Logika algebraiczna 5

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
www.kognitywistyka.amu.edu.pl
pogon@amu.edu.pl

2021

Plan na dziś:

- Algebry Boole'a
- Algebry Heytinga
- Algebry Boole'a z dodatkowymi operacjami

Następny wykład:

- Ogólne operacje konsekwencji
- Reguły wnioskowania (dopuszczalne, wyprowadzalne, strukturalne)

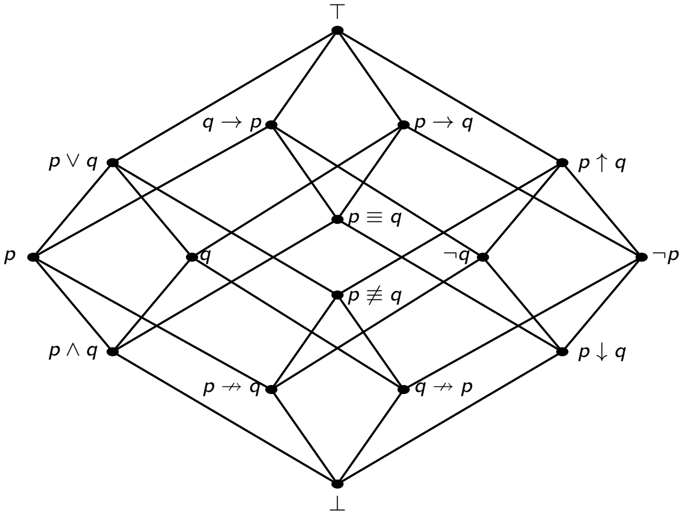
Algebrę $(B, \wedge, \vee, -, 0, 1)$ nazywamy *algebrą Boole'a*, jeśli $(B, \wedge, \vee, 0, 1)$ jest kratą dystrybutywną z zerem 0 i jedynką 1, $-$ jednoargumentową operacją uzupełnienia, dla każdego elementu $x \in B$ istnieje jego *uzupełnienie*, czyli element $-x$ (oznaczany też przez x') taki, że:

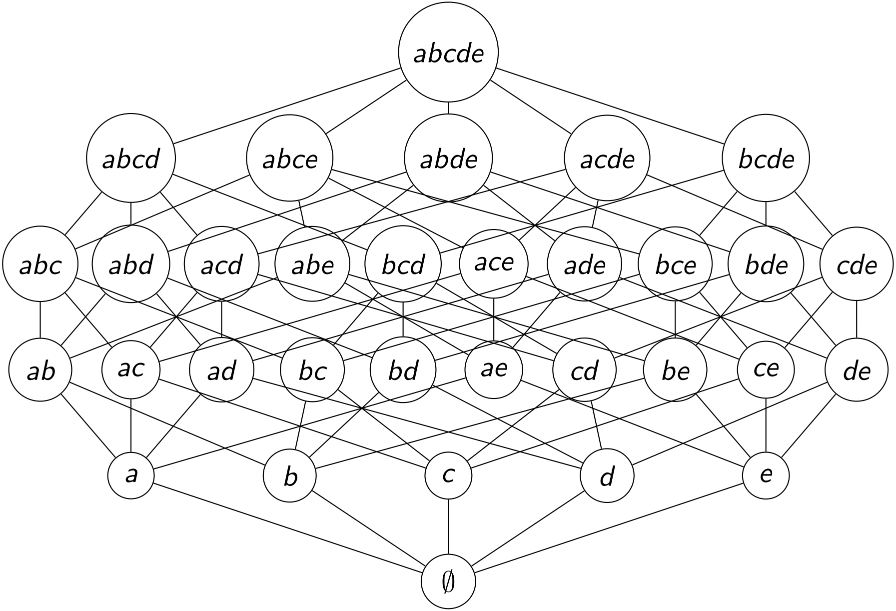
1. $(x \vee (-x)) = 1$
2. $(x \wedge (-x)) = 0$.

Tak więc, algebra $(B, \wedge, \vee, -, 0, 1)$ jest algebrą Boole'a, jeśli spełnia ona następujące warunki:

$(B1)$	$a \wedge b = b \wedge a$	$(B1')$	$a \vee b = b \vee a$
$(B2)$	$a \wedge a = a$	$(B2')$	$a \vee a = a$
$(B3)$	$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$	$(B3')$	$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$
$(B4)$	$a \wedge 1 = a$	$(B4)'$	$a \vee 0 = a$
$(B5)$	$a \wedge (-a) = 0$	$(B5)'$	$a \vee (-a) = 1$
$(B6)$	$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$		

- $\mathbf{2} = (\{0,1\}, \wedge, \vee, -, 0, 1)$, gdzie $(\{0,1\}, \wedge, \vee)$ jest dwuelementową kratą, $-0 = 1$, $-1 = 0$.
- $\mathbf{1} = (\{\emptyset\}, \wedge, \vee, -, \emptyset, \emptyset)$.
- $(\wp(X), \cap, \cup, -, \emptyset, X)$ dla dowolnego zbioru X.
- Każde ciało zbiorów jest algebrą Boole'a.
- Niech T będzie zbiorem tez klasycznego rachunku zdań (przy ustalonej aksjomatyce i regułach wnioskowania). Relacja $\sim$ określona dla formuł φ, ψ języka tego rachunku przez warunek: $\varphi \sim \psi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi \leftrightarrow \psi \in T$ jest równoważnością. Jej klasy równoważności tworzą algebrę Boole'a:
  - $[\varphi \wedge \psi]_\sim = [\varphi]_\sim \wedge [\psi]_\sim$,
  - $[\varphi \vee \psi]_\sim = [\varphi]_\sim \vee [\psi]_\sim$,
  - $[\neg\psi]_\sim = -[\psi]_\sim$,
  - $0 = [\bot]_\sim$,
  - $1 = [\top]_\sim$.
- $(\{a, b\}, \wedge, \vee, -, 0, 1)$, gdzie $a \neq b$, $a \wedge b = 0$, $a \vee b = 1$ (wtedy $b = -a$) jest algebrą Boole'a.


$\top$
$q \rightarrow p$
$p \rightarrow q$
$p \vee q$
$p \uparrow q$
$p \equiv q$
p
q
$\neg q$
$\neg p$
$p \not\equiv q$
$p \wedge q$
$p \downarrow q$
$p \nrightarrow q$
$q \nrightarrow p$
$\bot$


abcde
abcd
abce
abde
acde
bcde
abc
abd
acd
abe
bcd
ace
ade
bce
bde
cde
ab
ac
ad
bc
bd
ae
cd
be
ce
de
a
b
c
d
e
∅

W dowolnej algebrze Boole'a:

- Jeśli $a \wedge b = 0$ i $a \vee b = 1$, to $a = -b$.
- $-(-a) = a$, $-0 = 1$, $-1 = 0$.
- $-(a \wedge b) = -a \vee -b$, $-(a \vee b) = -a \wedge -b$
- Jeśli $a = b$, to $-a = -b$.
- Jeśli $a \leqslant b$, to $-b \leqslant -a$.
- Jeśli nie zachodzi $a \leqslant b$, to $a \wedge -b \neq 0$.

Algebrę Boole'a $(B, \wedge, \vee, -, 0, 1)$ nazywamy zupełną, gdy krata $(B, \wedge, \vee)$ jest zupełna. W zupełnej algebrze Boole'a:

- $-\bigvee\{a_i : i \in I\} = \bigwedge\{-a_i : i \in I\}$,
- $-\bigwedge\{a_i : i \in I\} = \bigvee\{-a_i : i \in I\}$,
- $a \wedge \bigvee\{a_i : i \in I\} = \bigvee\{a \wedge a_i : i \in I\}$,
- $a \vee \bigwedge\{a_i : i \in I\} = \bigwedge\{a \vee a_i : i \in I\}$.

- Udowodnimy, dla przykładu, że $-(a \vee b) = -a \wedge -b$:
- $(a \vee b) \vee (-a \wedge -b) = (a \vee b \vee -a) \wedge (a \vee b \vee -b) = (b \vee 1) \wedge (a \vee 1) = 1$
- $(a \vee b) \wedge (-a \wedge -b) = (a \wedge -a \wedge -b) \vee (b \wedge -a \wedge -b) = 0 \vee 0 = 0.$
- A zatem $-a \wedge -b$ jest uzupełnieniem $a \vee b$. □
- Udowodnimy, dla przykładu, że $a \wedge \bigvee\{a_i : i \in I\} = \bigvee\{a \wedge a_i : i \in I\}$:
- Niech $x = \bigvee\{a_i : i \in I\}$. Wtedy $a_i \leqslant x$ dla $i \in I$, czyli $a \wedge a_i \leqslant a \wedge x$ dla $i \in I$. A zatem $\bigvee\{a \wedge a_i : i \in I\} \leqslant a \wedge x$.
- Jeśli $c \in A$ jest taki, że $a \wedge a_i \leqslant c$ dla $i \in I$, to $-c \leqslant -a \vee a_i$. Dalej, $a \wedge -c \leqslant (a \wedge -a) \vee (a \wedge -a_i) = a \wedge -a_i \leqslant -a_i$ dla $i \in I$. To oznacza, że $a \wedge -c \leqslant \bigwedge\{-a_i : i \in I\} = -\bigvee\{a_i : i \in I\} = -x$.
- Mamy stąd $x \leqslant -a \vee c$, czyli $a \wedge x \leqslant a \wedge (-a \vee c) = (a \wedge -a) \vee (a \wedge c) = a \wedge c = c$. Pokazaliśmy zatem, że $\bigvee\{a \wedge a_i : i \in I\} = a \wedge x = a \wedge \bigvee\{a_i : i \in I\}$. W tym dowodzie zakładaliśmy oczywiście, że wcześniej udowodniono wykorzystywane w nim własności algebr Boole'a. □

- Niech uzupełnienie elementu x w algebrze Boole'a będzie (na tym slajdzie) oznaczane przez x'.
- Pierścieniem boolowskim nazywamy pierścień $\mathbf{R} = (R, +, \cdot, -, 0, 1)$, w którym $x \cdot x = x$ dla wszystkich $x \in R$. Jeśli $\mathbf{R}$ jest pierścieniem boolowskim, to $x + x = 0$ oraz $x \cdot y = y \cdot x$.
- Niech $\mathbf{B} = (B, \wedge, \vee, ', 0, 1)$ będzie algebrą Boole'a. Zdefiniujmy algebrę $\mathbf{B}^{\otimes} = (B, +, \cdot, -, 0, 1)$, gdzie: $a + b = (a \wedge b') \vee (a' \wedge b)$, $a \cdot b = a \wedge b$, $-a = a$. Wtedy $\mathbf{B}^{\otimes}$ jest pierścieniem boolowskim.
- Niech $\mathbf{R} = (R, +, \cdot, -, 0, 1)$ będzie pierścieniem boolowskim. Zdefiniujmy algebrę $\mathbf{R}^{\otimes} = (R, \wedge, \vee, ', 0, 1)$, gdzie: $a \vee b = a + b + a \cdot b$, $a \wedge b = a \cdot b$, $a' = 1 + a$. Wtedy $\mathbf{R}^{\otimes}$ jest algebrą Boole'a.
- Przy powyższych oznaczeniach mamy: $\mathbf{R}^{\otimes\otimes} = \mathbf{R}$ oraz $\mathbf{B}^{\otimes\otimes} = \mathbf{B}$.

- Jeśli $\mathbf{B} = (B, \wedge, \vee, -, 0, 1)$ jest algebrą Boole'a, oraz $a \in B$, to przez $\mathbf{B} \upharpoonright a$ rozumiemy algebrę $([0, a], \wedge, \vee, ^*, 0, a)$, gdzie operacje $\wedge$ i $\vee$ są takie same, jak w algebrze $\mathbf{B}$, natomiast $b^* = a \wedge -b$.
- **Twierdzenie**. $\mathbf{B} \upharpoonright a$ jest algebrą Boole'a, a odwzorowanie $f_a : B \to B \upharpoonright a$ określone przez $f_a(b) = a \wedge b$ jest surjektywnym homomorfizmem $\mathbf{B}$ na $\mathbf{B} \upharpoonright a$. Ponadto, $\mathbf{B}$ jest izomorficzna z $\mathbf{B} \upharpoonright a \times \mathbf{B} \upharpoonright (-a)$.
- **Dowód**. $([0, a], \wedge, \vee)$ jest oczywiście kratą dystrybutywną. Jeśli $b \in [0, a]$, to: $b \wedge 0 = 0$, $b \vee a = a$,
$b \wedge b^* = b \wedge (a \wedge -b) = a \wedge (b \wedge -b) = a \wedge 0 = 0$,
$b \vee b^* = b \vee (a \wedge -b) = (a \wedge b) \vee (a \wedge -b) = a \wedge (b \vee -b) = a \wedge 1 = a$.
- Jeśli $b, c \in B$, to: $f_a(0) = 0$, $f_a(1) = 1$,
$f_a(b \wedge c) = a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) = f_a(b) \vee f_a(c)$,
$f_a(b \wedge c) = a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge (a \wedge c) = f_a(b) \wedge f_a(c)$.
$f_a(-b) = a \wedge -b = (a \wedge -a) \vee (a \wedge -b) = a \wedge (-a \vee -b) =$
$a \wedge -(a \wedge b) = (f_a(b))^*$.

- Niech $f : \mathbf{B} \to \mathbf{B} \upharpoonright a \times \mathbf{B} \upharpoonright (-a)$ będzie określone warunkiem: $f(b) = (f_a(b), f_{-a}(b))$.
- Wtedy f jest homomorfizmem (produkt homomorfizmów f_a i f_{-a}).
- Jeśli $(b, c) \in [0, a] \times [0, -a]$, to (ponieważ $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) = b \vee 0 = b$ oraz $-a \wedge (b \vee c) = (-a \wedge b) \vee (-a \wedge c) = 0 \vee c = c$), więc $f(b \vee c) = (a \wedge (b \vee c), -a \wedge (b \vee c)) = (b, c)$. A zatem f jest surjekcją.
- Jeśli $f(b) = f(c)$ dla $b, c \in B$, to $a \wedge b = a \wedge c$ i $-a \wedge b = -a \wedge c$, a zatem $(a \wedge b) \vee (-a \wedge b) = (a \wedge c) \vee (-a \wedge c)$, a stąd $(a \vee -a) \wedge b = (a \vee -a) \wedge c$, czyli $b = c$. Tak więc, f jest injekcją.

Pokazaliśmy zatem, że f jest izomorfizmem. $\square$

- Najmniejszą podalgebrę algebry $\mathbf{B} = (B, \wedge, \vee, -, 0, 1)$, zawierającą zbiór $X \subseteq B$ nazywamy podalgebrą generowaną przez X. Podalgebra generowana przez $\{a\}$, gdzie $a \in B$ zawiera elementy $0, a, -a, 1$.
- Jeśli $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ jest homomorfizmem algebr Boole'a, to jądrem tego homomorfizmu nazywamy zbiór $ker_f = \{a \in A : f(a) = 0\}$.
- **Twierdzenie**. Homomorfizm $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ algebr Boole'a jest zanurzeniem (homomorfizmem i injekcją) wtedy i tylko wtedy, gdy $ker_f = \{0\}$.
- **Dowód**. Jeśli f jest zanurzeniem i $x \in ker_f$, to $f(x) = 0 = f(0)$, a zatem $x = 0$, czyli $ker_f = \{0\}$.
- Załóżmy, że $ker_f = \{0\}$ i $f(a_1) = f(a_2)$, dla $a_1, a_2 \in A$. Wtedy $f(-a_1) = f(-a_2)$, a dalej $f(a_2 \wedge -a_1) = f(a_2) \wedge -f(a_1) = f(a_1) \wedge -f(a_1) = 0$, co oznacza, że $a_2 \wedge -a_1 \in ker_f$, czyli $a_2 \wedge -a_1 = 0$. Mamy więc: $a_1 = a_1 \vee 0 = a_1 \vee (a_2 \wedge -a_1) = (a_1 \vee a_2) \wedge (a_1 \vee -a_1) = a_1 \vee a_2$, a zatem $a_2 \leqslant a_1$. Podobnie pokazujemy, że $a_1 \leqslant a_2$, co daje $a_1 = a_2$. $\Box$

- Ideały (filtry) algebry Boole'a $\mathbf{B} = (B, \wedge, \vee, -, 0, 1)$ to ideały (filtry) kraty $(B, \wedge, \vee)$.
- Jeśli $X \subseteq B$, to niech $X' = \{-a : a \in X\}$.
- Jeśli I jest ideałem w algebrze Boole'a $\mathbf{B}$, to I' jest filtrem w $\mathbf{B}$.
- Jeśli F jest filtrem w algebrze Boole'a $\mathbf{B}$, to F' jest ideałem w $\mathbf{B}$.
- Zbiory ideałów i filtrów w algebrze Boole'a są zamknięte ze względu na dowolne iloczyny.
- Teoriomnogościowa suma dowolnego łańcucha ideałów (filtrów) właściwych w algebrze Boole'a jest ideałem (filtrem) właściwym w tej algebrze.
- **Twierdzenie**. Ideał właściwy J algebry Boole'a $\mathbf{A}$ jest maksymalny wtedy i tylko wtedy, gdy jest ideałem pierwszym (tj. jeśli $a \wedge b \in J$, to $a \in J$ lub $b \in J$).
- **Dowód**. Wykorzystamy lemat dotyczący ideałów w kratach:

- **Lemat**. Niech J będzie niepustym podzbiorem kraty L. Wtedy najmniejszy ideał w L, zawierający J jest zbiorem $\{x \in L : \exists a_1 \in J \ldots \exists a_n \in J\ x \leqslant a_1 \vee \ldots \vee a_n\}$. W szczególności, $(a] = \{x \in L : x \leqslant a\}$.
- **Dowód lematu**. Zbiór $\{x \in L : \exists a_1 \in J \ldots \exists a_n \in J\ x \leqslant a_1 \vee \ldots \vee a_n\}$ jest oczywiście ideałem, zawierającym J. Ponadto, każdy ideał zawierający J zawiera też ten zbiór. □
- Załóżmy, że J jest ideałem maksymalnym i niech $a \wedge b \in J$, lecz $a \notin J$. Wtedy najmniejszym ideałem zawierającym $J \cup \{a\}$ jest cały zbiór A.
- Na podstawie lematu $b \leqslant u \vee a$ dla pewnego $u \in J$. Wtedy $b \leqslant (u \vee a) \wedge b = (u \wedge b) \vee (a \wedge b)$. Skoro $u \wedge b \in J$ oraz $a \wedge b \in J$, więc $b \in J$.
- Załóżmy z kolei, że J jest ideałem pierwszym, ale nie maksymalnym. Wtedy istnieje ideał właściwy J^* taki, że $J \subset J^*$, czyli istnieje $v \in J^* - J$. Ponieważ $0 = v \wedge -v \in J$ oraz $v \notin J$, więc $-v \in J$. Wtedy jednak $-v \in J^*$, a zatem $1 = v \vee -v \in J^*$, czyli J^* nie jest ideałem właściwym. □

- **Uwaga**. Na mocy zasady dualności otrzymujemy stwierdzenia dotyczące filtrów, dualne do powyższego lematu i twierdzenia. W szczególności: filtr właściwy F algebry Boole'a $\mathbf{A}$ jest maksymalny (jest ultrafiltrem) wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $a, b \in A$, jeśli $a \vee b \in F$, to $a \in F$ lub $b \in F$.
- Dla każdego elementu $a \neq 1$ algebry Boole'a $\mathbf{A}$ istnieje ideał maksymalny J w $\mathbf{A}$ taki, że $a \in J$.
- **Twierdzenie** (o reprezentacji algebr Boole'a). Każda algebra Boole'a jest izomorficzna z pewnym ciałem zbiorów.
- **Dowód**. Niech $\mathbf{A}$ będzie algebrą Boole'a, zaś $IM(\mathbf{A})$ zbiorem jej wszystkich ideałów maksymalnych. Funkcję $f : A \to \wp(IM(\mathbf{A}))$ określamy wzorem $f(a) = \{J \in IM(\mathbf{A}) : a \notin J\}$.
- Na mocy twierdzenia o reprezentacji krat dystrybutywnych f jest injekcją oraz $f(a \vee b) = f(a) \cup f(b)$ i $f(a \wedge b) = f(a) \cap f(b)$.

- Mamy oczywiście $f(0) = \emptyset$ i $f(1) = IM(\mathbf{A})$.
- Ponadto, $f(-a) = IM(\mathbf{A}) - f(a)$, ponieważ:
  1. $J \in f(-a)$ wtedy i tylko wtedy, gdy
  2. $-a \notin J$ wtedy i tylko wtedy, gdy
  3. $a \in J$ wtedy i tylko wtedy, gdy
  4. $J \notin f(a)$ wtedy i tylko wtedy, gdy
  5. $J \in IM(\mathbf{A}) - f(a)$.
- Pokazaliśmy więc, że $\mathbf{A}$ jest izomorficzna z ciałem zbiorów. $\square$
- Atomy algebry Boole'a $\mathbf{A} = (A, \wedge, \vee, -, 0, 1)$ to atomy kraty $(A, \wedge, \vee)$.
- Mówimy, że algebra $\mathbf{A} = (A, \wedge, \vee, -, 0, 1)$ jest atomowa (bezatomowa), gdy krata $(A, \wedge, \vee)$ jest atomowa (bezatomowa). Zbiór atomów algebry $\mathbf{A}$ oznaczamy przez $At(\mathbf{A})$.
- Mówimy, że algebra $\mathbf{A} = (A, \wedge, \vee, -, 0, 1)$ jest atomistyczna, gdy każdy jej element jest sumą atomów.

- **Twierdzenie**. Algebra Boole'a $\mathbf{A}$ jest atomowa wtedy i tylko wtedy, gdy jest atomistyczna.
- **Dowód**. Załózmy, że $\mathbf{A}$ jest atomowa. Niech $a \in A - \{0\}$ oraz $P = \{p \in At(\mathbf{A}) : p \leqslant a\}$. Udowodnimy, że $a = \bigvee P$. Niech $c \in A$ będzie takie, że $x \leqslant c$ dla wszystkich $x \in P$. Gdyby nie zachodziła nierówność $a \leqslant c$, to mielibyśmy $a \wedge -c \neq 0$. Skoro $\mathbf{A}$ jest atomowa, to istnieje $p \in At(\mathbf{A})$ taki, że $p \leqslant a \wedge -c$, czyli $p \leqslant a$ i $p \leqslant -c$. Stąd $p \in P$, a więc $p \leqslant c$. A zatem $p \leqslant c \wedge -c = 0$. Otrzymujemy sprzeczność, a więc $a \leqslant c$. W konsekwencji, $a = \bigvee P$.
- Jeśli natomiast każdy element algebry $\mathbf{A}$ jest sumą atomów, to $\mathbf{A}$ jest rzecz jasna algebrą atomową. $\square$
- **Twierdzenie**. Algebra $\mathbf{A}$ jest atomowa i zupełna wtedy i tylko wtedy, gdy jest izomorficzna z ciałem *wszystkich* podzbiorów pewnego zbioru.
- **Dowód**. Jeśli $\mathbf{A}$ jest izomorficzna z $\wp(X)$ dla pewnego X, to $\mathbf{A}$ jest oczywiście zupełna i atomowa.

- Załóżmy, że **A** jest zupełna i atomowa. Niech funkcja $f : A \to \wp(At(\mathbf{A}))$ będzie określona wzorem $f(a) = \{p \in At(\mathbf{A}) : p \leqslant a\}$. Udowodnimy, że:
  1. $f(a \vee b) = f(a) \cup f(b)$
  2. $f(-a) = At(\mathbf{A}) - f(a)$
  3. f jest iniekcją
  4. f jest surjekcją, czyli dla każdego $X \subseteq At(\mathbf{A})$ istnieje $a \in A$ taki, że $f(a) = X$.
- 1) Jeśli $p \in f(a \vee b)$, to $p \in At(\mathbf{A})$ i $p \leqslant a \vee b$. Wtedy $p = p \wedge (a \vee b) = (p \wedge a) \vee (p \wedge b)$, czyli $p = p \wedge a$ lub $p = p \wedge b$, a to oznacza, że $p \leqslant a$ lub $p \leqslant b$. Mamy zatem $f(a \vee b) \subseteq f(a) \cup f(b)$. Inkluzja odwrotna jest oczywista. Podobnie dowodzimy, że $f(a \wedge b) = f(a) \cap f(b)$.
- 2) Niech $p \in At(\mathbf{A})$. Wtedy $p \in f(-a)$ oznacza, że $p \leqslant -a$, a to z kolei znaczy, że nie zachodzi $p \leqslant a$, co oznacza, że $p \notin f(a)$. A zatem $f(-a) = At(\mathbf{A}) - f(a)$.

- 3) Załóżmy, że $f(a) = \emptyset$ dla pewnego $a \in A$. Ponieważ **A** jest atomowa, więc $a = 0$, czyli $ker_f = \{0\}$. Udowodniliśmy już, że w takim przypadku f jest zanurzeniem, a więc injekcją.
- 4) Niech $X \subseteq At(\mathbf{A})$. Ponieważ **A** jest zupełna, to istnieje w niej $a = \bigvee X$. Wtedy $X \subseteq f(a)$. Niech $p \in f(a)$. Wtedy $p \in At(\mathbf{A})$ i $p \leqslant a = \bigvee X$. Na mocy własności zupełnych algebr Boole'a $p = p \wedge \bigvee X = \bigvee\{p \wedge q : q \in X\}$, a zatem $p = p \wedge q$ dla pewnego $q \in X$, a to oznacza, że $p = q$, czyli $p \in X$. Pokazaliśmy więc, że $f(a) \subseteq X$, czyli ostatecznie $f(a) = X$.
- To kończy dowód, że f jest izomorfizmem algebry **A** na rodzinę wszystkich podzbiorów zbioru $\wp(At(\mathbf{A}))$. $\square$

Twierdzenia o reprezentacji algebr Boole'a można wysłowić także korzystając z pojęcia filtru.

- Jeśli J jest ideałem właściwym w algebrze Boole'a $\mathbf{A}$, to relacja $\sim_J$ określona warunkiem $a \sim_J b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a \wedge -b \in J$ i $b \wedge -a \in J$ jest kongruencją algebry $\mathbf{A}$.
- Zauważmy, że $a \sim_J b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a + b \in J$.
- Jeżeli ideał J jest właściwy, to algebra ilorazowa $\mathbf{A}/_{\sim_J}$ jest niezdegenerowana.
- **Twierdzenie**. Każdy ideał właściwy w algebrze Boole'a $\mathbf{A}$ jest jądrem pewnego homomorfizmu.
- **Dowód**. Niech J będzie ideałem właściwym w algebrze Boole'a $\mathbf{A}$. Odwzorowanie kanoniczne $k_J : \mathbf{A} \to \mathbf{A}/_{\sim_J}$ określone wzorem $k_J(a) = [a]_{\sim_J}$ jest homomorfizmem. Mamy: $ker_{k_J} = \{a \in A : k_J(a) = 0\} = \{a \in A : [a]_{\sim_J} = [0]_{\sim_J}\} = J$. $\square$
- Niech $a \in A$, $a \neq 0$. Wtedy $(-a]$ jest ideałem właściwym w $\mathbf{A}$. Algebra $\mathbf{A} \upharpoonright a$ jest izomorficzna z algebrą ilorazową $\mathbf{A}/_{\sim_{(-a]}}$. Odwzorowanie $f^a : \mathbf{A} \upharpoonright a \to \mathbf{A}/_{\sim_{(-a]}}$, określone wzorem $f^a(b) = [b]_{\sim_{(-a]}}$ jest izomorfizmem.

- Podziałem algebry Boole'a $\mathbf{A}$ nazywamy dowolny podzbiór $\{a_k : k \in K\}$ jej elementów taki, że $\bigvee\{a_k : k \in K\} = 1$ oraz $a_{k_1} \cap a_{k_2} = 0$ dla $k_1 \neq k_2$.
- **Twierdzenie**. Algebra Boole'a $\mathbf{A}$ jest izomorficzna z produktem rodziny $\{\mathbf{B}_k : k \in K\}$ algebr Boole'a wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje podział $\{a_k : k \in K\}$ algebry $\mathbf{A}$ taki, że dla każdego $k \in K$ algebry $\mathbf{A} \upharpoonright a_k$ i $\mathbf{B}_k$ są izomorficzne.
- **Szkic dowodu**. Jeśli h_k jest izomorfizmem algebry $\mathbf{A} \upharpoonright a_k$ na algebrę $\mathbf{B}_k$, to odwzorowanie h określone wzorem $h(a) = (h_k(a \wedge a_k))_{k \in K}$ jest izomorfizmem algebry $\mathbf{A}$ na produkt $\prod\limits_{k \in K} \mathbf{B}_k$.
- Z kolei, jeśli f jest izomorfizmem algebry $\mathbf{A}$ na produkt $\prod\limits_{k \in K} \mathbf{B}_k$, to f określa rodzinę odwzorowań $f_k : \mathbf{A} \to \mathbf{B}_k$ taką, że $f(a) = (f_k(a))_{k \in K}$.

- Ponieważ f jest izomorfizmem, więc dla każdego $k \in K$ istnieje $a_k \in A$ taki, że $f_k(a_k) = 1$ oraz $f_{k'(a_k)} = 0$ dla $k' \neq k$.
- Niech $g_k : \mathbf{A} \upharpoonright a_k \to \mathbf{B}_k$ będzie określone wzorem: $g_k(a \wedge a_k) = f_k(a)$ dla $a \in A$.
- Wtedy g_k jest izomorfizmem algebry $\mathbf{A} \upharpoonright a_k$ na algebrę $\mathbf{B}_k$. □
- Mówimy, że podzbiór S algebry Boole'a jest niezależny, jeżeli dla każdego skończonego ciągu $a_1, \ldots a_n$ różnych jego elementów: $\epsilon_1 a_1 \wedge \ldots \wedge \epsilon_n a_n = 0$, gdzie $\epsilon_i \in \{-1, 1\}$ oraz $1a_i = a_i$, $-1a_i = -a_i$ dla $1 \leqslant i \leqslant n$.
- Jeżeli S jest niezależnym zbiorem generatorów algebry Boole'a $\mathbf{A}$, a $\mathbf{B}$ jest dowolną algebrą Boole's, to każde odwzorowanie $f : S \to \mathbf{B}$ można rozszerzyć do homomorfizmu. □

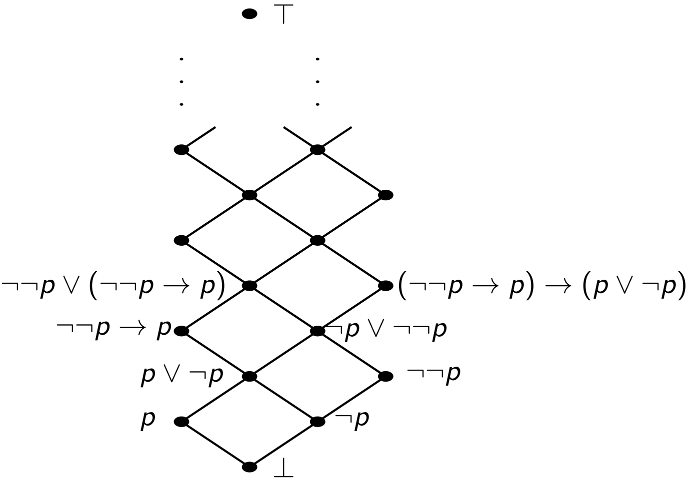
- Algebra **A** jest wolna (w klasie wszystkich algebr Boole'a) wtedy i tylko wtedy, gdy zawiera niezależny zbiór generatorów. □
- Dla każdej liczby kardynalnej κ istnieje wolna algebra Boole'a ze zbiorem wolnych generatorów mocy κ. □
- Skończona algebra Boole'a jest wolna wtedy i tylko wtedy, gdy ma 2^{2^n} elementów. Tak więc, każda czteroelementowa algebra Boole'a jest wolna. □
- Każda wolna algebra Boole'a jest produktem rodziny czteroelementowych algebr Boole'a. □
- Dwuelementowa algebra Boole'a jest jedyną nietrywialną algebrą Boole'a, która jest prosto nierozkładalna. □
- Dowolne dwie przeliczalne bezatomowe algebry Boole'a są izomorficzne. □

Podaliśmy tylko wybrane informacje dotyczące algebr Boole'a.

- Niech $(A, \wedge, \vee)$ będzie kratą. Dla dowolnych $x, y \in A$: największy element w zbiorze $\{z \in A : x \wedge z \leqslant y\}$, o ile istnieje, jest nazywany *pseudouzupełnieniem* x wzgledem y i oznaczany np. przez $x \Rightarrow y$.
- W każdej skończonej kracie dystrybutywnej istnieje pseudouzupełnienie x względem y dla wszystkich x i y.
- Jeśli $x \Rightarrow y$ istnieje dla wszystkich $x, y \in A$, to $(A, \Rightarrow, \wedge, \vee)$ nazywamy kratą implikatywną. Każda krata implikatywna jest dystrybutywna i zawiera jedynkę $1 = x \Rightarrow x$.
- Jeśli w kracie implikatywnej $(A, \Rightarrow, \wedge, \vee)$ istnieje zero 0, możemy w niej zdefiniować operację pseudouzupełnienia $-x = x \Rightarrow 0$ dla każdego $x \in A$. Wtedy $z \leqslant -x$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \wedge z = 0$, a więc $-x$ jest elementem największym zbioru $\{z \in A : x \wedge z = 0\}$.
- Algebrę $(A, \Rightarrow, \wedge, \vee, -)$ nazywamy algebrą Heytinga (algebrą pseudoboolowską), jeśli $(A, \Rightarrow, \wedge, \vee)$ jest kratą implikatywną z zerem 0 i $-x = x \Rightarrow 0$ dla wszystkich $x \in A$.

- Każda skończona krata dystrybutywna jest algebrą Heytinga.
- Algebry Boole'a to algebry Heytinga, w których $x \vee -x = 1$.
- W algebrze Boole'a $x \Rightarrow y$ rozumiemy jako $-x \vee y$.
- Niech $A = \{2^i \cdot 3^j : -1 \leqslant i - j \leqslant 2\} \cup \{\omega\}$. Porządek kratowy $\leqslant^A$ w tym zbiorze niech będzie wyznaczony przez relację podzielności, przy założeniu, że każda liczba naturalna dzieli ω, zaś ω nie dzieli żadnej liczby naturalnej. Wtedy $(A, \Rightarrow, \wedge, \vee, -)$ jest (nieskończoną) algebrą Heytinga (generowaną przez jeden element, a mianowicie $2^1 \cdot 3^0$).
- Każda skończenie generowana krata dystrybutywna jest skończona (podobnie w przypadku algebr Boole'a). Powyższy przykład pokazuje, że twierdzenie to nie zachodzi dla algebr Heytinga. Rozważmy formuły języka logiki intuicjonistycznej:

$\varphi_0 = p \wedge \neg p$, $\psi_0 = p \wedge \neg p$, $\varphi_1 = \neg p$, $\psi_1 = p$, $\varphi_2 = \neg\neg p$
$\varphi_{n+1} = \varphi_n \to \psi_n$, $\psi_{n+1} = \varphi_n \vee \psi_n$
$\varphi_\infty = p \to p = \top$, $\psi_\infty = p \to p = \top$



Krata Riegera-Nishimury

Zbiór liniowo uporządkowany $\{\mathbf{0}, a, \mathbf{1}\}$, gdzie $\mathbf{0} \leqslant a \leqslant \mathbf{1}$) z operacjami niżej określonymi jest algebrą Heytinga:

$\wedge$	$\mathbf{0}$	a	$\mathbf{1}$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
a	$\mathbf{0}$	a	a
$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$	a	$\mathbf{1}$

$\vee$	$\mathbf{0}$	a	$\mathbf{1}$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	a	$\mathbf{1}$
a	a	a	$\mathbf{1}$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$

$\Rightarrow$	$\mathbf{0}$	a	$\mathbf{1}$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$
a	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$	a	$\mathbf{1}$

x	$-x$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$
a	$\mathbf{0}$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$

Z tabelek tych widać, że $-x = \mathbf{0}$ dla wszystkich $x \neq \mathbf{0}$. Zauważmy też, że w algebrze tej nie zachodzi np.: $x \vee -x = \mathbf{1}$, ponieważ $a \vee -a = a \vee (a \Rightarrow \mathbf{0}) = a \vee \mathbf{0} = a \neq \mathbf{1}$. Ponadto, w algebrze tej nie zachodzi np. prawo Peirce'a: element $((x \Rightarrow y) \Rightarrow x) \Rightarrow x$ nie musi być równy $\mathbf{1}$.

- Rodzina wszystkich zbiorów otwartych przestrzeni topologicznej jest algebrą Heytinga (patrz niżej, w dygresji topologicznej).

W każdej algebrze Heytinga:

Jeśli $x \leqslant y$, to $-y \leqslant x$	$- - -x = -x$
$x \wedge -x = 0$	$-(x \vee y) = -x \wedge -y$
$x \leqslant - - x$	$-x \vee -y \leqslant -(x \wedge y)$

- Niech $\mathbf{A} = (A, \Rightarrow, \wedge, \vee)$ będzie kratą implikatywną. Zbiór $F \subseteq$ jest filtrem w $\mathbf{A}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $1 \in F$ oraz jeśli $x, x \Rightarrow y \in F$, to $y \in F$, dla wszystkich $x, y \in A$.
- Niech $x \Leftrightarrow y$ oznacza $(x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow x)$. Relacja $\sim_F$ określona warunkiem $x \sim_F y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \Leftrightarrow y \in F$, jest kongruencją kraty implikatywnej $\mathbf{A}$. Niech $[x]_{\sim_F} \leqslant_F [y]_{\sim_F}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \Rightarrow y \in F$. Wtedy $\leqslant_F$ jest porządkiem kratowym w $\mathbf{A}/_{\sim_F}$. Mamy $[x]_{\sim_F} \wedge [y]_{\sim_F} = [x \wedge y]_{\sim_F}$, $[x]_{\sim_F} \vee [y]_{\sim_F} = [x \vee y]_{\sim_F}$, $[x]_{\sim_F} \Rightarrow [y]_{\sim_F} = [x \Rightarrow y]_{\sim_F}$, $[x]_{\sim_F} = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in F$; w algebrach Heytinga także $[-x]_{\sim_F} = -[x]_{\sim_F}$. Odwzorowanie $h(x) = [x]_{\sim_F}$ jest homomorfizmem $\mathbf{A}$ na $\mathbf{A}/_{\sim_F}$.

- Pojęcia topologiczne formalizują takie pojęcia jak: bliskość, odległość, otoczenie, spójność, granica, wymiar, itp. Dla naszych celów potrzebne będą jedynie niektóre podstawowe pojęcia topologiczne.
- Istnieją różne sposoby określania topologii: poprzez podanie rodziny zbiorów otwartych (domkniętych), poprzez podanie układów otoczeń punktów, poprzez podanie operatora domknięcia (wnętrza), poprzez podanie bazy topologii. Są one równoważne, od jednego typu definicji przejść można do innego.
- ***Rodzina zbiorów otwartych***. Przestrzeń topologiczna to para (X, T), złożona ze zbioru X i rodziny T jego podzbiorów (zbiorów otwartych), spełniającej następujące warunki:
  1. $X \in T$, $\emptyset \in T$
  2. jeśli $A \in T$ oraz $B \in T$, to $A \cap B \in T$
  3. jeśli $\mathcal{A} \subseteq T$, to $\bigcup \mathcal{A} \in T$.
- Dopełnienia zbiorów otwartych nazywamy zbiorami domkniętymi. Zbiory, które są jednocześnie otwarte i domknięte nazywamy zbiorami otwarto-domkniętymi.

- Domknięcie zbioru A to zbiór: $cl(A) = \bigcap\{F \in \wp(X) : A \subseteq F \wedge X - F \in T\}$ (czyli najmniejszy zbiór domknięty zawierający A).
- Wnętrze zbioru A to zbiór: $int(A) = \bigcup\{U \in T : U \subseteq A\}$ (czyli największy zbiór otwarty zawarty w A).
- Brzeg zbioru A to zbiór: $fr(A) = cl(A) - int(A)$.
- Zbiór jest otwarty (domknięty) wtedy i tylko wtedy, gdy jest równy swojemu wnętrzu (domknięciu).
- Dopełnienie zbioru A w uniwersum X oznacza się często w pracach topologicznych przez A^c. Mamy:
  1. $(cl(A))^c = int(A^c)$ (dopełnienie domknięcia jest wnętrzem dopełnienia)
  2. $(int(A))^c = cl(A^c)$ (dopełnienie wnętrza jest domknięciem dopełnienia).
- Dualnym sposobem wprowadzenia topologii w X jest określenie rodziny podzbiorów domkniętych w X: domknięte są X oraz $\emptyset$, suma skończonej liczby zbiorów domkniętych jest domknięta, iloczyn dowolnej liczby zbiorów domkniętych jest domknięty.

- ***Operacja domknięcia***. Przestrzeń topologiczna to para (X, C), gdzie $C : \wp(X) \to \wp(X)$ jest operatorem domknięcia, tj. spełnia następujące warunki:
  1. $C(\emptyset) = \emptyset$
  2. $A \subseteq C(A)$
  3. $C(A \cup B) = C(A) \cup C(B)$
  4. $C(C(A)) = C(A)$.
- Wtedy $T = \{X - A \subseteq X : A = C(A)\}$ jest topologią na X oraz $C(A) = cl(A)$.
- ***Operacja wnętrza***. Przestrzeń topologiczna to para (X, I), gdzie $I : \wp(X) \to \wp(X)$ jest operatorem wnętrza, tj. spełnia następujące warunki:
  1. $I(X) = X$
  2. $I(A) \subseteq A$
  3. $I(A \cap B) = I(A) \cap I(B)$
  4. $I(I(A)) = I(A)$.
- Wtedy $T = \{A \subseteq X : A = I(A)\}$ jest topologią na X oraz $I(A) = int(A)$.

- ***Bazy topologii***. Niech rodzina $\mathcal{B} \subseteq \wp(X)$ spełnia warunki:
  1. jeśli $A \in \mathcal{B}$, $B \in \mathcal{B}$ oraz $x \in A \cap B$, to istnieje $C \in \mathcal{B}$ taki, że $C \subseteq A \cap B$
  2. dla każdego $x \in X$ istnieje $A \in \mathcal{B}$ taki, że $x \in A$.
- Wtedy $\mathcal{B}$ jest bazą topologii T w X, co oznacza, że każdy zbiór należący do T można przedstawić jako sumę pewnej podrodziny rodziny $\mathcal{B}$.
- ***Bazy otoczeń***. Niech dla każdego punktu $x \in X$ dana będzie rodzina $\mathcal{B}(x)$ podzbiorów zbioru X, spełniająca następujące warunki:
  1. $\mathcal{B}(x) \neq \emptyset$ dla każdego $x \in X$
  2. $x \in A$ dla każdego $A \in \mathcal{B}(x)$
  3. jeśli $x \in X$, $y \in X$, $x \in A$, $A \in \mathcal{B}(y)$, to istnieje $B \in \mathcal{B}(x)$ taki, że $B \subseteq A$
  4. jeśli $x \in X$, $A \in \mathcal{B}(x)$, $B \in \mathcal{B}(x)$, to istnieje $C \in \mathcal{B}(x)$ taki, że $C \subseteq A \cap B$.
- Wtedy rodzinę $\mathcal{B}(x)$ nazywamy systemem (bazą) otoczeń otwartych punktu x. Bazy otoczeń wyznaczają topologię T w X, a mianowicie zbiorami otwartymi tej topologii są te podzbiory zbioru X, które można przedstawić jako sumy pewnych podrodzin systemów otoczeń.

- Niech (X, T_X) i (Y, T_Y) będą przestrzeniami topologicznymi. Mówimy, że funkcja $f : X \to Y$ jest ciągła w punkcie $x \in X$, jeśli dla każdego otoczenia V punktu $f(x)$ istnieje otoczenie U punktu x takie, że $f(U) \subseteq V$.
- Funkcja f jest ciągła, jeśli jest ciągła w każdym punkcie $x \in X$.
- Homeomorfizmem przestrzeni (X, T_X) i (Y, T_Y) nazywamy taką bijekcję $f : X \to Y$, która jest ciągła i której funkcja odwrotna też jest ciągła.
- Mówimy, że topologia T_1 jest uboższa od topologii T_2, jeśli $T_1 \subseteq T_2$.

- Przestrzeń topologiczną nazywamy przestrzenią Hausdorffa, jeśli każde dwa jej różne punkty mają rozłączne otoczenia.
- Zwartość. Przestrzeń topologiczna jest zwarta, jeśli z każdego jej pokrycia zbiorami otwartymi mozna wybrać pokrycie skończenie wielu takimi zbiorami.
- Spójność. Przestrzeń topologiczna jest spójna, jeśli nie jest ona sumą dwóch niepustych rozłącznych zbiorów otwartych.
- Dobra spójność. Przestrzeń topologiczna (X, int) jest dobrze spójna, gdy dla dowolnych zbiorów A i B spełniony jest warunek: jeśli $X = (int(A) \cup int(B))$, to $A = X$ lub $B = X$. Każda przestrzeń dobrze spójna jest spójna.
- Zbiory regularnie otwarte. Zbiór A jest regularnie otwarty, jeśli jest on równy wnętrzu swojego domknięcia, czyli $A = int(cl(A))$. Ten warunek jest równoważny temu, że $fr(A) = fr(cl(A))$.
- Przestrzeń całkowicie niespójna to przestrzeń topologiczna, w której jedynymi zbiorami spójnymi są: zbiór pusty oraz zbiory jednoelementowe.

- Topologia dyskretna. Zbiorami otwartymi są wszystkie podzbiory uniwersum. Topologia antydyskretna. Jedyne zbiory otwarte to cała przestrzeń i zbiór pusty.
- Topologia naturalna w $\mathbb{R}$. Zbiorami otwartymi w tej topologii są dowolne sumy przedziałów otwartych.
- Topologia metryczna. Parę (X, d) nazywamy *przestrzenią metryczną*, a d nazywamy *metryką* (*funkcją odległości*) w X, gdy $X \neq \emptyset$, zaś d jest dwuargumentową funkcją określoną na X i przyjmującą nieujemne wartości rzeczywiste taką, że:
  1. $d(x, y) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y$
  2. $d(x, y) = d(y, x)$ (*warunek symetrii*)
  3. $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$ (*warunek trójkąta*).
- Pojęcia *kuli otwartej* $K(x, r)$ oraz *kuli domkniętej* $\overline{K}(x, r)$ (o środku w punkcie x oraz promieniu r) definiujemy w naturalny sposób:
  1. $K(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$
  2. $\overline{K}(x, r) = \{y \in X : d(x, y) \leqslant r\}$.
- Bazę topologii w przestrzeni z metryką tworzą wszystkie kule otwarte.

- Topologia produktowa. Niech $(X_i, T_i)_{i \in I}$ będzie rodziną przestrzeni topologicznych. W produkcie $\prod\limits_{i \in I} X_i$ określa się topologię produktową jako najuboższą topologię, przy której wszystkie funkcje rzutowania są ciągłe.
- Topologia porządkowa. W zbiorze liniowo uporządkowanym wprowadzić można topologię, traktując jako jej bazę wszystkie przedziały otwarte.
- Jeśli (X, T) jest przestrzenią topologiczną, to zarówno rodzina wszystkich zbiorów otwartych, jak i rodzina wszystkich zbiorów domkniętych są kratami (porządek to inkluzja).
- Jeśli (X, T) jest przestrzenią topologiczną, to krata wszystkich jej zbiorów otwartych jest algebrą Heytinga. Operacja pseudouzupełnienia $A \Rightarrow B$ definiowana jest jako $int(A^c \cup B)$.

- Niech $U_{\mathbf{B}}$ będzie rodziną wszystkich ultrafiltrów algebry Boole'a $\mathbf{B}$.
- Dla każdego $x \in B$ niech $u(x) = \{U \in U_{\mathbf{B}} : x \in U\}$.
- Wtedy rodzina $\{u(x) : x \in B\}$ jest bazą topologii w zbiorze $U_{\mathbf{B}}$, a zbiór $U_{\mathbf{B}}$ z tą topologią nazywamy przestrzenią Stone'a algebry $\mathbf{B}$.
- Odwzorowanie $u : B \to \wp(U_{\mathbf{B}})$ jest izomorfizmem algebry $\mathbf{B}$ i ciała zbiorów otwarto-domkniętych w tej topologii.
- Przestrzeń Stone'a algebry Boole'a $\mathbf{B}$ jest zwartą i całkowicie niespójną przestrzenią Hausdorffa.
- Algebry Boole'a $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ są izomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy ich przestrzenie Stone'a są homeomorficzne.

- Algebry Boole'a scharakteryzować można różnymi zestawami warunków. Powiemy, że algebra $\mathbf{A} = (A, \wedge, \vee, -, \triangleright, \div)$ jest algebrą Boole'a, gdy:
  1. $(a \wedge b) \vee c = (b \vee c) \wedge (a \vee c)$
  2. $(a \vee b) \wedge c = (b \wedge c) \vee (a \wedge c)$
  3. $a \vee (b \wedge -b) = a$
  4. $a \wedge (b \vee -b) = a$
  5. $a \triangleright b = -a \vee b$
  6. $a \div b = (a \triangleright b) \wedge (b \triangleright a)$.
- Operację $\triangleright$ nazywamy koróżnicą, a operację $\div$ koróżnicą symetryczną. W tej aksjomatyce można udowodnić, że dla dowolnych a i b: $(a \vee -a) = (b \vee -b)$ oraz $(a \wedge -a) = (b \wedge -b)$. Można zatem jednoznacznie określić zero $0 = a \wedge -a$ oraz jedynkę $1 = a \vee -a$ tej algebry. Ponadto, można określić porządek $\leqslant$: $a \leqslant b$, gdy $(a \triangleright b) = 1$. Relację $\leqslant$ nazywamy wtedy porządkiem boolowskim.

- Podzbiór F uniwersum algebry Boole'a jest filtrem, gdy dla dowolnych $a, b \in A$: $a \wedge b \in F$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a \in F$ oraz $b \in F$. Maksymalne filtry algebry to jej ultrafiltry.
- U jest ultrafiltrem algebry $\mathbf{A}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $a \in A$: dokładnie jeden z elementów a, $-a$ należy do U.
- Filtr właściwy jest ultrafiltrem, wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $a, b \in A$ zachodzi równoważność: $a \vee b \in U$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a \in U$ lub $b \in U$.
- Dla każdego niepustego podzbioru X uniwersum algebry $\mathbf{A}$: X jest zawarty w pewnym filtrze właściwym tej algebry wtedy i tylko wtedy, gdy dowolny skończony iloczyn elementów zbioru X jest różny od zera tej algebry.
- Każdy filtr właściwy algebry $\mathbf{A}$ jest zawarty w pewnym jej ultrafiltrze.
- Dla każdego elementu a różnego od zera algebry $\mathbf{A}$ istnieje ultrafiltr U tej algebry taki, że $a \in U$.

- Algebrę $\mathbf{A} = (A, \wedge, \vee, -, \triangleright, \div, I)$ nazywamy topologiczną algebrą Boole'a, gdy $\mathbf{A} = (A, \wedge, \vee, -, \triangleright, \div)$ jest algebrą Boole'a, zaś I jest operacją (wnętrza), spełniającą warunki:
  1. $I(1) = 1$
  2. $I(a) \leqslant a$
  3. $I(a \wedge b) = I(a) \wedge I(b)$
  4. $I(I(a)) = I(a)$.
- Topologiczną algebrę Boole'a $\mathbf{A} = (A, \wedge, \vee, -, \triangleright, \div, I)$ nazywamy dobrze spójną, gdy dla dowolnych $a, b \in A$: jeśli $(I(a) \vee I(b)) = 1$, to $a = 1$ lub $b = 1$.
- Algebrę $\mathbf{A} = (A, \wedge, \vee, -, \triangleright, \div, \circ)$ nazywamy B-algebrą, gdy $\mathbf{A} = (A, \wedge, \vee, -, \triangleright, \div)$ jest algebrą Boole'a, zaś $\circ$ dowolną operacją dwuargumentową tej algebry.
- Ultrafiltr boolowski U nazywamy ultrafiltrem normalnym algebry $\mathbf{A} = (A, \wedge, \vee, -, \triangleright, \div, \circ)$, gdy dla dowolnych $a, b \in A$ spełniony jest warunek: $a \circ b \in U$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = b$.

- **Twierdzenie**. W B-algebrze $\mathbf{A} = (A, \wedge, \vee, -, \rhd, \div, \circ)$ istnieje ultrafiltr normalny wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych n i m oraz każdych ciągów skończonych $c_1, \ldots, c_n$, $a_1, \ldots, a_m$, $b_1, \ldots, b_m$ jej elementów zachodzi warunek: jeżeli $\bigwedge\limits_{i=1}^{n} (c_i \circ c_i) \leqslant \bigvee\limits_{j=1}^{m} (a_j \circ b_j)$, to $a_j = b_j$. $\square$
- B-algebrę $\mathbf{A} = (A, \wedge, \vee, -, \rhd, \div, \circ)$ nazywamy TB-algebrą, gdy dla dowolnych $a, b, c, d \in A$ zachodzą warunki:
  1. $a \circ a = 1$
  2. $(a \circ b) \leqslant (a \div b)$
  3. $(a \circ b) \wedge (c \circ d) \leqslant (a \diamond c) \circ (b \diamond d)$, gdzie $\diamond$ jest jedną z operacji $\wedge$, $\vee$, $\circ$.
- Dla dowolnej TB-algebry $\mathbf{A} = (A, \wedge, \vee, -, \rhd, \div, \circ)$ i dowolnego $a \in A$ operacja I określona przez warunek $I(a) = a \circ 1$ jest topologiczną operacją wnętrza.
- Dla dowolnej topologicznej algebry Boole'a $\mathbf{A} = (A, \wedge, \vee, -, \rhd, \div, I)$ operacja $\circ$ określona przez warunek $a \circ b = I(a \div b)$ spełnia warunki występujące w definicji TB-algebry.

- Element a nazywamy otwartym w TB-algebrze $\mathbf{A}$, gdy $a \circ 1 = a$. Z każdym elementem a możemy stowarzyszyć element otwarty $a \circ 1$. Ponieważ $(a \circ b) \circ 1 = a \circ b$, więc zbiór $\{a \circ 1 : a \in A\}$ jest równy zbiorowi $\{a \circ b : a, b \in A\}$.
- TB-algebrę $\mathbf{A} = (A, \wedge, \vee, -, \triangleright, \div, \circ)$ nazywamy dobrze spójną, gdy dla dowolnych $a, b, c, d \in A$ zachodzi warunek: jeśli $(a \circ b) \vee (c \circ d) = 1$, to $a = b$ lub $c = d$.
- **Twierdzenie**. W dowolnej TB-algebrze $\mathbf{A} = (A, \wedge, \vee, -, \triangleright, \div, \circ)$ istnieje ultrafiltr normalny wtedy i tylko wtedy, gdy ta algebra jest dobrze spójna. $\square$

- Algebrę $\mathbf{A} = (A, \wedge, \vee, -, \triangleright, \div, \circ)$ nazywamy algebrą Henlego (H-algebrą), gdy $\mathbf{A} = (A, \wedge, \vee, -, \triangleright, \div)$ jest algebrą Boole'a, a operacja $\circ$ spełnia warunek: $a \circ b = 1$, gdy $a = b$ oraz $a \circ b = 0$, gdy $a \neq b$.
- Każda algebra Henlego jest TB-algebrą. Operator wnętrza I w algebrach Henlego jest określony warunkiem $I(a) = a \circ 1$ i ma następującą własność: $I(a) = 1$, gdy $a = 1$, $I(a) = 0$, gdy $a \neq 1$. Oznacza to, że ten operator jest antydyskretnym operatorem wnętrza. Ponadto, każdy ultrafiltr algebry Boole'a $\mathbf{A} = (A, \wedge, \vee, -, \triangleright, \div)$ jest ultrafiltrem normalnym w tej algebrze.
- W dwuelementowej algebrze Henlego $\mathbf{A} = (\{0, 1\}, \wedge, \vee, -, \triangleright, \div, \circ)$ operacja $\circ$ jest identyczna z operacją $\div$.