Założeniu *existential import* odpowiada warunek:
EXIMP: $(QAB \vee \neg QAB) \equiv A \neq \emptyset$.
Przypomnijmy niektóre prawa TKL:

S_1	$\tilde{Q}AB \equiv \tilde{Q}BA$	konwersja prosta
S_2	$\check{Q}AB \equiv \check{Q}BA$	konwersja prosta
S_3	$QAB \Rightarrow Q(C - B)(C - A)$	konwersja przez kontrapozycję
S_4	$QAB \Rightarrow Q(C - B)(C - A)$	konwersja przez kontrapozycję
S_5	$\neg(QAB \wedge \tilde{Q}AB)$	wykluczanie
S_6	$\neg(\neg\check{Q}AB \wedge \neg\hat{Q}AB)$	dopełnianie
S_7	$QAB \Rightarrow \check{Q}AB$	implikacja
S_8	$\tilde{Q}AB \Rightarrow \hat{Q}AB$	implikacja
S_9	$QAB \Rightarrow \check{Q}BA$	konwersja *per accidens*
S_{10}	$\tilde{Q}AB \Rightarrow \hat{Q}BA$	konwersja *per accidens*.

W S_3: dla dowolnego C, w S_4: dla C takiego, że $A \subseteq C$.
Zauważmy, że S_2 implikuje S_1, ponieważ: $\check{Q}AB \equiv \neg\tilde{Q}AB$.
Warunek *kosymetrii* ma postać:
COSYM: $QA(A - B) \Rightarrow QB(B - A)$.

Warunek ten głosi zatem, że $\tilde{Q}$ jest symetryczny. Q spełnia *COSYM* wtedy i tylko wtedy, gdy Q można wyrazić jako alternatywę (być może nieskończoną) zdań postaci: *dokładnie k elementów A nie jest elementami B*.

Warunek *kontrapozycji* (odpowiadający S_3) ma postać:

CONTRAPOS: $QAB \Rightarrow Q(C - B)(C - A)$.

Warunek *CONTRAPOS* implikuje warunek *COSYM*. Q spełnia *CONTRAPOS* wtedy i tylko wtedy, gdy Q jest postaci *najwyżej k elementów A nie jest elementami* B.

Prawu S_7 odpowiada warunek:

SUBALT: $QAB \Rightarrow \neg QA(A - B)$.

Prawa S_5, S_6 i S_8 redukują się do S_7:

$QAB \equiv \neg QA(A - B) \equiv \neg\tilde{Q}AB$

$\neg\check{Q}AB \equiv QA(A - B) \equiv \neg QAB \equiv \hat{Q}AB$

$\tilde{Q}AB \equiv \neg\check{Q}AB \Rightarrow \neg QAB \equiv \hat{Q}AB$.

Przy założeniach $Q \neq \emptyset$, *FIN* oraz *EXIMP* jedynym kwantyfikatorem o własnościach *COSYM* i *SUBALT* jest **all**.

Prawu S_9 odpowiada warunek:

ACCIDENS: $QAB \Rightarrow QB(B - A)$.

S_{10} otrzymujemy z S_9 przez kontrapozycję oraz równoważności: $\tilde{Q}AB \equiv \neg\check{Q}AB$ i $\hat{Q}BA \equiv \neg QBA$.

Warunek *ACCIDENS* implikuje *SUBALT*. Warunki *COSYM* i *SUBALT* implikują *ACCIDENS*. Przy założeniu *EXIMP* jedynymi kwantyfikatorami spełniającymi *ACCIDENS* i *VAR* są **no** oraz **all**. Wszystkie poprawne tryby sylogistyczne otrzymać można z trybu *Barbara* poprzez użycie warunków *CONSERV*, *COSYM* oraz *SUBALT*.

Pamiętamy, że reguły „filologiczne" poprawności trybów sylogistycznych mówią (oprócz *jakości* oraz *ilości*) o *rozłożeniu* terminów („braniu terminów w całym zakresie"). To ostatnie pojęcie znajduje prostą eksplikację w warunkach *monotoniczności* dla kwantyfikatorów.

Powiemy, że Q ma własność *lewej dolnej prawie-monotoniczności*, gdy spełniony jest warunek:

$\downarrow\downarrow$*MON*: $QAB \wedge A' \neq \emptyset \wedge A' \subseteq A \Rightarrow QA'B$.

Powiemy, że Q ma własność *lewej górnej prawie-monotoniczności*, gdy spełniony jest warunek:

$\uparrow\uparrow$*MON*: $QAB \wedge A \neq \emptyset \wedge A \subseteq A' \Rightarrow QA'B$.

Podobnie określamy warunki: *MON*$\downarrow\downarrow$ oraz *MON*$\uparrow\uparrow$ oraz podwójnej prawie-monotoniczności: $\uparrow\uparrow$*MON*$\downarrow\downarrow$, itd.

Kwantyfikatory TKL spełniają warunki podwójnej prawie-monotoniczności:

1. *all* jest $\downarrow\downarrow$*MON*$\uparrow\uparrow$
2. *no* jest $\downarrow\downarrow$*MON*$\downarrow\downarrow$
3. *some* jest $\uparrow\uparrow$*MON*$\uparrow\uparrow$

4. *not all* jest $\uparrow\uparrow$*MON*$\downarrow\downarrow$.

Przy pomocy tych pojęć można *zdefiniować* pojęcie rozłożenia terminów:

1. A jest *rozłożony w* QAB wtedy i tylko wtedy, gdy Q jest $\downarrow\downarrow$*MON*;
2. B jest *rozłożony w* QAB wtedy i tylko wtedy, gdy Q jest *MON*$\downarrow\downarrow$.

Przy takim rozumieniu rozłożenia terminów warunki poprawności trybów sylogistycznych zachowują swoją ważność. Warto na to zwrócić uwagę, już chociażby dlatego, że uczący się miewają trudności ze zrozumieniem pojęcia: *termin rozłożony*, objaśnianego tradycyjnym sposobem. Natomiast powyższa definicja jest prosta i precyzyjna.

8 Uwaga redakcyjna

Niniejsza notatka stanowi jedynie hasłowy przewodnik po treściach omówionych na wykładzie. Treści poruszane w punktach 1–6 dzisiejszego wykładu omawiane są w książce Grzegorczykowa 1990, w rozdziałach I–V części drugiej. Więcej o uogólnionych kwantyfikatorach zainteresowany czytelnik może dowiedzieć się np. z prac wyliczonych poniżej.

Odnośniki bibliograficzne

Semantyka wyrażeń złożonych

Grzegorczykowa, R. 1990. *Wprowadzenie do semantyki językoznawczej*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Grzegorczykowa, R. 2007. *Wstęp do językoznawstwa*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Uogólnione kwantyfikatory

Barwise, J. 1985. Model-Theoretic Logics: Background and Aims. W: J. Barwise, S. Feferman (eds.). 1985. *Model-Theoretic Logics*. Springer-Verlag.

Barwise, J. Cooper, R. 1981. Generalized quantifiers and natural language. *Linguistics and Philosophy* **4**, 159–219.

van Benthem, J., ter Meulen, A. (eds.) 1984. *Generalized quantifiers in natural language.* Foris Publications, Dordrecht.

van Eijck, J. 1984. Generalized quantifiers and traditional logic. W: van Benthem, J., ter Meulen, A. (eds.) *Generalized quantifiers in natural language.*, 1–19.

Gärdenfors, P. (ed.) 1987. *Generalized quantifiers: Linguistic and logical approaches.* Reidel, Dordrecht.

Henkin, L. 1961. Some remarks on infinitely long formulas. *Infinitistic Methods*, Pergamon Press, Qxford, 167–183.

Keenan, E.L., Stavi, J. 1986. A semantic characterization of natural language determiners. *Linguistics and Philosophy* **9**, 253–326.

Keisler, H.J., Knight, J.L. 2004. Barwise: infinitary logic and admissible sets. *The Bulletin of Symbolic Logic* Volume **10**, Number **1**, 4–36.

Krynicki, M., Mostowski, M., Szczerba, L.W. (eds.) 1995. *Quantifiers: logics, models and computation.* Kluwer Academic Publishers. Dordrecht Boston London.

Lindström, P. 1969. On Extensions of Elementary Logic. *Theoria*, , 1–11.

Mostowski, A. 1957. On generalization of quantifiers. *Fundamenta Mathematicae* **44**, 12–36.

Shapiro, S. (ed.) 1996. *The limits of logic: higher-order logic and the Löwenheim-Skolem theorem.* Dartmouth Publishing Company, Aldershot.

Smigerska, J. 2008. *Kwantyfikatory uogólnione w językach naturalnych i formalnych.* Rozprawa magisterska, Instytut Językoznawstwa UAM; promotor: Jerzy Pogonowski.

Tarski, A. 1986. What are logical notions? *History and Philosophy of Logic*, **7**, 143–154.

Väänänen, J. 2004. Barwise: abstract model theory and generalized quantifiers. *The Bulletin of Symbolic Logic* Volume **10**, Number **1**, 37–53.

Vilenkin, N.Ya., Shreider, Yu.A. 1977. Majority spaces and majority quantifier. *Semiotika i Informatika* **8**, Moskwa (praca w języku rosyjskim).

Westerståhl, D. 1989. Quantifiers in formal and natural languages. *Handbook of Philosophucal Logic.* Vol. **IV**, 1–131.