Semiotyka logiczna (2)

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl

pogon@amu.edu.pl

11 X 2007

Przypomnienie: podstawowe pojęcia logiczne

Plan na dziś jest nieskomplikowany. Trochę będziemy filozofować, a dla urozmaicenia wykonamy też kilka prostych ćwiczeń (gimnastyka logiczna). Filozofować będziemy na następujące tematy:

- Co to jest stała logiczna?
- Jak wynikanie logiczne (w Klasycznym Rachunku Logicznym) ma się do uznawania wnioskowań (w językach etnicznych) za poprawne?

Ćwiczenia będą dotyczyć logicznej analizy tekstów/wypowiedzi oraz badania poprawności uzasadnień.

Uwaga. W niniejszej prezentacji jedynie sygnalizujemy tematy, które będą omawiane.

Pojęcie stałej logicznej

Jedną z charakterystyk pojęcia stałej logicznej podał Alfred Tarski, wzorując się na Programie z Erlangen Feliksa Kleina.

Niech $f : U \to U$ będzie bijekcją. Niezmiennikiem f nazwiemy każdy element $x \in U$ taki, że $f(x) = x$.

Warunkiem koniecznym, aby jakiś symbol (ustalonego języka formalnego) był stałą logiczną tego języka jest to, aby jego denotacja była niezmiennikiem wszystkich permutacji uniwersum każdej interpretacji tego języka.

Pytanie do słuchaczy. Które symbole języka KRP (z identycznością) są stałymi logicznymi w myśl tej charakterystyki?

Różnorodność systemów logicznych

Logika (system logiczny) to układ postaci (L, C, S), gdzie:

- L jest językiem (formalnym)
- C jest operacją konsekwencji
- S jest semantyką systemu.

Skonstruowano gigantyczną liczbę systemów logicznych. Niektóre z nich znalazły bardzo istotne zastosowania, inne przepadły w zapomnieniu.

Powstaje oczywiście pytanie: czy można zasadnie mówić o jednej, podstawowej, standardowej logice (*the logic*)?
Pewnych rozstrzygnięć w próbie znalezienia odpowiedzi na to pytanie dostarczają twierdzenia limitacyjne.

Metody dowodzenia

Jest wiele metod dowodzenia. Oto niektóre:

- metoda aksjomatyczna
- metoda założeniowa
- tablice analityczne
- rezolucja
- rachunki sekwentów.

Słuchacze mieli okazję poznać co najmniej dwie z nich. Wykonamy teraz kilka ćwiczeń, dla przypomnienia, jak się dowodzi.

Ćwiczenie 1: dowód metodą aksjomatyczną

Udowodnimy, że formuła $\neg p \rightarrow \neg(p \wedge q)$ jest tezą KRZ z aksjomatyką Hilberta-Bernaysa oraz regułami: podstawiania i odrywania jako regułami pierwotnymi.

1.	$(p \wedge q) \rightarrow p$	aksjomat (prawo symplifikacji)
2.	$(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$	aksjomat (prawo transpozycji)
3.	$((p \wedge q) \rightarrow p) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg(p \wedge q))$	$p \mapsto p \wedge q$, $q \mapsto p$
4.	$\neg p \rightarrow \neg(p \wedge q)$	RO: 3,1.

Dowody przeprowadzane metodą aksjomatyczną wymagają pewnej wprawy. W praktyce bodaj częściej używa się dowodów założeniowych.

Ćwiczenie 2: dowód metodą założeniową

Udowodnimy metodą założeniową tezę KRZ:
$((p \wedge q) \to r) \to (p \to (q \to r)$ (prawo eksportacji) w systemie założeniowym zawierającym jako reguły pierwotne m.in.: regułę odrywania RO i regułę dołączania koniunkcji DK:

1.	$(p \wedge q) \to r$	założenie
2.	p	założenie
3.	q	założenie
4.	$p \wedge q$	DK: 2,3
5.	r	RO: 1,5

Słuchacze pamiętają (oczywiście!), że powyższy ciąg formuł jest żądanym dowodem.

Ćwiczenie 3: dowód rezolucyjny

Pokażemy, że warunki przechodniości i symetrii, tj. warunki:

$$\forall x \forall y \forall z((P(x, y) \wedge P(y, z)) \rightarrow P(x, z))$$

$$\forall x \forall y(P(x, y) \rightarrow P(y, x))$$

implikują następujący warunek (euklidesowości):

$$\forall x \forall y \forall z((P(x, y) \wedge P(z, y)) \rightarrow P(x, z)).$$

Powyższe warunki mają następujące reprezentacje w postaci klauzul (po rozdzieleniu zmiennych):

- $C_1 = \{\neg P(x, y), \neg P(y, z), P(x, z)\}$
- $C_2 = \{\neg P(u, v), P(v, u)\}$
- $C_3 = \{\neg P(x, y), \neg P(z, y), P(x, z)\}$.

Ćwiczenie 3: dowód rezolucyjny

Dowód rezolucyjny C_3 z C_1 oraz C_2 jest następującym ciągiem klauzul:

- $D_1 = C_1 = \{\neg P(x,y), \neg P(y,z), \underline{P(x,z)}\}$
- $D_2 = C_2\{u \mapsto x, v \mapsto z\} = \{\neg \underline{P(u,v)}, P(v,u)\}\{u \mapsto x, v \mapsto z\} = \{\underline{\neg P(x,z)}, P(z,x)\}$
- $D_3 = \{\neg P(x,y), \neg P(y,z), \underline{P(z,x)}\}$ (rezolwenta D_1 oraz D_2)
- $D_4 = C_2\{u \mapsto z, v \mapsto x\} = \{\neg \underline{P(u,v)}, P(v,u)\}\{u \mapsto z, v \mapsto x\} = \{\underline{\neg P(z,x)}, P(x,z)\}$
- $D_5 = \{\neg P(x,y), \underline{\neg P(y,z)}, P(x,z)\}$ (rezolwenta D_3 i D_4)
- $D_6 = C_2\{u \mapsto z, v \mapsto y\} = \{\neg P(u,v), \underline{P(v,u)}\}\{u \mapsto z, v \mapsto y\} = \{\neg P(z,y), \underline{P(y,z)}\}$
- $D_7 = \{\neg P(x,y), \neg P(z,y), P(x,z)\} = C_3$ (rezolwenta D_5 i D_6).

Ćwiczenie 3: dowód rezolucyjny

Rezolucyjne drzewo dowodowe wygląda w tym przypadku następująco:

$$\dfrac{D_6 \qquad \dfrac{D_4 \qquad \dfrac{D_1 \qquad D_2}{D_3}}{D_5}}{D_7}$$

Powyższy dowód rezolucyjny C_3 z C_1 oraz C_2 składał się z trzech kroków. W każdym z nich z pary klauzul otrzymaliśmy rezolwentę tej pary. W każdym kroku podkreślaliśmy ten literał, względem którego dokonaliśmy rezolucji (tj. ten, który eliminujemy w wyniku danego kroku).

Ćwiczenie 4: drzewa semantyczne

Dowód Prawa De Morgana w KRP.

Jedno z Praw De Morgana dla kwantyfikatorów ma postać:

$$\neg\exists x\, A(x) \leftrightarrow \forall x\, \neg A(x)$$

Aby wykazać, że

$$\neg\exists x\, A(x) \leftrightarrow \forall x\, \neg A(x)$$

jest tautologią KRP należy wykluczyć możliwość, by formuła ta była fałszywa w jakiejś interpretacji. Trzeba zatem wykluczyć możliwość, aby jej zaprzeczenie, tj. formuła

$$\neg(\neg\exists x\, A(x) \leftrightarrow \forall x\, \neg A(x))$$

była w jakiejkolwiek interpretacji prawdziwa:

Ćwiczenie 4: drzewa semantyczne

$$\neg(\neg\exists x\, A(x) \leftrightarrow \forall x\, \neg A(x)) \quad 1.^{\neg\leftrightarrow}$$

(1_{lg}) $\neg\exists x\, A(x)$ $3.^{\star a}$

(1_{ld}) $\neg\forall x\, \neg A(x)$ $2.^{\surd a}$

(2) $\neg\neg A(a/x)$

(3) $\neg A(a/x)$

$\times_{2,3}$

(1_{pg}) $\forall x\, \neg A(x)$ $6.^{\star a}$

(1_{pd}) $\neg\neg\exists x\, A(x)$ $4.^{\neg\neg}$

(4) $\exists x\, A(x)$ $5.^{\surd a}$

(5) $A(a/x)$

(6) $\neg A(a/x)$

$\times_{5,6}$

Ćwiczenie 4: drzewa semantyczne

Ustalanie, czy dowolna formuła języka Klasycznego Rachunku Predykatów jest prawem (tautologią) tego rachunku jest przykładem problemu, dla którego **nie istnieje** metoda obliczalna jego rozwiązania.

Dla ustalenia, czy **dowolna** formuła języka KRP jest tautologią KRP potrzeba sprawdzić **nieskończoną** liczbę interpretacji, a więc istnienie algorytmu jest w tym przypadku wykluczone.

Np. ta formuła nie jest tautologią KRP:

$$\forall x \exists y\, A(x, y) \rightarrow \exists y \forall x\, A(x, y)$$

Uwaga: KRP jest **półrozstrzygalny** — jeśli formuła A **jest** tautologią KRP, to można to w **skończonej** liczbie kroków sprawdzić.

Ćwiczenie 4: drzewa semantyczne

Używanie metody drzew semantycznych (tablic analitycznych) jako metody dowodowej musi być oczywiście połączone z dowodem, że metoda ta jest poprawna (czyli że drzewa zamknięte mają dokładnie wszystkie tautologie).

Implikacja odwrotna do podanej przed chwilą, czyli:

$$\exists x \forall y\ R(y,x) \rightarrow \forall y \exists x\ R(y,x)$$

jest tautologią Klasycznego Rachunku Predykatów, a więc można tego dowieść w skończonej liczbie kroków (pokazując, iż negacja tej formuły nie jest prawdziwa w żadnej interpretacji):

Ćwiczenie 4: drzewa semantyczne

$$\neg(\exists x \forall y\ R(y,x) \rightarrow \forall y \exists x\ R(y,x)) \quad ^{1.\neg\rightarrow}$$

$$(1_g)\ \ \exists x \forall y\ R(y,x) \quad ^{2.\surd a}$$

$$(1_d)\ \ \neg\forall y \exists x\ R(y,x) \quad ^{3.\surd b}$$

$$(2)\ \ \forall y\ R(y,a) \quad ^{4.\star b}$$

$$(3)\ \ \neg\exists x\ R(b,x) \quad ^{5.\star a}$$

$$(4)\ \ R(b,a)$$

$$(5)\ \ \neg R(b,a)$$

$$\times_{4,5}$$

Ćwiczenie 4: drzewa semantyczne

Rozważmy (mało optymistyczne) stwierdzenie: Nie dość, że jest bezrobocie, to każdy obywatel jest zadłużony. Jego strukturę składniową reprezentuje formuła:

$$\exists x\, Px \wedge \forall y \exists z\, yQz$$

która nie jest tautologią Klasycznego Rachunku Predykatów, co można wykazać konstruując model dla jej zaprzeczenia. Formuła ta nie jest też kontrtautologią (formułą fałszywą we wszystkich interpretacjach), ale nie można tego wykazać używając półalgorytmu stosowanego w poprzednim przypadku (wymagane drzewo dowodowe jest nieskończone):

$$\exists x\, Px \wedge \forall y \exists z\, yQz \quad ^{1.\wedge}$$

$$(1_g) \quad \exists x\, Px \quad ^{2.\surd a}$$

$$(1_d) \quad \forall y \exists z\, yQz \quad ^{3.\star a\ 5.\star b\ 7.\star c}$$

$$(2) \quad Pa$$

$$(3) \quad \exists z\, aQz \quad ^{4.\surd b}$$

$$(4) \quad aQb$$

$$(5) \quad \exists z\, bQz \quad ^{6.\surd c}$$

$$(6) \quad bQc$$

$$(7) \quad \exists z\, cQz$$

$$\vdots$$

Ćwiczenie 5: dowód, że 2+2=4

Aksjomaty specyficzne systemu Arytmetyki Robinsona:

- A_1: $\forall x \forall y\ (x \neq y \rightarrow \sigma(x) \neq \sigma(y))$
- A_2: $\forall x\ \bigcirc \neq \sigma(x)$
- A_3: $\forall x\ (x \neq \bigcirc \rightarrow \exists y\ (x = \sigma(y)))$
- A_4: $\forall x\ \oplus(x, \bigcirc) = x$
- A_5: $\forall x \forall y\ \oplus(x, \sigma(y)) = \sigma(\oplus(x, y))$
- A_6: $\forall x\ \otimes(x, \bigcirc) = \bigcirc$
- A_7: $\forall x \forall y\ \otimes(x, \sigma(y)) = \oplus(\otimes(x, y), x)$.

Modelem zamierzonym dla tych aksjomatów jest struktura, której uniwersum jest zbiór wszystkich (i tylko!) liczb naturalnych, a denotacjami poszczególnych terminów pozalogicznych są:

symbolu $\bigcirc$	—	liczba zero	symbolu σ	—	operacja następnika
symbolu $\oplus$	—	operacja dodawania	symbolu $\otimes$	—	operacja mnożenia.

Ćwiczenie 5: dowód, że 2+2=4

1.	$\forall x \ \oplus(x, \bigcirc) = x$	aksjomat A_4
2.	$\forall x \forall y \ \oplus(x, \sigma(y)) = \sigma(\oplus(x, y))$	aksjomat A_5
3.	$\neg(\oplus(\sigma(\sigma(\bigcirc)), \sigma(\sigma(\bigcirc))) = \sigma(\sigma(\sigma(\sigma(\bigcirc)))))$	z. d. n.
4.	$\oplus(\sigma(\sigma(\bigcirc)), \bigcirc) = \sigma(\sigma(\bigcirc))$	$R(\forall)$ dla $\sigma(\sigma(\bigcirc))$ w A_4
5.	$\forall y \ \oplus(\sigma(\sigma(\bigcirc)), \sigma(y)) = \sigma(\oplus(\sigma(\sigma(\bigcirc)), y))$	$R(\forall)$ dla $\sigma(\sigma(\bigcirc))$ w A_5
6.	$\oplus(\sigma(\sigma(\bigcirc)), \sigma(\bigcirc)) = \sigma(\oplus(\sigma(\sigma(\bigcirc)), \bigcirc))$	$R(\forall)$ dla $\bigcirc$ w 5.
7.	$\oplus(\sigma(\sigma(\bigcirc)), \sigma(\sigma(\bigcirc))) = \sigma(\oplus(\sigma(\sigma(\bigcirc)), \sigma(\bigcirc)))$	$R(\forall)$ dla $\sigma(\bigcirc)$ w 5.
8.	$\oplus(\sigma(\sigma(\bigcirc)), \sigma(\sigma(\bigcirc))) = \sigma(\oplus(\sigma(\sigma(\bigcirc)), \bigcirc))$	6. i 7., $R(=)$
9.	$\oplus(\sigma(\sigma(\bigcirc)), \sigma(\sigma(\bigcirc))) = \sigma(\sigma(\sigma(\sigma(\bigcirc))))$	4. i 8., $R(=)$
10.	$\times_{3,9}$	Sprzeczność: 3, 9.

Wynikanie logiczne a akceptowalność uzasadnień

We wnioskowaniach przeprowadzanych w językach etnicznych bierze się pod uwagę, oprócz (!) wynikania logicznego, mnóstwo innych czynników, np.:

- implikatury
- kontekst wypowiedzeń
- presupozycje
- intensjonalność
- intencjonalność
- postawy propozycjonalne
- tajemniczy „współczynnik humanistyczny", itd.

Nie ma jednego systemu logicznego, który uwzględniałby wszystkie te (oraz dalsze) czynniki. A niby dlaczego miałby istnieć taki system?

Koniec

Tyle tytułem (dalszego ciągu) wprowadzenia w problematykę semiotyki logicznej.

Na następnym wykładzie zajmiemy się:

- paradoksami
- antynomiami
- sofizmatami.