Dowody założeniowe w KRZ

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl
pogon@amu.edu.pl

w styczniu 2007

Dowody założeniowe w KRZ

Gdy miałaś w dzieciństwie (w szkole) udowodnić jakieś twierdzenie, to zwykle sytuacja wyglądała tak:

- dane były jakieś założenia
- twoim zadaniem było wyprowadzenie z nich tezy
- w dowodzie mogłaś korzystać z tez udowodnionych już wcześniej
- możliwe były dwa rodzaje dowodów: wprost oraz nie wprost.

I nic się nie zmieniło (tylko ty jesteś starsza) — w dalszym ciągu jest to jedna z metod dowodzenia twierdzeń.
Na wykładach pokażemy jej działanie w przypadku KRZ.
Określimy (nowe!) pojęcie tezy KRZ i pokażemy, jak otrzymuje się tezy KRZ. Okaże się, że tezy KRZ są dokładnie prawami KRZ.

Reguły (dla metody założeniowej w KRZ):

Wszystkie reguły mają postać zaleceń: jeśli do dowodu należą pewne formuły, to do dowodu dołączyć można pewne inne formuły.
Reguły dotyczą zatem czysto syntaktycznych operacji na układach formuł.
Warto jednak zwrócić uwagę, że operacje te korespondują z semantycznymi własnościami spójników prawdziwościowych.

- (RO) Reguła odrywania. Jeśli do dowodu należy implikacja oraz jej poprzednik, to do dowodu wolno dołączyć następnik tej implikacji.
- (DK) Reguła dołączania koniunkcji. Do dowodu wolno dołączyć koniunkcję, o ile oba jej człony należą do dowodu.
- (OK) Reguła opuszczania koniunkcji. Jeśli do dowodu należy koniunkcja, to wolno dołączyć do dowodu każdy z jej członów.

Reguły (dla metody założeniowej w KRZ):

- (DA) Reguła dołączania alternatywy. Do dowodu wolno dołączyć alternatywę, o ile któryś z jej członów należy do dowodu.
- (OA) Reguła opuszczania alternatywy. Jeśli do dowodu należy alternatywa oraz negacja jednego z jej członów, to do dowodu wolno dołączyć drugi człon tej alternatywy.
- (DR) Reguła dołączania równoważności. Do dowodu wolno dołączyć równoważność, o ile należy do dowodu implikacja, której poprzednikiem jest pierwszy człon tej równoważności, a następnikiem — drugi jej człon, jak i implikacja odwrotna.
- (OR) Reguła opuszczania równoważności. Jeśli do dowodu należy równoważność, to wolno dołączyć do dowodu zarówno implikację, której poprzednikiem jest pierwszy człon tej równoważności, a następnikiem — drugi jej człon, jak i implikację odwrotną.

Dowody założeniowe w KRZ

- **Uwaga 1.** Zauważ, że w podanych wyżej regułach nie ma ani słowa o **prawdzie**.
- **Uwaga 2.** Zauważ, że reguły są dwóch rodzajów: dotyczą wprowadzania lub opuszczania stałych logicznych. W szczególności, (RO) jest regułą opuszczania implikacji. Dualna do niej reguła wprowadzania implikacji zostanie omówiona później.
- **Uwaga 3.** Na różne sposoby można układać zestawy reguł systemu założeniowego dla KRZ. Podany tu zestaw bierze pod uwagę to, że twoim zalecanym tekstem z logiki są *Ćwiczenia z logiki* autorstwa Pani Profesor Barbary Stanosz. W skrypcie Pani Profesor Katarzyny Paprzyckiej *Samouczek logiki zdań i logiki kwantyfikatorów* (z którego również korzystaliśmy) używa się innego zestawu reguł.

Tezy systemu założeniowego KRZ

Dowodem formuły A ze zbioru przesłanek X w systemie założeniowym KRZ nazywamy każdy ciąg $A_1, A_2, \ldots, A_n$ formuł języka KRZ taki, że:

- A jest tożsama z A_n;
- każda z formuł A_i ($1 \leqslant i \leqslant n$) bądź należy do X bądź jest otrzymana jako wniosek którejś z reguł wnioskowania, której przesłanki występują w tym ciągu wcześniej od A_i.

Tezą systemu założeniowego KRZ nazywamy każdą formułę języka KRZ, która posiada dowód założeniowy z pustego zbioru przesłanek.

Twierdzenie (o trafności i pełności). Tezy systemu założeniowego KRZ to dokładnie wszystkie prawa KRZ.

Dowody założeniowe wprost

Dowodem założeniowym wprost formuły postaci $A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow (A_3 \rightarrow \ldots \rightarrow (A_n \rightarrow A) \ldots)$ jest każdy ciąg formuł taki, że:

- formuły $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ są początkowymi elementami tego ciągu (założeniami dowodu);
- pozostałymi elementami tego ciągu są:
  - wnioski z reguł, których przesłanki znajdują się wcześniej w tym ciągu, **lub**
  - tezy udowodnione wcześniej.
- Dowód jest zakończony, gdy elementem tego ciągu jest formuła A.

Dowód założeniowy wprost tezy, która nie jest implikacją zaczyna się od tez wcześniej udowodnionych (jako założeń).

Dowody założeniowe nie wprost

Dowodem założeniowym nie wprost formuły postaci
$A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow (A_3 \rightarrow \ldots \rightarrow (A_n \rightarrow A) \ldots)$ jest każdy ciąg formuł taki, że:

- formuły $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ są początkowymi elementami tego ciągu (założeniami dowodu);
- elementem tego ciągu jest $\neg A$ (założenie dowodu nie wprost, w skrócie: z.d.n.);
- pozostałymi elementami tego ciągu są:
  - wnioski z reguł, których przesłanki znajdują się wcześniej w tym ciągu, **lub**
  - tezy udowodnione wcześniej.
- Dowód jest zakończony, gdy w ciągu tym występuje para formuł wzajem sprzecznych.

Reguły wtórne

Na przykład dowód założeniowy nie wprost prawa podwójnej negacji PPN $\neg\neg p \rightarrow p$ ma postać:

1.	$\neg\neg p$	zał.
2.	$\neg p$	z.d.n.

Dowód założeniowy nie wprost formuły A, która nie jest implikacją zawiera jako jedyne założenie formułę $\neg A$, czyli z.d.n.

Zestaw reguł można rozszerzać o reguły wtórne, które wyprowadzalne są z pierwotnych reguł systemu.

Na przykład, po udowodnieniu PPN można przyjąć jako regułę wtórną regułę opuszczania podwójnej negacji (ON): jeśli do dowodu należy formuła postaci $\neg\neg A$, to do dowodu można dołączyć formułę A.

Założenia dodatkowe

W dowodzie założeniowym formuły C można przyjąć założenie dodatkowe A. Jeśli wyprowadzona zostanie z niego formuła B, to do dowodu można dołączyć implikację $A \rightarrow B$.
Przy tym, z formuł tworzących dowód B z założenia A nie wolno korzystać w dowodzie formuły C.
Przyjmowanie założeń dodatkowych jest zatem pewną formą reguły wprowadzania implikacji.

Notacja dotycząca dowodów założeniowych omówiona zostanie na wykładzie.

Ponieważ zachodzi twierdzenie o trafności i pełności, metodę dowodów założeniowych stosować można do rozstrzygania wszelkich zagadnień w KRZ (tautologiczność, semantyczna niesprzeczność, wynikanie logiczne).