NIEWYRAŻALNA TĘSKNOTA
ZA MODELEM ZAMIERZONYM

Jerzy Pogonowski

Odczyt wygłoszony 10 czerwca 2010 roku
na spotkaniu *Grupy Logiki, Języka i Informacji*,
Uniwersytet Opolski

NIEWYRAŻALNA TĘSKNOTA ZA MODELEM ZAMIERZONYM

Jerzy Pogonowski
Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl
pogon@amu.edu.pl

Uprzejmie dziękuję za zaproszenie do wygłoszenia tego odczytu. Jestem wzruszony, że mogę go wygłosić właśnie tutaj, w Opolu, z którym związany jestem *con amore* od długiego już czasu.

Będę mówił o podstawach matematyki. Przyrzekam nie epatować formalizmem matematycznym. Jestem nadto pewien, że gdybym za podszeptem ignorancji próbował wygłaszać jakieś fałsze, to obecni na sali znakomici logicy, matematycy, filozofowie szybko przywołają mnie do porządku.

1 Plan na dziś

Zajmować się będziemy dość trudnym do zdefiniowania pojęciem używanym nie tylko w podstawach matematyki, ale również w ogólnej metodologii nauk, a mianowicie pojęciem *modelu zamierzonego* teorii. Miałby to być model w jakiś sposób wyróżniony spośród wszystkich modeli teorii, jako ten, z myślą o którym teoria była budowana. Widać, że określenie takie zawiera składnik pragmatyczny. Przypomnimy wybrane wyniki ukazujące, że oczekiwania *jednoznacznej* charakterystyki modelu zamierzonego teorii nie mogą zostać spełnione w przypadku najbardziej podstawowych teorii matematycznych. Wystrzegać się przy tym należy postaw ocennych: nie powinniśmy np. mówić, że arytmetyka Peana pierwszego rzędu jest *niestety* nierozstrzygalna i niezupełna, lub że w klasycznym rachunku predykatów *na szczęście* zachodzi twierdzenie o pełności. Zachodzenie poszczególnych twierdzeń metalogicznych to kwestia wyboru logiki i nasze życzenia, modlitwy i zaklęcia nie mają tu nic do rzeczy. Jak podobno mówił Kurt Gödel: *Sensem świata jest oddzielenie życzenia od faktu*. Na marginesie: *sensem życia* wedle Moritza Schlicka było zachowanie młodości.[1] Modny juwenilizm nie jest więc nowinką amerykańską.

W dalszym ciągu zajmiemy się kilku wybranymi strukturami matematycznymi oraz własnościami opisujących je teorii. Będą to: liczby naturalne, liczby rzeczywiste oraz uniwersa zbiorów. Nie będziemy odnosić się do problematyki metodologicznej dotyczącej modeli zamierzonych w naukach empirycznych i humanistyce.

[1] „Brauchen wir eine Lebensregel, so sei es dieses: 'Bewahre den Geist der Jugend!' Den er ist der Sinn des Lebens." Ostatnie dwa zdania artykułu: Schlick, M. 1927. Vom Sinn des Lebens. *Symposion* **1** (4), 354.

Będę często używał zwrotów „wyobraźmy sobie", „pomyślmy o", itp. Matematyka jest sztuką operowania (wedle pewnych reguł) na pojęciach. Gödel twierdził, że jesteśmy wyposażeni w pewien zmysł, który pozwala nam percypować obiekty matematyczne. Wierzmy mu.

2 Nudne preliminaria

Zakładam, że słuchacze mają elementarną wiedzę logiczną, w zakresie kursu uniwersyteckiego. W szczególności, rozumiem, że słuchaczom nieobce są podstawowe pojęcia dotyczące logiki pierwszego rzędu (FOL) takie, jak: aksjomat, reguła wnioskowania, dowód, teza, interpretacja, spełnianie, prawdziwość zdania w interpretacji, model, teoria, prawo logiki, wynikanie logiczne, niesprzeczność, itp.

2.1 Dogmaty

Proszę, aby słuchacze na czas tego wykładu uwierzyli w pewne dogmaty. Nie jest ich wiele: to aksjomaty teorii mnogości (Zermelo-Fraenkla) oraz aksjomaty arytmetyki Peana (pierwszego rzędu). W szczególności, proszę choćby przez trzy najbliższe kwadranse wierzyć w istnienie co najmniej jednego zbioru *nieskończonego*.[2] Zbiory nieskończone *równoliczne* ze zbiorem wszystkich liczb naturalnych nazywamy *przeliczalnymi* (mocy $\aleph_0$), pozostałe zbiory nieskończone nazywamy *nieprzeliczalnymi*. Zbiory równoliczne ze zbiorem wszystkich podzbiorów zbioru wszystkich liczb naturalnych to zbiory mocy *kontinuum*.

Ta niewinna prośba ma jednak pewne konsekwencje. Skoro wierzysz w aksjomaty (teorii mnogości) oraz posługujesz się logiką, to uwierzyć musisz również we wszystko, co z aksjomatów logicznie wynika. W szczególności, musisz uwierzyć też w TWIERDZENIE CANTORA (żaden zbiór nie jest równoliczny z rodziną wszystkich swoich podzbiorów) oraz musisz zaakceptować to, co w teorii mnogości dowodzi się o *mocy* (liczbie elementów) zbioru. Nie ukrywajmy więc, że zaakceptowanie wyjściowych dogmatów wymusza także wiarę w stwierdzenia teorii mnogości dotyczące istnienia dwóch (*pozaskończonych*) hierarchii mocy zbiorów:

- hierarchii *alefów* (kolejnych mocy zbiorów nieskończonych) oraz
- hierarchii mocy zbiorów otrzymywanych poprzez operacje brania rodziny wszystkich podzbiorów oraz sumowania zbiorów.

Oczywiście, elementy tej drugiej hierarchii znajdują się gdzieś na skali hierarchii pierwszej (gdyż każda moc zbioru jest alefem). Teoria mnogości Zermelo-Fraenkla nie może jednak odpowiedzieć nawet na pytanie, czy drugie elementy obu hierarchii są równe (tj. czy zachodzi równość $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, gdzie $\aleph_1$ jest bezpośrednio następną po $\aleph_0$ mocą nieskończoną, a $2^{\aleph_0}$ jest kontinuum, czyli mocą zbioru potęgowego zbioru przeliczalnego).[3]

[2] Zamiast mało nośnego sloganu: *Nieskończoności aktualnej będziemy bronić jak niepodległości*, myślmy raczej o *dictum* Ernsta Zermela: *Matematyka jest logiką Nieskończonego*.

[3] Aby należycie rozumieć omawiane pojęcia, trzeba byłoby znać cały szereg definicji: liczby porząd-

2.2 Wybrane własności teorii

Teorie budujemy zatem w języku (wybranej logiki), a teorie (o ile są niesprzeczne) mają modele. Różne modele teorii mogą być do siebie mniej lub bardziej podobne. Dwie najważniejsze zależności między modelami, określające stopień tego podobieństwa to: *izomorfizm* oraz *elementarna* równoważność.

- Dwa modele są *izomorficzne*, gdy mają taką samą strukturę (istnieje wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie między ich uniwersami, zachowujące wszystkie relacje). Tak więc, modele izomorficzne są całkowicie nieodróżnialne ze względu na swoją budowę (mogą różnić się jedynie *jakością* swoich elementów). Dla przykładu, układ złożony ze wszystkich liczb naturalnych ze zwykłą operacją następnika („dodawanie jedynki") oraz zwykłym dodawaniem jest izomorficzny z układem złożonym ze wszystkich liczb parzystych, operacją następnika rozumianą jako dodawanie dwójki oraz zwykłym dodawaniem. Nie są natomiast izomorficzne: zbiory wszystkich liczb naturalnych i wszystkich liczb całkowitych, oba ze zwykłą relacją mniejszości.

- Dwa modele są *elementarnie równoważne*, gdy prawdziwe w nich są dokładnie te same zdania języka rozważanej teorii. Tak więc, modele elementarnie równoważne są nieodróżnialne *semantycznie* (ze względu na własności, które można wyrazić w języku rozważanej teorii). Dla przykładu, zbiór wszystkich liczb naturalnych wraz z naturalnym ich porządkiem jest elementarnie równoważny ze strukturą, której uniwersum tworzą: wszystkie liczby naturalne (z ich naturalnym porządkiem), po których występuje kopia zbioru wszystkich liczb całkowitych (z ich naturalnym porządkiem). Dodajmy, że te dwie elementarnie równoważne (a więc nieodróżnialne semantycznie w logice pierwszego rzędu) struktury nie są izomorficzne.[4]

Jak wiadomo, teorie *sprzeczne* są bezużyteczne: można w nich dowieść wszystkiego. Ponadto, a to już fakt niebanalny, teoria jest niesprzeczna dokładnie wtedy, gdy ma co najmniej jeden model. Teorie mogą mieć inne jeszcze ważne z metodologicznego punktu widzenia własności, np.:

- Teoria jest *kategoryczna*, gdy ma co najmniej jeden model i wszystkie jej modele są izomorficzne.

- Teoria jest *zupełna*, gdy wszystkie jej modele są elementarnie równoważne. Zupełność teorii oznacza, że dla dowolnego zdania w jej języku, albo to zdanie, albo jego zaprzeczenie jest twierdzeniem tej teorii.

---

kowej, liczby kardynalnej (początkowej liczby porządkowej), funkcji Hartogsa, itd. Musimy założyć, że w wykładzie popularnym, jak niniejszy, wystarczają pewne *intuicje* dotyczące tych pojęć.

[4] Wyobraź sobie np. nieskończone stado białych owieczek, ustawionych tak jak liczby naturalne w ich zwykłym porządku. A za nimi wszystkimi stado owieczek czarnych, ustawionych tak jak liczby całkowite w ich zwykłym porządku. Umawiamy się ponadto, że w globalnym porządku wszystkich owieczek te białe wyprzedzają te czarne. Powiedzmy, przed tobą są dwa nieskończenie wysokie szczyty. Białe owieczki ustawione są od podstawy pierwszego szczytu w górę. Czarne owieczki ustawione są najpierw zstępująco od tego szczytu w dół, a potem ich reszta ustawiona jest wstępująco na kolejny nieskończenie wysoki szczyt. Widzisz to? W jednym z dalej omawianych przykładów posłużymy się nieskończonymi *przepaściami*.

Kategoryczność implikuje zupełność, ale nie na odwrót. Wprost z definicji widzimy, że każda z tych własności mogłaby być użyteczna w charakterystyce *modelu zamierzonego*. W szczególności, kategoryczność (a także tzw. *kategoryczność w mocy*[5]) teorii implikuje, że ma ona właściwie jeden tylko (z dokładnością do izomorfizmu, jak mówią matematycy) model (a jeśli jest κ-kategoryczna, to tylko jeden model mocy κ).

Klasyczne pojęcie kategoryczności pochodzi od Oswalda Veblena (1905). Przed opracowaniem ścisłych podstaw semantyki języków systemów logicznych bywało ono mieszane z pojęciem zupełności (we współczesnym sensie). Jeszcze w 1928 roku Rudolf Carnap sądził, że można te pojęcia utożsamiać (*Gabelbarkeitssatz*). Tarski i Lindenbaum podali w 1936 roku warunek, przy którym zupełność implikuje kategoryczność (w teorii typów). Współcześnie bada się tzw. własność *Fraenkla-Carnapa* w logice drugiego rzędu, związaną z tą problematyką.

Już Georg Cantor pokazał, że teoria gęstego liniowego porządku bez elementu pierwszego i ostatniego jest $\aleph_0$-kategoryczna. Elementarna teoria nierówności jest też zupełna (Langford 1927), co wykazać można metodą eliminacji kwantyfikatorów, pochodzącą od Skolema (1919). Wynik Cantora wskazuje na wyróżnioną rolę porządku liczb wymiernych wśród wszystkich porządków przeliczalnych. Inspirował on (łącznie z rozważaniami Hausdorffa dotyczącymi η_α-zbiorów) niektóre konstrukcje w ogólnej teorii modeli: np. modele *jednorodne, uniwersalne, nasycone*. Modele nasycone to modele „bogate" semantycznie. Ich przeciwieństwem są „ubogie" semantycznie modele: modele *atomowe*.

Związki między kategorycznością (w mocy) a zupełnością (np. liczba modeli teorii zupełnej nieizomorficznych w poszczególnych mocach, czyli strukturalne zróżnicowanie modeli teorii zupełnej) badane są we współczesnej teorii modeli (badanie *spektrum* teorii, teoria *klasyfikacji*). Ważna współcześnie badana problematyka wiąże się też ze strukturą rodziny zbiorów *definiowalnych* w modelach. W klasycznej teorii modeli mamy m.in. następujące twierdzenie:

TEST ŁOSIA-VAUGHTA. *Jeśli T jest teorią niesprzeczną teorią bez modeli skończonych, κ-kategoryczną w pewnej mocy nieskończonej κ, to T jest zupełna.*

Test Łosia-Vaughta znajduje zastosowanie dla ustalenia zupełności na przykład następujących teorii (żadna z nich nie ma modeli skończonych, a każda jest w pewnej mocy kategoryczna):

- Teoria gęstych liniowych porządków bez końców. Jest ona $\aleph_0$-kategoryczna.
- Teoria bezatomowych algebr Boole'a. Jest ona $\aleph_0$-kategoryczna.
- Teoria ciał algebraicznie domkniętych charakterystyki 0 (lub p, gdzie p jest liczbą pierwszą). Na mocy twierdzenia Steinitza, są to teorie kategoryczne w każdej mocy nieprzeliczalnej.
- Teoria nieskończonych grup przemiennych, których wszystkie elementy mają rząd p. Jest ona κ-kategoryczna dla wszystkich κ.

[5]Teoria jest *kategoryczna w mocy* κ (*κ-kategoryczna*), jeśli ma model mocy κ i wszystkie jej modele mocy κ są izomorficzne.

Oprócz pojęcia zupełności używa się również w teorii modeli innych pojęć (np. *modelowej zupełności*). Do bardzo ważnych ustaleń należą *algebraiczne* charakterystyki własności związanych z elementarną równoważnością modeli teorii.

Większość interesujących teorii matematycznych to teorie niezupełne, zawierające zdania nierozstrzygalne. Fakt ten jest optymistyczny poznawczo: nie można twórczości matematycznej powierzyć jedynie bezmyślnym maszynom.

2.3 Parę twierdzeń

Uczynimy użytek z następujących dwóch fundamentalnych twierdzeń (dotyczących teorii w języku pierwszego rzędu):

- TWIERDZENIE O ZWARTOŚCI. *Teoria ma model dokładnie wtedy, każdy skończony zbiór jej zdań ma model. Równoważnie: zbiór zdań nie ma modelu dokładnie wtedy, gdy co najmniej jeden jego skończony podzbiór nie ma modelu.*
- (DOLNE) TWIERDZENIE LÖWENHEIMA-SKOLEMA. *Jeśli teoria ma jakikolwiek model (nieskończony), to ma model przeliczalny.*

Udowodnione przez Alfreda Tarskiego GÓRNE TWIERDZENIE LÖWENHEIMA-SKOLEMA-TARSKIEGO głosi, że jeśli teoria (bez modeli skończonych) ma jakikolwiek model nieskończony, to ma modele dowolnie dużych mocy nieskończonych. Oba twierdzenia, Dolne i Górne, stwierdzają łącznie, że logika pierwszego rzędu nie odróżnia mocy nieskończonych.

Widać natychmiast, że wśród konsekwencji TWIERDZEŃ LÖWENHEIMA-SKOLEMA jest i ta, iż żadna niesprzeczna teoria w języku pierwszego rzędu (mająca model nieskończony) nie może być kategoryczna. Można pytać o kategoryczność w mocy: przypomnijmy, że teoria jest kategoryczna w mocy κ, gdy ma model mocy κ i wszystkie jej modele mocy κ są izomorficzne. Do ustaleń poczynionych w teorii modeli należą:

- TWIERDZENIE RYLLA-NARDZEWSKIEGO, podające warunki konieczne i wystarczające na to, aby teoria zupełna była $\aleph_0$-kategoryczna, czyli kategoryczna w najmniejszej mocy nieskończonej (opuszczamy precyzyjne sformułowanie tego twierdzenia, gdyż inaczej trzeba byłoby przypomnieć kilka złożonych konstrukcji algebraicznych).[6]
- TWIERDZENIE MORLEYA. *Jeśli teoria jest kategoryczna w jakiejś mocy nieprzeliczalnej, to jest kategoryczna we wszystkich mocach nieprzeliczalnych.*

W 1954 roku Jerzy Łoś zauważył, że wszystkie znane przeliczalne teorie T podpadają pod jeden z następujących czterech typów:

[6] Dla dowolnej teorii T, niech $S^n(T)$ oznacza zbiór wszystkich jej n-typów zupełnych, a $\mathcal{L}_T^n$ algebrę Lindenbauma formuł języka teorii T o co najwyżej n zmiennych wolnych. Twierdzenie Rylla-Nardzewskiego głosi, że dla dowolnej teorii zupełnej T następujące warunki są równoważne: (1) T jest $\aleph_0$-kategoryczna. (2) Dla każdej $n > 0$, każdy niesprzeczny n-typ jest izolowany. (3) Dla każdej $n > 0$, każdy zupełny n-typ jest izolowany. (4) Dla każdej $n > 0$, zbiór $S^n(T)$ jest skończony. (5) Dla każdej $n > 0$, zbiór $\mathcal{L}_T^n$ jest skończony.

- $(+, -)$: T jest $\aleph_0$-kategoryczna, ale dla wszystkich nieprzeliczalnych liczb kardynalnych κ, T nie jest κ-kategoryczna.
- $(-, +)$: T nie jest $\aleph_0$-kategoryczna, ale dla wszystkich nieprzeliczalnych liczb kardynalnych κ, T jest κ-kategoryczna.
- $(+, +)$: Dla wszystkich liczb kardynalnych κ, T jest κ-kategoryczna.
- $(-, -)$: Dla wszystkich liczb kardynalnych κ, T nie jest κ-kategoryczna.

Łoś postawił hipotezę, że są to jedyne możliwości. W 1965 roku Morley udowodnił prawdziwość tej hipotezy. Oto przykłady teorii, które są jednego z wyżej wymienionych rodzajów:

- $(+, -)$: Teoria gęstego liniowego porządku bez elementu pierwszego i ostatniego.
- $(-, +)$: Teoria ciał algebraicznie domkniętych charakterystyki 0, lub charakterystyki p, gdzie p jest liczbą pierwszą.
- $(+, +)$: Czysta teoria identyczności (w języku jedynie z predykatem identyczności, bez innych stałych pozalogicznych).
- $(-, -)$: Teoria modelu standardowego arytmetyki PA.

Jak zobaczymy, wśród konsekwencji DOLNEGO TWIERDZENIA LÖWENHEIMA-SKOLEMA jest też to, że teoria mnogości (w której, jak pamiętamy zachodzi TWIERDZENIE CANTORA, głoszące istnienie zbiorów nieprzeliczalnych) ma model przeliczalny, co nazywane bywa w literaturze Paradoksem Skolema (choć żadnym paradoksem nie jest!). Z kolei, zarówno z TWIERDZENIA O ZWARTOŚCI, jak i z GÓRNEGO TWIERDZENIA LÖWENHEIMA-SKOLEMA-TARSKIEGO wynika, iż arytmetyka Peana PA ma modele, których uniwersa nie składają się wyłącznie z poczciwych liczb naturalnych, znanych ze szkoły.

2.4 Moc wyrażania logiki

Klasyczna logika pierwszego rzędu ma własność *pełności*: jej tezami są dokładnie wszystkie jej tautologie. Nie każdy system logiczny własność tę posiada: nie ma jej np. *logika drugiego rzędu*.

Klasyczna logika pierwszego rzędu jest więc „porządna”, jeśli chodzi o jej uposażenie inferencyjne. Jej język ma natomiast bardzo niewielką „moc wyrażania”: wielu ważnych podstawowych pojęć matematycznych nie można w nim zdefiniować (np. pojęcia *nieskończoności*).

Można argumentować, że „moc wyrażania” nie jest domeną logiki: logika ma dotyczyć jedynie inferencji. Można jednak również tworzyć i badać inne systemy logiczne, mające większą moc wyrażania niż FOL (wyposażając je oczywiście zarówno w aparaturę inferencyjną, jak i stosownie dobraną semantykę). Filozofowie dobrze obeznani są np. z logikami *wielowartościowymi, modalnymi, epistemicznymi*. Rozszerzać możemy zestaw *stałych logicznych* (otrzymując np. logiki z *uogólnionymi kwantyfikatorami*), bądź zmieniać dopuszczalne reguły składniowe (otrzymując np. *logiki infinitarne*). Jedną z naczelnych zasad przy budowaniu takich systemów logicznych jest zapewnienie im zachodzenia wybranych twierdzeń metalogicznych (przede wszystkim twierdzenia o pełności, względem stosownej semantyki).

Logiki mocniejsze od FOL zaczęto systematycznie badać od połowy XX wieku (kwantyfikatory uogólnione Mostowskiego, Lindströma, Henkina, Barwise'a; logiki infinitarne: Scott, Tarski, Karp). Z badaniami tymi jest też związana teoria zbiorów *dopuszczalnych*, będąca swoistym połączeniem filarów logiki matematycznej i podstaw matematyki: *teorii mnogości, teorii rekursji, teorii dowodu* i *teorii modeli*.

Jako ciekawostkę podajmy przykłady „mocy wyrażania" niektórych logik silniejszych od FOL. Ograniczamy się przy tym do:

- języków L_{Q_α} z *kwantyfikatorami numerycznymi*; $Q_\alpha x \psi(x)$ ma znaczenie: istnieje co najmniej $\aleph_\alpha$ obiektów o własności ψ;
- języków *infinitarnych* $L_{\alpha\beta}$ (o koniunkcjach i alternatywach długości mniejszej od α oraz prefiksach kwantyfikatorowych długości mniejszej od β); język $L_{\infty\beta}$ dopuszcza koniunkcje i alternatywy dowolnej długości oraz prefiksy kwantyfikatorowe długości mniejszej od β.

Oprócz ciekawostek dotyczących mocy wyrażania takich języków przypominamy też o niektórych własnościach systemów logicznych w tych językach (pisząc „logika L_{Q_α}" lub „logika $L_{\alpha\beta}$" mamy na myśli precyzyjnie określone w literaturze przedmiotu systemy logiczne w odnośnych językach):

- Standardowy model (to pojęcie omówimy dokładniej za chwilę) arytmetyki PA można scharakteryzować w L_{Q_0} z dokładnością do izomorfizmu.

  Wystarczy do aksjomatów dyskretnego liniowego porządku $<$ dodać aksjomat: $\forall x \neg Q_0 y\ y < x$ (każda liczba ma jedynie skończenie wiele poprzedników).
- W (logice formułowanej w) L_{Q_0} nie zachodzi GÓRNE TWIERDZENIE LÖWENHEIMA-SKOLEMA-TARSKIEGO.
- L_{Q_0} nie jest (rekurencyjnie) *aksjomatyzowalna*.
- W L_{Q_0} nie zachodzi TWIERDZENIE O ZWARTOŚCI.
- W L_{Q_0} zachodzi DOLNE TWIERDZENIE LÖWENHEIMA-SKOLEMA.
- Pełność (systemu dowodowego z nieskończonymi dowodami) dla L_{Q_0} można otrzymać przez dodanie reguły infinitarnej:

  $$\frac{\exists^{\geqslant 1} x\, \psi(x), \exists^{\geqslant 2} x\, \psi(x), \ldots}{Q_0 x\, \psi(x)}.$$
- Dowolna przeliczalna $\aleph_0$-kategoryczna teoria w L_{Q_0} bez modeli skończonych jest zupełna.

- Teoria gęstych liniowych porządków jest zupełna w L_{Q_0}.
- L_{Q_0} jest fragmentem $L_{\omega_1\omega}$, co widać z równoważności:

$$Q_0 x\,\psi(x) \equiv \bigwedge_{n<\omega} \exists^{\geqslant n} x\,\psi(x).$$

  Zdanie $Q_0 x\,\psi(x)$ języka L_{Q_0} (istnieje nieskończenie wiele x o własności ψ) ma te same modele co następujące zdanie z $L_{\omega_1\omega}$:

  $\neg \bigvee_{n\in\omega} \exists x_1 \ldots \exists x_n \forall x\,(\psi(x) \rightarrow (x = x_1 \vee \ldots \vee x = x_n))$.

- Teoria gęstych liniowych porządków nie jest zupełna w L_{Q_1}.
- GÓRNE TWIERDZENIE LÖWENHEIMA-SKOLEMA-TARSKIEGO nie zachodzi w L_{Q_1}. DOLNE TWIERDZENIE LÖWENHEIMA-SKOLEMA zachodzi w następującej wersji: jeśli teoria w L_{Q_1} (mocy co najwyżej $\aleph_1$) ma model, to ma model mocy $\aleph_1$.
- Każda $\aleph_1$-kategoryczna teoria w L_{Q_1} (mocy co najwyżej $\aleph_1$) jest zupełna.
- Teoria ciał algebraicznie domkniętych charakterystyki zero jest zupełna w L_{Q_1}.
- L_{Q_1} jest (!) aksjomatyzowalna.
- Pojęcie *dobrego porządku* nie jest definiowalne w $L_{\omega_1\omega}$, jest natomiast definiowalne w $L_{\omega_1\omega_1}$ przez koniunkcję zdania charakteryzującego porządki liniowe oraz zdania:

  $(\forall x_n)_{n\in\omega} \exists x\,(\bigvee_{n\in\omega} (x = x_n) \wedge \bigwedge_{n\in\omega} (x \leqslant x_n))$.

- *Predykat prawdziwości* formuł języka o przeliczalnej liczbie symboli jest definiowalny w $L_{\omega_1\omega}$.
- W $L_{\omega_1\omega}$ dowolną przeliczalną strukturę z przeliczalną liczbą relacji można scharakteryzować z dokładnością do izomorfizmu (TWIERDZENIE SCOTTA).
- Teoria uporządkowanych ciał archimedesowych jest w $L_{\omega_1\omega}$ skończenie aksjomatyzowalna.
- Własności semantyczne modeli dla logik $L_{\alpha\beta}$ i $L_{\infty\omega}$ (np. elementarną równoważność) można charakteryzować metodami algebraicznymi (TWIERDZENIE KARP o częściowych izomorfizmach).
- W $L_{\omega_1\omega}$ zachodzi LEMAT INTERPOLACYJNY CRAIGA (nie zachodzi on w żadnej innej logice infinitarnej).
- DOLNE TWIERDZENIE LÖWENHEIMA-SKOLEMA ma swój odpowiednik w logice $L_{\omega_1\omega}$ oraz właściwie we wszystkich logikach infinitarnych. Natomiast GÓRNE TWIERDZENIE LÖWENHEIMA-SKOLEMA-TARSKIEGO w swojej zwykłej formie nie zachodzi w tych logikach; dokonuje się jednak podobnych do niego ustaleń, wykorzystując tzw. *liczby Hanfa*.

- W $L_{\omega_1\omega}$ zachodzi TWIERDZENIE O PEŁNOŚCI, gdy na infinitarną regułę wnioskowania pozwalającą wywnioskować koniunkcję $\bigwedge \Phi$ ze zbioru przesłanek Φ narzucimy warunek, aby Φ był przeliczalny.
- Ani w $L_{\omega_1\omega}$, ani w żadnej z logik $L_{\alpha\beta}$, gdzie $\alpha \geqslant \aleph_1$, nie zachodzi TWIERDZENIE O ZWARTOŚCI. Rozważano jednak stosowne modyfikacje tego twierdzenia i wykazano, iż zachodzenie tych uogólnionych wersji twierdzenia o zwartości powiązane jest z istnieniem dużych liczb kardynalnych.

Tak więc, systemy logiczne możemy porównywać (np. ze względu na wspomnianą ich „moc wyrażania"). Możemy zatem określać, które z nich są „silniejsze" od innych, a które są między sobą równoważne. Do znanych twierdzeń dotyczących tej problematyki należy:

- I TWIERDZENIE LINDSTRÖMA. *Każdy system logiczny, w którym zachodzi zarówno* TWIERDZENIE O PEŁNOŚCI *(lub* TWIERDZENIE O ZWARTOŚCI*) jak i* DOLNE TWIERDZENIE LÖWENHEIMA-SKOLEMA *jest równoważny z klasyczną logiką pierwszego rzędu.*

Dlaczego wspominamy tu o różnych systemach logicznych? Ano z tego powodu, że niemożność jednoznacznej charakterystyki modelu zamierzonego teorii w jednym systemie logicznym nie wyklucza istnienia takiej charakterystyki w innym, mocniejszym. Osiągnięcie kategoryczności opisu bywa jednak okupione pewną ceną: mamy kategoryczne opisy ważnych struktur matematycznych w logice drugiego rzędu, ale w logice tej nie może istnieć maszyneria dedukcyjna mająca walor pełności (czyli niektóre prawa tej logiki nie mogą zostać osiągnięte na drodze dowodu). Cena ta obejmuje także uznanie za stałe logiczne pewnych symboli spoza zestawu *klasycznych* stałych logicznych (spójników prawdziwościowych, kwantyfikatorów, ewentualnie również predykatu identyczności).

3 Arytmetyka

Wiedza potoczna dotycząca systemów liczbowych obejmuje: liczby naturalne (moce zbiorów skończonych), liczby całkowite (dodatnie, ujemne i zero), ułamki (wyniki dzielenia liczb całkowitych) oraz intuicyjnie rozumiane liczby rzeczywiste (zwykle jako odpowiadające punktom na prostej rzeczywistej). W skład tej wiedzy wchodzą też zasady wykonywania działań na liczbach określonego rodzaju (np.: iloczyn ujemnych liczb całkowitych jest dodatni, nie wolno dzielić przez zero, aby dodać ułamki, trzeba je „sprowadzić do wspólnego mianownika", itp.).

Arytmetyka i algebra ustalają własności, które powinny przysługiwać systemom liczbowym, aby na liczbach określonego rodzaju wykonalne były odpowiednie operacje. Znane ze szkoły liczby naturalne (0, 1, 2, 3, itd.) oraz operacje dodawania i mnożenia na nich odgrywają rolę podstawową: pozostałe rodzaje liczb (całkowite, wymierne, rzeczywiste, zespolone) oraz operacje na nich można zdefiniować wychodząc od systemu liczb naturalnych. Jest zatem sprawą najwyższej wagi, aby ów *model zamierzony* arytmetyki liczb naturalnych móc jednoznacznie scharakteryzować w stosownej teorii.

3.1 Liczby naturalne, nasi dobrzy przyjaciele

Wiesz, że dwa jabłka i jeszcze dwa jabłka to razem cztery jabłka, albo że dwa sześciopaki piwa to tuzin puszek (lub flaszek, zależnie od gustu) piwa, ale na jakiej podstawie wiesz, że $2+2=4$, albo że $2 \cdot 6 = 12$? Nadto, czym są 2, 4, 6? A czym są $+$, $\cdot$ oraz $=$? To pytanie o uzasadnienie prawd arytmetycznych zadawał już von Leibniz, analizując stwierdzenia Locke'a. Odpowiedź von Leibniza była bliska współcześnie akceptowanej: dla uzasadnienia prawd arytmetycznych należy wyprowadzić je na mocy reguł logiki z jakichś nie podlegających wątpliwości zdań pierwszych, aksjomatów przyjmowanych bez dowodu. Próbował von Leibniz wyprowadzać prawdy arytmetyczne z praw tożsamości, jego wywody zawierają jednak luki (np. dotyczące praw łączności działań arytmetycznych).

Aksjomatyczne podstawy dla arytmetyki podane zostały w wieku XIX. Przy tym, zarówno Giuseppe Peano, jak i Richard Dedekind podawali takie podstawy wykorzystując pojęcie zbioru (z naiwnej, przedaksjomatycznej teorii mnogości). Szczeciński matematyk (językoznawca, filolog, fizyk) Hermann Grassman również w znaczącym stopniu przysłużył się utworzeniu aksjomatyki dla liczb naturalnych (korzystał już ze schematu indukcji).

Pojęciami pierwotnymi współczesnej aksjomatycznej arytmetyki pierwszego rzędu (zwanej PA) są: zero, operacja następnika, operacje dodawania i mnożenia. Pojęcia te są charakteryzowane przez aksjomaty, które podamy tu bez użycia zapisu symbolicznego:

- Różne liczby mają różne następniki.
- Zero nie jest następnikiem żadnej liczby.
- Dodanie zera do danej liczby jest równe tej liczbie.
- Dodanie następnika liczby y do liczby x jest równe następnikowi sumy $x + y$.
- Iloczyn zera i danej liczby jest równy zero.
- Iloczyn liczby x i następnika liczby y jest równy sumie: iloczynu $x \cdot y$ oraz liczby x.
- Dla dowolnej własności liczb naturalnych, jeśli liczba zero ma tę własność oraz to, że liczba x ma tę własność implikuje, że również następnik liczby x ma tę własność, to wszystkie liczby naturalne mają tę własność.

Ostatnie z powyższych zdań to *zasada indukcji matematycznej*. Nie jest to pojedynczy aksjomat, lecz schemat nieskończenie wielu aksjomatów. Zauważmy, że zasada indukcji matematycznej jest pewnym warunkiem *minimalności* nałożonym na interpretacje powyższego systemu aksjomatów. Udowodniono, że zasady tej nie można zastąpić żadną (równoważną z nią) *skończoną* liczbą aksjomatów.

Z powyższych aksjomatów (oraz aksjomatów logiki i aksjomatów dla identyczności) wyprowadza się, na mocy reguł logiki, twierdzenia arytmetyki. Tajny Radca von Leibniz byłby (częściowo) usatysfakcjonowany: wszystkie *konkretne* prawdy arytmetyczne (takie jak $2 + 2 = 4$ lub $2 \cdot 6 = 12$) można w tym systemie udowodnić. Można również dowieść, że wszystkie twierdzenia arytmetyki są prawdami arytmetycznymi, czyli zachodzą w tzw. *modelu standardowym* arytmetyki: strukturze, której uniwersum tworzą wszystkie liczby naturalne (i tylko one), wraz z „naturalnie" rozumianymi operacjami: następnika, dodawania i mnożenia.

Czym jednak są liczby naturalne? Odpowiedzi na to pytanie możemy szukać w filozofii bądź matematyce. Ponieważ ten odczyt dotyczy matematyki, posłuchajmy odpowiedzi matematyków. Są one następujące:

- Liczby naturalne to dowolne obiekty, spełniające powyższe aksjomaty.
- Liczby naturalne zdefiniować można w teorii mnogości. Propozycja Ernsta Zermela była następująca. Liczba zero to zbiór pusty $\emptyset$. Liczba jeden to zbiór, którego jedynym elementem jest zbiór pusty, czyli zbiór $\{\emptyset\}$. Liczba dwa to zbiór, którego jedynym elementem jest jeden, czyli zbiór $\{\{\emptyset\}\}$. Ogólnie, następnik liczby n to zbiór, którego jedynym elementem jest liczba n.
- Liczby naturalne zdefiniować można w teorii mnogości. Propozycja Johna von Neumanna była następująca. Określamy następującą operację na (dowolnym) zbiorze x: $x^* = x \cup \{x\}$. Liczba zero 0 to zbiór pusty. Liczba jeden 1 to zbiór $1 = 0^* = \emptyset^* = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$ czyli zbiór, którego jedynym elementem jest zbiór pusty. Liczba dwa 2 to zbiór $2 = 1^* = \{\emptyset\}^* = \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. Ogólnie, następnik liczby n to zbiór n^*, czyli $n \cup \{n\}$.

Zwróćmy uwagę, że w propozycji von Neumanna każda liczba jest zbiorem, którego elementami są wszystkie liczby od niej „mniejsze" (w istocie, mniejszość można zdefiniować w terminach relacji $\in$ należenia elementu do zbioru). Leopold Kronecker powiedział, że liczby całkowite stworzył Bóg, a cała reszta jest dziełem człowieka. Wedle propozycji von Neumanna, rola Stwórcy jest bardziej jeszcze ograniczona: liczby naturalne (a więc i całkowite) tworzymy ze zbioru pustego.[7] Trzeba oczywiście pokazać, że tak zdefiniowane liczby naturalne spełniają wszystkie aksjomaty systemu PA, co nie jest rzeczą zbyt skomplikowaną.

Możemy zatem spokojnie przyjąć, że wiemy czym jest *model standardowy* arytmetyki PA. W istocie, pokrywa się on z *modelem zamierzonym*: system PA miał charakteryzować daną w praktyce matematycznej strukturę o pewnych własnościach (uporządkowaną liniowo w sposób dyskretny, z elementem pierwszym i bez elementu ostatniego, na której elementach określone są operacje dodawania i mnożenia). Oznaczmy model standardowy przez $\mathfrak{N}_0$. Oczywiście każdy model izomorficzny z $\mathfrak{N}_0$ również nazwiemy modelem standardowym. Każdy ze słuchaczy z łatwością wyobrazi sobie wiele modeli izomorficznych z modelem standardowym (np. o uniwersum złożonym z par liczb naturalnych, lub z kolejnych alefów $\aleph_n$, gdzie n jest liczbą naturalną). Jak pisze Andrzej Grzegorczyk (*Zarys arytmetyki teoretycznej*, PWN, Warszawa 1971, 261–262):

> Konstruowanie modeli standardowych jest łatwe. Wystarczy brać izomorficzne obrazy modelu $\mathfrak{N}_0$. Również biorąc np. 10 modeli standardowych $\mathfrak{N}_0^1, \ldots, \mathfrak{N}_0^{10}$ otrzymujemy nowy model standardowy biorąc jako jego pole

[7] Ale z pomocą maszynerii teorii mnogości: to ona ma *moc stwórczą*.

sumę $N^1 \cup \ldots \cup N^{10}$ i określając zero jako zero pierwszego modelu oraz jeśli x jest n-tym elementem i-tego modelu to dla $i \neq 10$ następnik Sx jest n-tym elementem $i+1$ modelu, a dla $i = 10$ następnik Sx jest $n+1$ elementem 1 modelu. Za pomocą następnika określamy rekurencyjnie sumę i iloczyn.

Wróćmy jednak do kwestii uzasadnienia prawd arytmetycznych. Powstaje pytanie: czy *wszystkie* prawdy arytmetyczne mogą zostać dowiedzione w arytmetyce PA? Nie tylko *konkretne*, ale także te prawdy arytmetyczne, dla których wyrażenia potrzebne są kwantyfikatory. Dla przykładu, Hipoteza Goldbacha (każda liczba parzysta jest sumą dwóch liczb pierwszych) jest albo prawdziwa, albo fałszywa w modelu standardowym. Czy można ją (lub jej zaprzeczenie) udowodnić w systemie PA? Ogólnie: czy każde zdanie prawdziwe w modelu standardowym ma dowód w aksjomatycznym systemie arytmetyki PA?

Odpowiedź jest przecząca i ma to ważkie konsekwencje. Już proste (acz nieformalne) rozważania dotyczące mocy zbiorów mogą skłaniać do takiej właśnie odpowiedzi. Pamiętamy (twierdzenie Cantora!), że wszystkich zbiorów liczb naturalnych jest więcej[8] niż przeliczalnie wiele: jest ich kontinuum. Jeśli uznać, że z każdym (całkiem dowolnym) zbiorem liczb naturalnych związana jest jakaś prawda arytmetyczna (i różnym takim zbiorom odpowiadają różne prawdy arytmetyczne), to prawd arytmetycznych jest wtedy kontinuum. Twierdzeń arytmetyki PA jest jednak jedynie przeliczalnie wiele, co wynika z faktu, iż każde twierdzenie PA jest skończonym ciągiem symboli z przeliczalnego alfabetu. A zatem nie wszystkie tak rozumiane prawdy arytmetyczne mogą być twierdzeniami PA. Można jednak podać o wiele bardziej precyzyjny dowód tego faktu: to właśnie słynne twierdzenia Gödla i Rossera o niezupełności, o których każdy ze studentów goszczącego nas Instytutu Filozofii zapewne już słyszał.

Ramy czasowe tego wykładu nie pomieszczą nawet szkicu dowodu tych twierdzeń.[9] Przypomnijmy zatem jedynie kilka podstawowych faktów, dotyczących tych dowodów.

- Podaje się matematyczny opis pojęcia *efektywnej obliczalności*. Definiuje się pewną klasę funkcji (*pierwotnie rekurencyjnych*), które mają stanowić odpowiedniki funkcji w intuicyjnym sensie obliczalnych.
- Pokazuje się, że wszystkie funkcje (i relacje) pierwotnie rekurencyjne są *reprezentowalne* w PA, czyli (mówiąc w wielkim uproszczeniu) istnieją dowodliwe w PA formuły opisujące te funkcje (i relacje).
- Dokonuje się *arytmetyzacji* składni. Symbole alfabetu, termy, formuły, dowody są jednoznacznie kodowane liczbami naturalnymi. Kodowanie jest pierwotnie rekurencyjne. Dopiero pojęcie tezy (twierdzenia) systemu PA ma większą złożoność: ponieważ powiedzieć, że formuła jest *twierdzeniem systemu PA* to to samo,

[8]Relacja mniejszości oraz operacje arytmetyczne na mocach zbiorów nieskończonych otrzymują precyzyjne definicje w teorii mnogości.

[9]Uprzejmie zapraszam na strony Zakładu Logiki Stosowanej UAM, gdzie umieszczono teksty wszystkich wykładów *Metalogika*, przeznaczonych dla słuchaczy Studium Doktoranckiego Instytutu Filozofii Uniwersytetu Opolskiego.

co powiedzieć *istnieje dowód tej formuły w PA*, więc własność *być twierdzeniem* wymaga w swoim sformułowaniu użycia jednego (nieograniczonego) kwantyfikatora egzystencjalnego. O takich własnościach mówi się, że są *rekurencyjnie przeliczalne*.

- Konstruuje się tzw. *zdanie Gödla*, czyli zdanie, które „mówi samo o sobie, że nie jest twierdzeniem PA". Przy założeniu niesprzeczności PA[10] pokazuje się, że:

  1. *Zdanie Gödla jest prawdziwe w modelu standardowym PA.*
  2. *Zdanie Gödla nie jest twierdzeniem PA.*
  3. *Zaprzeczenie zdania Gödla (fałszywe w modelu standardowym) także nie jest twierdzeniem PA.*

Wykazano w ten sposób I TWIERDZENIE GÖDLA, czyli to, że teoria PA jest *niezupełna*: istnieje zdanie w języku PA takie, że ani ono samo, ani jego zaprzeczenie nie posiada dowodu w PA (jest to zdanie na gruncie PA *nierozstrzygalne*). Słuchacze słyszeli zapewne o innych jeszcze podobnych twierdzeniach, np.:

- II TWIERDZENIE GÖDLA. *Załóżmy, że PA jest niesprzeczna. Wtedy faktu niesprzeczności PA nie można udowodnić w samej PA.*

- TWIERDZENIE TARSKIEGO. *Załóżmy, że PA jest niesprzeczna. Wtedy nie można zdefiniować w jej języku predykatu prawdziwości (w modelu standardowym) jej zdań.*

W istocie, udowodniono o wiele, wiele więcej. Wymienimy jedynie niektóre z tych wyników, w największym skrócie.

- Każda teoria wyrażona w języku rekrurencyjnym z rekurencyjnym zbiorem symboli pozalogicznych, oparta na rekurencyjnym zbiorze aksjomatów i zawierająca arytmetykę PA jest niezupełna. Jest to przy tym *istotna* niezupełność: nie można jej usunąć poprzez dodanie nowych aksjomatów (np. zdań nierozstrzygalnych w rodzaju zdania Gödla), o ile ów nowy zbiór aksjomatów pozostanie rekurencyjny.

- Arytmetyka PA ma kontinuum ($2^{\aleph_0}$) przeliczalnych modeli wzajemnie elementarnie nierównoważnych. W konsekwencji, ma również kontinuum przeliczalnych modeli wzajemnie nieizomorficznych. Istnieją zatem, oprócz standardowego, również *niestandardowe* modele arytmetyki PA.

- Jeśli do środków dowodowych systemu PA dodamy tzw. ω-regułę (czyli regułę infinitarną, pozwalającą z nieskończonego zbioru przesłanek o postaci $\psi(\overline{n})$, gdzie $\overline{n}$ jest liczebnikiem nazywającym liczbę n, otrzymywać wniosek generalnie skwantyfikowany $\forall x \ \psi(x)$), to otrzymana w ten sposób teoria jest już zupełna, ponieważ jest kategoryczna: jej jedynym modelem (z dokładnością do izomorfizmu) jest model standardowy $\mathfrak{N}_0$. Przy okazji: mając ω-regułę możemy wyprowadzić schemat indukcji.

[10] W TWIERDZENIU ROSSERA. W oryginalnym I TWIERDZENIU GÖDLA zakładano mocniejszą własność ω-niesprzeczności.

- Aksjomatyki Peana i Dedekinda były formułowane w języku drugiego rzędu (w którym można kwantyfikować nie tylko po indywiduach, ale także po zbiorach indywiduów). Schemat indukcji jest tu pojedynczą formułą. O tak mocnym systemie można udowodnić jego kategoryczność: jedynym modelem (z dokładnością do izomorfizmu; nadto, *jednoznacznie wyznaczonego* izomorfizmu) jest wtedy model standardowy. Pamiętamy jednak, że w logice drugiego rzędu nie zachodzi twierdzenie o pełności, a więc pewne prawa tej logiki pozostają poza możliwościami efektywnych środków dedukcyjnych. Współcześnie rozważany tzw. *system arytmetyki drugiego rzędu* A_2^- zawiera aksjomaty PA (bez zasady indukcji), pewne aksjomaty dotyczące zbiorów (ekstensjonalność, wyróżnianie), aksjomat indukcji (ze zmienną dla zbiorów) oraz rekurencyjne równości definicyjne dla funkcji pierwotnie rekurencyjnych. Nie mamy oczywiście możliwości omówienia w tym wykładzie własności tego systemu.

- Zbiór numerów gödlowskich twierdzeń każdej teorii (niesprzecznej), w której są mocno reprezentowalne wszystkie relacje rekurencyjne, nie jest rekurencyjny. W szczególności, dotyczy to PA.[11]

- Arytmetyka PA (o ile jest niesprzeczna) nie może dowieść własnej niesprzeczności.[12] Ci, dla których wzorem jest św. Franciszek mogą przejść z obojętnością wobec tego faktu. Co jednak z tymi, którzy ulegając popędowi bogacenia się rozmyślają z trwogą o swoich żałosnych oszczędnościach zdeponowanych w bankach? Jak jest *naprawdę*? Czy arytmetyka *jest* niesprzeczna? Czy mamy jakiś *dowód* tego faktu, choćby wymagający środków silniejszych niż dostępne w samej PA? Odpowiedź jest twierdząca. Mamy np. dowód Gentzena niesprzeczności arytmetyki, odwołujący się do tzw. ε_0-indukcji.

- Oprócz zdań „metamatematycznych” (w rodzaju zdania Gödla) nierozstrzygalnych w PA znaleziono również przykłady zdań nierozstrzygalnych w PA o „konkretnej treści matematycznej”, np. dotyczących własności kombinatorycznych, teorioliczbowych lub pewnych „bardzo szybko rosnących” funkcji (są to np.: zdania Parisa-Harringtona, Parisa-Kirby’ego, twierdzenie Kruskala, zdanie Pudláka i in.). Przy tym, źródła nierozstrzygalności niektórych z tych zdań są inne, niż w przypadku zdania Gödla (wiążą się m.in. z funkcjami majoryzującymi wszystkie funkcje dowodliwie rekurencyjne w PA).

Wspomniane wyżej (oraz liczne inne) wyniki wskazują zarówno na to, że oryginalny *program Hilberta* musi zostać zmodyfikowany, jak i na to, jak bardzo tajemniczy jest model zamierzony arytmetyki PA.

[11] Teoria jest *rozstrzygalna*, gdy zbiór numerów gödlowskich jej twierdzeń jest rekurencyjny, a *nierozstrzygalna* w przeciwnym przypadku. Tak więc, PA jest nierozstrzygalna. W istocie, jest nawet *istotnie* nierozstrzygalna: żadne jej niesprzeczne rekurencyjne rozszerzenie nie jest rozstrzygalne.

[12] W istocie sprawa jest bardziej skomplikowana i zależy od postaci formuły wyrażającej niesprzeczność arytmetyki. Nie możemy tu wdawać się w szczegóły.

3.2 Ultraprodukty i inne potwory

Skoro arytmetyka nie jest kategoryczna (ani zupełna), to jak wyglądają jej modele różne od modelu standardowego, nieizomorficzne z nim? Jarosław Hašek pisał, że bardzo trudno jest opisywać nieistniejące zwierzęta, ale jeszcze trudniej jest je pokazywać. Postaramy się teraz pokazać przykłady modeli *niestandardowych* PA, czyli nieizomorficznych z modelem standardowym.

PROSTY PRZYKŁAD. Wykorzystamy twierdzenie o zwartości. Dodajemy do języka PA nową stałą c i rozważamy zbiór zdań:

$$\Gamma = \{\neg c \doteq \overline{n} : n \in \omega\},$$

gdzie $\doteq$ jest predykatem identyczności, $\overline{n}$ jest liczebnikiem nazywającym liczbę n, a ω jest zbiorem wszystkich liczb naturalnych. Wtedy każdy skończony podzbiór tego zbioru ma model: wystarczy jako interpretację stałej c wybrać odpowiednio dużą liczbę. Na mocy twierdzenia o zwartości, cały zbiór Γ również ma model. W modelu tym interpretacja stałej c jest różna od każdej liczby naturalnej, a więc jest to model niestandardowy.

CIEKAWSZY PRZYKŁAD. Słuchacze mogą być zniesmaczeni poprzednim przykładem: to tylko jakieś sztuczki z językiem, wyciągasz z kapelusza jakąś obcą stałą, nie lubimy tego. Podamy teraz nieco bardziej skomplikowaną konstrukcję (będącą szczególnym przypadkiem konstrukcji *ultraproduktu*, pochodzącej od Thoralfa Skolema (1933), Edwina Hewitta (1948) i Jerzego Łosia (1949)). Rezygnujemy przy tym z formalnego, w pełni precyzyjnego jej przedstawienia. Mocno wierzę, że słuchacze potrafią — czyniąc aktywnym ów zmysł percepcji wspomniany na początku wykładu — wyobrazić sobie tę konstrukcję, bez zapełniania czterech tablic skomplikowanymi wzorami.[13]

Rozważmy ogół wszystkich funkcji (jednoargumentowych) ze zbioru wszystkich liczb naturalnych ω w ten zbiór. Ze szkoły znasz te funkcje: nazywano je tam *ciągami* (o wartościach będących liczbami naturalnymi). Wybierzmy teraz z tego ogółu *funkcje definiowalne arytmetycznie*, czyli takie funkcje, których definicje można zapisać w arytmetyce elementarnej dodawania i mnożenia. Niech ich ogół to zbiór df. Podobnie, niech DF będzie ogółem *zbiorów definiowalnych arytmetycznie*, czyli takich zbiorów (liczb naturalnych, relację należenia do których można zdefiniować w arytmetyce elementarnej dodawania i mnożenia). Zachodzą następujące fakty:

- Zbiór DF jest *ciałem zbiorów*, czyli zawiera jako swój element całe uniwersum oraz jest domknięty na operacje sumy, przekroju i różnicy.
- Wszystkie zbiory skończone są elementami DF. W konsekwencji, także wszystkie zbiory *koskończone* (czyli takie, których dopełnienia są skończone) są elementami DF.

[13] W tekście tego odczytu podajemy, bez pewnych szczegółów, wszystkie niezbędne definicje. W wersji mówionej postaramy się pominąć tyle formalizmu, ile będzie to możliwe. Opieramy się na przedstawieniu konstrukcji modelu niestandardowego w cytowanej już książce Andrzeja Grzegorczyka *Zarys arytmetyki teoretycznej*.

- Przez podstawienie funkcji definiowalnych do formuły arytmetycznej można zdefiniować jedynie zbiory arytmetycznie definiowalne.

- Zbiór DF jest przeliczalny. Także zbiór df jest przeliczalny. A zatem wszystkie funkcje z df ustawić można w jeden ciąg $f_0, f_1, f_2, \ldots$ (wykorzystując np. kodowanie formuł definiujących te funkcje).

Filtrem w ciele DF nazywamy każdą rodzinę D zbiorów, spełniającą następujące warunki:

- Zbiór ω wszystkich liczb naturalnych należy do D.

- Przekrój dowolnych dwóch zbiorów należących do D również należy do D.

- Nadzbiór zbioru należącego do D również należy do D.

O filtrze D mówimy, że jest:

- *właściwy*, gdy zbiór pusty nie jest jego elementem;

- *niegłówny*, gdy jego przekrój (przekrój wszystkich jego elementów) nie jest jego elementem;

- *pierwszy*, gdy dla dowolnego zbioru arytmetycznie definiowalnego X, albo X, albo jego dopełnienie jest elementem D.

Filtry pierwsze to filtry *maksymalne* (ze względu na relację inkluzji). Nazywamy je także *ultrafiltrami*. Nie każdy filtr właściwy i niegłówny jest filtrem pierwszym, ale (w danym ciele zbiorów) każdy taki filtr można rozszerzyć do filtru pierwszego.

Intuicyjnie, każdy filtr właściwy i niegłówny to rodzina „dużych" podzbiorów uniwersum. Proszę przeczytać definicję filtru właściwego zastępując słowa „jest elementem filtru" przez „jest dużym podzbiorem uniwersum".

Zachodzą następujące fakty:

- Rodzina $\mathbb{D}_0$ wszystkich zbiorów koskończonych jest właściwym filtrem niegłównym w ciele DF.

- Istnieje w ciele DF filtr pierwszy, właściwy i niegłówny $\mathbb{D}$ zawierający rodzinę wszystkich zbiorów koskończonych $\mathbb{D}_0$.

Możemy przystąpić do obiecanej konstrukcji modelu niestandardowego. W zbiorze df określamy relację $\sim$:

$$f \sim g \;\equiv\; \{i \in \omega : f(i) = g(i)\} \in \mathbb{D}.$$

Jest to relacja równoważności. Zbiór jej wszystkich klas abstrakcji oznaczmy przez N^*. Będzie to uniwersum naszego modelu. Tradycyjnie, klasę abstrakcji funkcji f (względem relacji $\sim$) będziemy oznaczali przez $[f]$.

Intuicyjnie, jeśli dwie funkcje różnią się wartościami jedynie na skończonej liczbie argumentów, to zachodzi między nimi relacja $\sim$.[14]

Zdefiniujmy dwa elementy wyróżnione modelu:

- $0^* = [0']$, gdzie $0'$ jest funkcją stałą, przyjmującą wartość 0 dla każdego argumentu.
- $1^* = [1']$, gdzie $1'$ jest funkcją stałą, przyjmującą wartość 1 dla każdego argumentu.

Zdefiniujemy operacje dodawania i mnożenia w tym modelu. Najpierw, niech $\oplus$ oraz $\odot$ będą operacjami dodawania funkcji „po współrzędnych", czyli:

- $(f \oplus g)(n) = f(n) + g(n)$, dla wszystkich n;
- $(f \odot g)(n) = f(n) \cdot g(n)$, dla wszystkich n.

Wtedy operacje dodawania $+^*$ oraz mnożenia $\cdot^*$ w uniwersum N^* określamy następująco:

- $[f] +^* [g] = [f \oplus g]$
- $[f] \cdot^* [g] = [f \odot g]$.

Definicje te są poprawne, tj. nie zależą od wyboru reprezentantów z klas abstrakcji. Operację następnika S^* możemy zdefiniować wykorzystując operację $+^*$ oraz element wyróżniony 1^*: $S^*([f]) = [f] +^* 1^*$. Również ta definicja jest poprawna.

Zachodzi twierdzenie, którego z niecierpliwością wypatrują słuchacze:

- Układ $\mathfrak{N}^* = \langle N^*, S^*, +^*, \cdot^*, 0^* \rangle$ jest niestandardowym modelem arytmetyki PA.

Dowód faktu, że $\mathfrak{N}^*$ jest modelem PA wykorzystuje twierdzenie Łosia. Pokażemy, że model $\mathfrak{N}^*$ jest niestandardowy. *Elementami standardowymi* modelu są klasy abstrakcji funkcji stałych (o tej samej wartości dla *wszystkich* argumentów). Uniwersum N^* zawiera zatem *część standardową*, złożoną z klas $0^* = [0'], 1^* = [1'], 2^* = [2'], 3^* = [3'], \ldots, n^* = [n'], \ldots$, gdzie dla każdej n: $n'(i) = n$ dla wszystkich i.

Niech teraz J będzie funkcją *identycznościową*, czyli $J(i) = i$ dla wszystkich argumentów i. Pokażemy, że element $J^* = [J]$ jest niestandardowy, czyli różny od wszystkich elementów standardowych.

Określamy ciąg funkcji h_n (wyznaczających pewne elementy niestandardowe): $h_n(i) = i \dot{-} n$ (gdzie $\dot{-}$ jest operacją odejmowania liczb naturalnych, określoną w znany sposób). Wprost z definicji otrzymujemy równość:

$$\forall i > n \ (h_n(i) + n'(i) = J(i)).$$

[14] A jeśli np. różnią się na argumentach nieparzystych, a są równe na argumentach parzystych? Cóż, wtedy wszystko zależy od tego, czy zbiór wszystkich liczb parzystych należy do (nieefektywnie konstruowanego) ultrafiltru $\mathbb{D}$. Zbiór wszystkich liczb parzystych należy do DF, a więc albo on, albo jego dopełnienie należy do $\mathbb{D}$.

Równość ta implikuje, że:

$$[h_n] +^* [n'] = [J] = J^*.$$

W konsekwencji, w modelu $\mathfrak{N}^*$ prawdziwy jest warunek:

$$\forall n \in \omega \exists X \in N^* \ (J^* = n^* +^* X).$$

Można teraz w naturalny sposób określić relację $\leqslant$:

$$x \leqslant y \ \equiv \ \exists z \in \omega \ (y = x + z).$$

Ma ona swój odpowiednik $\leqslant^*$ w uniwersum modelu niestandardowego $\mathfrak{N}^*$. Z powyższych równości otrzymujemy wtedy:

$$\forall n \in \omega \ (n^* \leqslant^* J^*).$$

A to oznacza, że element J^* jest większy od wszystkich elementów standardowych. Istotnie więc model $\mathfrak{N}^*$ nie jest izomorficzny z modelem standardowym $\mathfrak{N}_0$.

Wszystkie przeliczalne modele niestandardowe arytmetyki PA mają ten sam *typ porządkowy*, a mianowicie typ $\omega + (\omega^* + \omega) \cdot \eta$. Jest to porządek liniowy, w którym najpierw występuje kopia zbioru wszystkich liczb naturalnych, a potem tyle kopii zbioru wszystkich liczb całkowitych, ile jest liczb wymiernych.[15] Zbudowany powyżej model niestandardowy również ma więc ten typ porządkowy. Części standardowej modelu $\mathfrak{N}^*$ nie możemy zdefiniować „wewnątrz” tego modelu, możemy to uczynić jedynie w metajęzyku.

Model standardowy $\mathfrak{N}_0$ jest elementarnie równoważny z modelem niestandardowym $\mathfrak{N}^*$ (ale modele te nie są izomorficzne). Tak więc, w ramach logiki pierwszego rzędu, modele te są nieodróżnialne semantycznie.

Dla modeli niestandardowych arytmetyki PA zachodzi następujące twierdzenie:

- TWIERDZENIE TENNENBAUMA. Żaden niestandardowy model arytmetyki PA nie jest rekurencyjny.

Mówiąc w uproszczeniu, model $\mathfrak{M} = \langle M, S^{\mathfrak{M}}, +^{\mathfrak{M}}, \cdot^{\mathfrak{M}}, 0^{\mathfrak{M}}\rangle$ (o tej samej sygnaturze co model standardowy) dla PA jest *rekurencyjny*, jeśli możemy określić w uniwersum modelu standardowego $\mathfrak{N}_0$ funkcje rekurencyjne $S^{\mathfrak{N}_0}, +^{\mathfrak{N}_0}, \cdot^{\mathfrak{N}_0}$ oraz liczbę $0^{\mathfrak{N}_0}$ w taki sposób, że $\mathfrak{M} = \langle M, S^{\mathfrak{M}}, +^{\mathfrak{M}}, \cdot^{\mathfrak{M}}, 0^{\mathfrak{M}}\rangle$ oraz $\mathfrak{N}_0 = \langle \omega, S^{\mathfrak{N}_0}, +^{\mathfrak{N}_0}, \cdot^{\mathfrak{N}_0}, 0^{\mathfrak{N}_0}\rangle$ są izomorficzne. Twierdzenie Tennenbauma głosi zatem, że model standardowy jest wyróżniony ze względu na fakt, iż tylko w nim *obie* operacje — dodawanie i mnożenie — są rekurencyjne. Por. cytowaną monografię Grzegorczyka (s. 262):

[15] Niech teraz stadko owieczek uporządkowane jak zbiór wszystkich liczb naturalnych schodzi w nieskończoną przepaść. Za tą przepaścią cały horyzont wypełniony jest (tak gęsto, jak gęsto uporządkowane są wszystkie liczby wymierne) szczytami oddzielonymi nieskończonymi przepaściami. Stadka owieczek (uporządkowane jak zbiór liczb całkowitych) schodzą z tych szczytów w owe przepaście (owieczki „zerowe” są na szczytach). Uspokajający widok dla istoty nieśmiertelnej, która ma problemy z zaśnięciem. Mały kłopot jedynie w tym, że horyzont zapełniony jest *gęsto* owymi szczytami: między każdymi dwoma z nich jest szczyt pośredni (a dokładniej, nieskończenie wiele *gęsto* uporządkowanych szczytów pośrednich). Zastanów się: *ile* jest tych nieskończonych przepaści?

> Można ogólnie dowieść, że definicja modelu niestandardowego dla dodawania i mnożenia nie może mieć prostej (rekurencyjnej) postaci arytmetycznej, ale w arytmetycznej definicji modelu musi występować kilka kwantyfikatorów liczbowych.

Dodajmy w tym miejscu (choć można było to zrobić już wcześniej), że teoriami zupełnymi (bo rozstrzygalnymi) są:

- teoria następnika, zera i dodawania (Presburger, 1930),
- teoria zera i następnika (Herbrand, 1928),
- teoria następnika, zera i mnożenia (Skolem, 1930).

Natomiast teoria dodawania i mnożenia nie jest teorią zupełną, jak wspominaliśmy już wcześniej.

Znaczna część współczesnej matematyki może być uprawiana na gruncie *arytmetyki drugiego rzędu*. Również ta arytmetyka ma swój *model standardowy* (zmienne dla zbiorów liczb przebiegają w nim cały zbiór potęgowy $\wp(\omega)$) oraz wielką różnorodność modeli niestandardowych.

Dociekliwy i przekorny słuchacz może w tym miejscu zapytać: *No dobrze, powiedzmy, że mamy jakieś* naturalne intuicje *związane ze* standardowymi *liczbami naturalnymi. Jakie jednak, u licha, moglibyśmy mieć* intuicje*, związane z elementami* niestandardowymi*?* Nie można zbyć tego pytania niegrzeczną postmodernistyczną odpowiedzią: *Niestandardowe*. Liczby niestandardowe są w modelach niestandardowych *nieskończenie* duże (w porządku modelu). Mają swoje dobrze określone poprzedniki oraz następniki, jednak obu operacji arytmetycznych (dodawania oraz mnożenia) nie można na nich określić w sposób rekurencyjny, na mocy TWIERDZENIA TENNENBAUMA. Tak więc, ewentualne intuicje dotyczące tych operacji nie mogą bazować wyłącznie na pojęciach rekurencyjnych. Czy nasza *intuicja matematyczna* musi być ograniczona do takich własności? Pozostawmy to *filozoficzne* pytanie ewentualnej zadumie słuchaczy po wykładzie. Podobne pytania można stawiać również w teorii mnogości, w odniesieniu do operacji na nieskończonych liczbach kardynalnych. To, co Galileusz i Bolzano uważali za *paradoksalne* (równoliczność zbioru nieskończonego z jego podzbiorem właściwym) zostało przez Dedekinda wykorzystane jako *definicja* zbiorów nieskończonych. Pewne własności dodawania nieskończonych liczb kardynalnych równoważne są aksjomatowi wyboru (a więc aksjomatowi nieefektywnemu). Nierozstrzygalność hipotezy kontinuum w teorii mnogości Zermelo-Fraenkla pokazuje z kolei, że teoria ta nie charakteryzuje do końca jednoznacznie operacji *potęgowania* nieskończonych liczb kardynalnych. Pamiętajmy także, że pojęcie *dowolnego* podzbioru zbioru wszystkich liczb naturalnych umyka jednoznacznej charakterystyce na gruncie teorii mnogości Zermelo-Fraenkla: dowodem na to jest nie tylko wspomniana wyżej nierozstrzygalność hipotezy kontinuum, ale również względna niesprzeczność z ZF wielu dalszych zdań. Dla (prostego w sformułowaniu) przykładu: w ZF nie można udowodnić, że jeśli moc zbioru X jest mniejsza od mocy zbioru Y, to moc zbioru potęgowego $\wp(X)$ jest mniejsza od mocy zbioru potęgowego $\wp(Y)$.

Konstrukcja przedstawiona w tym punkcie może być także uogólniona na całkiem dowolne ciała zbiorów oraz ultrafiltry niegłówne. W istocie, konstrukcja *ultraproduktu* jest jedną z najważniejszych w teorii modeli.

Niestandardowe liczby naturalne pozwalają *kodować* nieskończone zbiory liczb naturalnych. Ponadto, skoro mamy matematyczny odpowiednik wielkości liczbowej *nieskończenie dużej*, to otrzymać możemy także taki odpowiednik dla wielkości liczbowej *nieskończenie małej*, a ten fakt ma podstawowe znaczenie np. w *analizie matematycznej*, gdzie o takich wielkościach mówimy.

3.3 Liczby rzeczywiste, nasi tajemniczy przyjaciele

Dla przeciętnie wykształconego obywatela liczby rzeczywiste reprezentują punkty kontinuum geometrycznego. Jest kilkanaście definicji liczb rzeczywistych. Najbardziej znane są bodaj dwie: definicja z użyciem przekrojów Dedekinda (w zbiorze liczb wymiernych) oraz definicja wykorzystująca granice ciągów (liczb wymiernych) spełniających warunek Cauchy'ego.

Nasz przeciętnie wykształcony obywatel zna zatem liczby rzeczywiste trochę podobnie jak zna działanie niektórych co bardziej skomplikowanych urządzeń, np. komputera: widzi coś na monitorze, potrafi walić w klawisze i molestować mysz. Jest mu z reguły głęboko obojętne, dlaczego, na jakiej zasadzie jego działania (walenie w klawisze, molestowanie myszy) dają takie, a nie inne efekty.

Trochę podobnie, przeciętnie wykształcony obywatel wierzy (albo nawet pamięta dowód), że np. $\sqrt{2}$ nie jest liczbą wymierną. Choć zatem liczby wymierne tworzą porządek *gęsty*, to w porządku tym są *luki* i $\sqrt{2}$ jest taką luką. Ogółem jest tych luk jednak o wiele więcej, niż elementów (gęstego!) porządku liczb wymiernych: jest ich mianowicie kontinuum. Tylko z bardzo nieliczną ich grupą jesteśmy *oswojeni*: pamiętamy, że liczbami *niewymiernymi* są $\sqrt{2}$, π, e. Być może, pamiętamy o różnicy między liczbą $\sqrt{2}$ a, powiedzmy, liczbą π: ta pierwsza jest liczbą *algebraiczną* (pierwiastkiem wielomianu w ciele liczb rzeczywistych), a ta druga jest liczbą *przestępną* (nie jest pierwiastkiem żadnego takiego wielomianu). Liczb przestępnych jest kontinuum (ponieważ liczb algebraicznych jest przeliczalnie wiele). Istnieją wzory, „produkujące" nieskończenie wiele (ale, rzecz jasna tylko przeliczalnie wiele — bo tylko tyle jest wzorów) liczb przestępnych. Dość zabawną liczbą przestępną jest liczba, której rozwinięcie dziesiętne składa się z następujących po sobie kolejno liczb naturalnych:

$$0,1234567891011121314151617181920212223\ldots.$$

Ze szkoły pamiętamy, że rozwinięcia dziesiętne liczb wymiernych są skończone lub okresowe, a liczb niewymiernych są nieokresowe. Z kultury masowej możemy natomiast pamiętać np. o próbach znalezienia Tajnego Imienia Dobrego Pana Naszego JHWH, zakodowanego gdzieś w rozwinięciu dziesiętnym liczby π.

Tak naprawdę, to nikt nigdy i nigdzie nie widział w całości żadnej liczby niewymiernej.[16] W praktyce rachunkowej posługujemy się zawsze przybliżeniami wymiernymi (i to o skończonych rozwinięciach dziesiętnych lub innych) liczb niewymiernych.

[16] Tj. całego jej rozwinięcia dziesiętnego.

W zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych określone są (co najmniej) trzy rodzaje struktur, ważnych z praktycznego punktu widzenia:

- *algebraiczna* (związana z działaniami arytmetycznymi),
- *porządkowa* (związana z porządkiem),
- *topologiczna* (związana z pojęciami charakteryzującymi bliskość, ciągłość, różniczkowalność). Tu także mieszczą się struktury związane z *miarą* zbiorów.

Struktury te są nawzajem powiązane: np. działania arytmetyczne są (w ściśle określonym sensie) „zgodne" z porządkiem.

No dobrze, przerwie zniecierpliwony słuchacz: to wszystko wiemy ze szkoły, ale gdzie obiecane *tajemnice*? Przywołajmy zatem kilka wybranych faktów, raczej na zasadzie dygresji, niż rozbudowanych komentarzy.

- *Zbiór potęgowy* $\wp(\omega)$. *Hipoteza kontinuum.* Pytania o liczby rzeczywiste to również pytania o rodzinę wszystkich podzbiorów zbioru wszystkich liczb naturalnych. Z kolei, odpowiedź pytanie o moc tego ostatniego zbioru jest niezależna od aksjomatów teorii mnogości ZFC. Tak więc to, ile *naprawdę* jest liczb rzeczywistych nie wynika bezpośrednio z aksjomatów teorii mnogości ZFC.
- *Ułamki łańcuchowe.* Liczby rzeczywiste można przedstawiać na wiele sposobów, np. w rozwinięciu dwójkowym lub dziesiętnym. Ciekawa reprezentacja wykorzystuje *ułamki łańcuchowe*: tu liczby niewymierne są ułamkami łańcuchowymi o nieskończonych rozwinięciach. Są ciekawe związki między ułamkami łańcuchowymi a np. *zbiorem Cantora*.
- *Reprezentacje drzewowe. Zbiór Cantora.* Liczby rzeczywiste reprezentujemy też jako ciągi liczb naturalnych. Rodziny ciągów liczb naturalnych sprawiać mogą wiele niespodzianek. Słuchacze z pewnością zetknęli się z terminem *obiekt fraktalny, fraktal*. Zbiory Cantora, Sierpińskiego, Mandelbrota, granice pewnych ciągów funkcji (krzywa Peano, krzywa Hilberta) dostarczają przykładów obiektów geometrycznych, dla których nieco inaczej (niż podszeptuje nam intuicja potoczna) trzeba określać np. pojęcie wymiaru. Możemy się przeciwko temu (bezsilnie!) buntować, ale *prawie wszystkie* funkcje ciągłe nie są w żadnym punkcie różniczkowalne (co pokazał już Stefan Banach), a więc są obiektami, których w żadnym miejscu nie można pogłaskać bez obawy o pokaleczenie się.
- *Hierarchie zbiorów liczb rzeczywistych. Deskryptywna teoria mnogości.* Rozważa się różne *hierarchie* zbiorów liczb rzeczywistych, np.: zbiory borelowskie, analityczne, rzutowe. Hierarchie te tworzone są przez rozważenie skomplikowania definicji (liczby potrzebnych w definicji kwantyfikatorów) branych pod uwagę zbiorów. Hierarchie takie tworzymy także dla zbiorów liczb naturalnych: mają one związek np. z badaniem *stopni nierozstrzygalności*.
- *Zbiór Vitalego*. Określamy w odcinku $[0, 1)$ relację równoważności: $x \sim y$ dokładnie wtedy, gdy $x - y$ jest liczbą wymierną. Klasy abstrakcji tej relacji są rozłączne i niepuste, a więc na mocy aksjomatu wyboru istnieje *selektor* dla relacji

$\sim$, czyli zbiór mający dokładnie jeden element wspólny z każdą klasą abstrakcji relacji $\sim$. Każdy taki zbiór nazywamy *zbiorem Vitalego*. Dowodzi się, że zbiory Vitalego nie są mierzalne w sensie Lebesgue'a.

- *Problemy rozstrzygalności.* Teoria liczb rzeczywistych (czyli układu złożonego z wszystkich liczb rzeczywistych wraz z operacjami dodawania i mnożenia oraz relacją niewiększości i elementami wyróżnionymi 0, 1) jest rozstrzygalna. *Jakże to możliwe?!* — zapyta słuchacz, który pamięta, że nierozstrzygalna jest już teoria liczb naturalnych. Nie ma tu sprzeczności: w opisanej teorii liczb rzeczywistych nie ma sposobu wyróżnienia zbioru wszystkich liczb naturalnych. Teoria struktury liczb rzeczywistych jest nadto identyczna z teorią ciał domkniętych w sensie rzeczywistym, a ta ostatnia jest rozstrzygalna.

- *Inne, „bogatsze" systemy liczbowe.* Jak słuchacze wiedzą, równanie $x^2 = -1$ nie ma rozwiązania w ciele liczb rzeczywistych, a ma je dopiero w ciele liczb *zespolonych*. Poszczególne systemy liczbowe spełniają różne *zasady domknięcia* (ze względu na operacje arytmetyczne). Można zasadnie pytać, ile jest takich „naturalnie domkniętych" systemów liczbowych: skończenie czy też nieskończenie wiele? Obok liczb: naturalnych, całkowitych, wymiernych, rzeczywistych, zespolonych „naturalnymi" systemami są jeszcze: *kwaterniony* oraz *oktawy Cayleya*.

- *Twierdzenia: Frobeniusa, Ostrowskiego, Pontriagina.* W algebrze i topologii dowodzi się twierdzeń wskazujących na wyjątkowość liczb rzeczywistych ze względu na połączenie ich własności: algebraicznych, porządkowych i topologicznych. W tym zatem sensie, liczby rzeczywiste tworzą *model zamierzony* stosownych teorii, mówiących o tych własnościach.

  TWIERDZENIE FROBENIUSA. *Każda łączna algebra z dzieleniem nad ciałem liczb rzeczywistych jest izomorficzna albo z ciałem liczb rzeczywistych, albo z ciałem liczb zespolonych, albo z algebrą kwaternionów.*[17]

  TWIERDZENIE OSTROWSKIEGO. *Każde ciało zupełne w metryce odpowiadającej normie archimedesowej jest izomorficzne z ciałem liczb rzeczywistych lub ciałem liczb zespolonych, a norma jest równoważna ze zwykłą wartością bezwzględną.*

  TWIERDZENIE PONTRIAGINA. *Każde spójne lokalnie zwarte ciało topologiczne jest izomorficzne z ciałem topologicznym liczb rzeczywistych, lub ciałem topologicznym liczb zespolonych, lub ciałem topologicznym kwaternionów.*

- Możliwe są inne jeszcze (niż te podane metodą przekrojów Dedekinda lub ciągów podstawowych Cauchy'ego, ze „zwykłą" funkcją wartości bezwzględnej) rozszerzenia ciała liczb wymiernych: takim rozszerzeniem są na przykład *liczby p-adyczne*. Rozwinięcia takich liczb wykorzystują potęgowanie liczb pierwszych. Topologiczne własności takich liczb związane są ze zbiorem Cantora.

[17] Istnieje też uogólnienie tego twierdzenia, dodające w tezie *oktawy Cayleya*.

- Twórcy rachunku różniczkowego i całkowego, Sir Izaak Newton oraz Tajny Radca Gottfried von Leibniz, posługiwali się pojęciem wielkości *nieskończenie małej*. Z logicznego punktu widzenia było to wtedy pojęcie prowadzące do sprzeczności. Arytmetyzacja analizy dokonana w wieku XIX przez m.in. Augusta Cauchy'ego oraz Karla Weierstrassa[18] pozwoliła na obejście tych sprzeczności. Stworzona (odkryta?) przez Abrahama Robinsona w połowie wieku XX *analiza niestandardowa* pozwoliła z kolei na podanie matematycznych modeli, w których pojęciu wielkości *nieskończenie małej* odpowiada dobrze określony konstrukt matematyczny. Na rozważanych w analizie niestandardowej *liczbach hiperrzeczywistych* określone są oczywiście stosowne działania arytmetyczne.

Z tego wyrywkowego przeglądu widzimy więc chyba, że *model zamierzony* teorii liczb rzeczywistych (algebraicznej, porządkowej, topologicznej) również pozostaje tajemniczy.

4 Dygresja: geometria

Aksjomatyczna geometria Hilberta (1899) jest kategoryczna: jej jedynym, z dokładnością do izomorfizmu, modelem jest znany słuchaczom ze szkoły (z lekcji geometrii analitycznej) model kartezjański. Geometria Hilberta nie jest jednak systemem elementarnym: występujący w niej *aksjomat ciągłości* odwołuje się do *zbiorów* (punktów). Na marginesie zauważmy, że pierwotnie aksjomat ten miał postać tzw. *aksjomatu ekstremalnego*, głosił, że:

> Elementy (punkty, proste, płaszczyzny) systemu geometrii tworzą system, który nie może zostać rozszerzony bez jednoczesnego naruszenia pozostałych aksjomatów, tj. nie można dodać do tego systemu punktów, prostych i płaszczyzn innego systemu przedmiotów tak, aby powstały system spełniał aksjomaty AI–V1 (czyli wszystkie pozostałe aksjomaty).

Aksjomatem ekstremalnym jest również aksjomat indukcji w arytmetyce (przy czym tam, w odróżnieniu od powyższego aksjomatu *maksymalności*, jest to aksjomat *minimalności*). Znajdujemy tego typu aksjomaty również w algebrze oraz teorii mnogości: np. aksjomaty istnienia dużych liczb kardynalnych są aksjomatami *maksymalności* w teorii mnogości.[19]

Jak pamiętamy, aksjomatyka geometrii euklidesowej z pominięciem aksjomatu o równoległych stanowi podstawę *geometrii absolutnej*. Nie jest to system kategoryczny. Aksjomat o równoległych jest niezależny od tego systemu. Można zatem dodać do systemu geometrii absolutnej jego zaprzeczenie i otrzymać system geometrii *nieeuklidesowej* (dokładniej, dwa takie systemy: geometrię *eliptyczną* oraz geometrię

[18] Matematycy także mogą się dobrze reklamować: *Dobrze aproksymujemy. Firma Karl Weierstrass i Synowie, dawniej Karl Weierstrass.*

[19] Aksjomatom ekstremalnym w różnych dziedzinach matematyki poświęcamy osobną rozprawę, będącą właśnie w przygotowaniu; tam będzie więcej o takich aksjomatach m.in. w geometrii oraz algebrze. Na seminarium bezpośrednio po tym wykładzie powiemy parę słów o aksjomatach ekstremalnych w teorii mnogości.

hiperboliczną). Należy jednak wystrzegać się nazywania modeli geometrii nieeuklidesowych modelami *niezamierzonymi*. Wyróżnione miejsce wśród systemów geometrii zajmuje geometria euklidesowa ze względów natury historycznej i filozoficznej. Podobnie rzecz się ma np. z *geometrią rzutową*: pamiętamy, jakie są jej związki ze sztukami wizualnymi.

Modelem dla geometrii eliptycznej jest np. układ, w którym punktami są pary punktów antypodycznych na sferze (trójwymiarowej), prostymi okręgi kół wielkich tej sfery, a płaszczyzną zbiór wszystkich tak rozumianych punktów. W tym modelu nie istnieją proste „równoległe" (proste rozłączne). Słuchacze łatwo sobie wyobrażą, że np. komunikacja lotnicza bierze pod uwagę własności tego modelu (oraz nieregularności spowodowane warunkami natury politycznej).

Modelem dla geometrii hiperbolicznej jest np. *dysk Poincaré'go*. Punktami są tu punkty wnętrza koła, a prostymi są łuki okręgów prostopadłych do okręgu ograniczającego rozważane koło oraz cięciwy tego ostatniego okręgu. W tym modelu przez punkt nie leżący na danej prostej można zatem poprowadzić więcej niż jedną prostą „równoległą" do danej. Już Poincaré podał możliwą interpretację fizyczną takiego modelu: taki Wszechświat byłby płaskim dyskiem bez brzegu, rozmiary obiektów fizycznych zmieniałyby się w zależności od ich odległości od środka dysku. Tak więc, krocząc ku krawędzi Wszechświata nigdy nie zdołałbyś jej osiągnąć: twoje kroki byłyby coraz mniejsze (ty sam zresztą również). Artystyczna wizja takiego Wszechświata znana jest z grafik Eschera.

5 Teoria mnogości

Wspomniany już parokrotnie przeciętnie wykształcony obywatel nie ma większych trudności w operowaniu zbiorami skończonymi. Kłopoty pojawiają się gdy próbujemy oswoić go ze zbiorami nieskończonymi oraz operacjami na nich.

5.1 Modele teorii mnogości

Teoria mnogości Zermelo-Fraenkla jest grzeczną teorią pierwszego rzędu, możemy więc pytać, czy ma ona modele i jakie są to modele. Ze szkoły pamiętamy slogan, iż ogół wszystkich zbiorów sam nie może być zbiorem, gdyż prowadzi to do sprzeczności. Uniwersa modeli teorii mnogości muszą być zatem innego rodzaju *dziedzinami*: mówimy, że są one *klasami*. O klasach możemy myśleć jako o ekstensjach formuł z jedną zmienną wolną. Dla przykładu, *klasa uniwersalna* V jest wyznaczona przez warunek $x \doteq x$, a *klasa pusta* $\emptyset$ przez: $\neg x \doteq x$. Przy tym, $\emptyset$ jest zbiorem, a V jest klasą właściwą (nie jest zbiorem). To, że klasa wyznaczona przez formułę $\psi(x)$ jest *zbiorem*, określa warunek: $\exists y \forall z\ (z \in y \equiv \psi(x))$, gdzie y nie jest wolna w ψ.

Przy pewnych *dodatkowych* założeniach (nowych aksjomatach, niewyprowadzalnych z wyjściowych) istnieją jednak *zbiory*, w których wszystkie aksjomaty wyjściowe są prawdziwe, czyli istnieją zbiory, będące modelami dla teorii mnogości. Uprzedzając dalsze uwagi, możemy powiedzieć, że tego typu nowe aksjomaty stwierdzają istnienie dużych liczb kardynalnych (dużych mocy zbiorów). Oczywiście, skoro taki nowy aksjomat nie jest wyprowadzalny z wyjściowych, to w modelu go spełniającym prawdziwe będą zdania stwierdzające istnienie zbiorów o mocy *mniejszej* od tej postulowanej przez nowy aksjomat. Rozważmy prosty przykład. Słuchacze zetknęli się być może z *hierarchią kumulatywną zbiorów*, definiowaną (przez tzw. *indukcję pozaskończoną*) w sposób następujący:

- $V_0 = \emptyset$
- $V_{\alpha+1} = \wp(V_\alpha)$
- $V_\lambda = \bigcup\{V_\beta : \beta < \lambda\}$ dla λ granicznych
- $V = \bigcup\{V_\alpha : \alpha$ jest liczbą porządkową$\}$.

Aby precyzyjnie objaśnić powyższą konstrukcję trzeba byłoby oczywiście podać wiele definicji (liczb porządkowych, ich uporządkowania, operacji na nich, liczb następnikowych i granicznych, klasy liczb porządkowych), na co nie możemy sobie tu i teraz pozwolić. Wystarczyć powinna *intuicja*: wychodząc od zbioru pustego budujemy kolejne piętra hierarchii V za pomocą operacji tworzenia zbioru potęgowego oraz operacji sumowania, stosowanych do pięter już zbudowanych.

Nazwiemy liczbę kardynalną[20] κ liczbą *(mocno) nieosiągalną*, jeżeli spełnia ona następujące dwa warunki:

- Dla każdej liczby kardynalnej $\lambda < \kappa$ również liczba kardynalna 2^κ jest mniejsza od κ.[21]
- κ nie jest sumą mniej niż κ zbiorów mocy mniejszej niż κ.

Liczby nieosiągalne nie mogą zatem zostać „osiągnięte” przez operacje: tworzenia zbioru potęgowego i sumowania. Ich istnienia nie można udowodnić w teorii mnogości ZF. Przy założeniu ich istnienia można natomiast udowodnić, że każde piętro V_κ hierarchii kumulatywnej, gdzie κ jest liczbą nieosiągalną, jest modelem dla teorii ZF. Ponieważ każda moc zbioru jest alefem, to jeśli istnieją liczby nieosiągalne κ, to (jak się dowodzi) spełniają one warunek: $\kappa = \aleph_\kappa$.

Postulat istnienia liczb nieosiągalnych to przykład *silnego aksjomatu nieskończoności*. Rozważa się wiele takich aksjomatów, stwierdzających istnienie o wiele większych liczb kardynalnych niż liczby nieosiągalne. Motywacją dla tych rozważań jest m.in. to, że pozwalają one dowodzić wyników dotyczących *względnej niesprzeczności* różnych zdań języka teorii ZF od aksjomatów tej teorii. Powiemy o tym więcej za chwilę. Przytoczmy w tym momencie opinię Andrzeja Mostowskiego o silnych aksjomatach nieskończoności (Mostowski, A. 1967. O niektórych nowych wynikach meta-matematycznych dotyczących teorii mnogości. *Studia Logica* **20**, 99–116; cytat ze strony 103):

[20]Znowu, musimy pominąć precyzyjną definicję. Liczby kardynalne to moce zbiorów.

[21]Pomijamy precyzyjne definicje operacji dodawania, mnożenia i potęgowania liczb kardynalnych.

> Dowody niezależności aksjomatów nieskończoności są na ogół łatwe. Natomiast nie ma żadnej nadziei na uzyskanie dowodów ich względnej niesprzeczności. Drugie twierdzenie Gödla o niezupełności pokazuje, że dowód względnej niesprzeczności nie mógłby być formalnie przeprowadzony w teorii mnogości. Wobec tego, co powiedzieliśmy wyżej o rekonstrukcji matematyki w teorii mnogości, nie jest łatwo zdać sobie sprawę jak wyglądałby taki nieformalizowalny dowód. Musimy więc stwierdzić, że nie ma racjonalnych podstaw do przyjmowania mocnych pewników nieskończoności.

Praktyka badawcza w teorii mnogości w ostatnich dekadach wydaje się być inna, niż konkluzja powyższego cytatu. Refleksja nad tym stanem rzeczy wykracza jednak poza ramy niniejszego odczytu.

Wróćmy do modeli teorii mnogości. Pierwsze z nich rozważane były przez Ernsta Zermela, Johna von Neumanna, Abrahama Fraenkla, Andrzeja Mostowskiego. Dopiero jednak prace Kurta Gödla dotyczące uniwersum konstruowalnego oraz względnej niesprzeczności aksjomatu wyboru i uogólnionej hipotezy kontinuum z aksjomatami ZF dały początek bardziej intensywnym badaniom takich modeli. Przypomnijmy:

- Aksjomat Wyboru. *Dla dowolnej rodziny zbiorów niepustych i parami rozłącznych istnieje zbiór, który z każdym elementem tej rodziny ma dokładnie jeden element wspólny.* Zwróćmy uwagę na *niekonstruktywny* charakter tego aksjomatu: mówi się o istnieniu pewnego zbioru, nie podając żadnej wskazówki, jak należy go budować.

- Hipoteza Kontinuum. $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$. Hipoteza ta głosi zatem, że moc rodziny wszystkich podzbiorów zbioru przeliczalnego (np. zbioru wszystkich liczb naturalnych) jest bezpośrednio następną mocą nieskończoną, po najmniejszej takiej mocy.

- Uogólniona Hipoteza Kontinuum. $\aleph_{\alpha+1} = 2^{\aleph_\alpha}$, *dla każdej liczby porządkowej* α.

Obecnie aksjomat wyboru jest powszechnie akceptowany w praktyce matematycznej. Bez niego nie można udowodnić wielu podstawowych dla różnych działów matematyki twierdzeń. Rozważa się różne wersje tego aksjomatu.

Hipoteza kontinuum (CH) oraz uogólniona hipoteza kontinuum (GCH) to problemy, które fascynowały matematyków od samego początku teorii mnogości. Czy dwie skale mocy nieskończonych, o których wspomnieliśmy na początku odczytu pozostają do siebie w takiej odpowiedniości, jak głosi to GCH? W szczególności, jaka jest (w skali alefów) moc zbioru wszystkich liczb rzeczywistych? Czy istnieją nieskończone zbiory liczb rzeczywistych o mocach pośrednich między $\aleph_0$ a $2^{\aleph_0}$? Gdzie na skali alefów leży kontinuum, czyli liczba $2^{\aleph_0}$? Wreszcie, jak mają się aksjomat wyboru, CH oraz GCH do aksjomatów ZF: czy są one (lub ich negacje) wyprowadzalne z aksjomatów ZF?

- Kurt Gödel podał (w 1940 roku) przykład klasy L (zbiorów *konstruowalnych*) takiej, że:

1. L jest *uniwersum*,[22] a więc modelem-klasą dla ZF.
2. $ZF \vdash AC^{(L)} \wedge GCH^{(L)}$.

- W konsekwencji: jeśli ZF niesprzeczna, to $ZF \cup \{AC, GCH\}$ jest niesprzeczna.

Klasa L tworzy pewną hierarchię. Jej piętra graniczne buduje się, podobnie jak w przypadku hierarchii kumulatywnej poprzez sumowanie uprzednio zdefiniowanych pięter. Na początku konstrukcji mamy zbiór pusty, również tak jak poprzednio. Inaczej jest jednak w przypadku tworzenia pięter następnikowych. Tu nie tworzymy *całego* zbioru potęgowego (poprzedniego piętra), ale bierzemy pewien jego podzbiór, złożony jedynie ze zbiorów *definiowalnych* (formułami języka teorii mnogości, z parametrami odnoszącymi się do zbiorów już skonstruowanych).

W ogólności, można budować różne uniwersa, będące modelami dla teorii mnogości. Wyposażone one muszą być m.in. w operację, która podaje dla każdego zbioru wszystkie jego podzbiory, które miałyby istnieć w tym uniwersum. Operacja, którą wykorzystał Gödel daje *najmniejszy* możliwy zbiór mogący być kandydatem na na rodzinę wszystkich podzbiorów. Pełna operacja zbioru potęgowego jest oczywiście operacją podającą maksymalny taki zbiór.

Klasa L jest *przechodnim*[23] modelem ZF, zawierającym wszystkie liczby porządkowe. Dla dowodu, że $ZFL \vdash AC$ definiuje się pewną globalną funkcję wyboru, korzystając z faktu, iż w L można wprowadzić dobry porządek (który z kolei jest wyznaczony przez dobre uporządkowanie wyrażeń rozważanego języka). Ponadto, dowodzi się, że jeśli ZF jest niesprzeczna, to $ZF \cup \{AC, GCH\}$ jest niesprzeczna.

5.1.1 Mała dygresja historyczna: aksjomaty ograniczenia

Na marginesie dodajmy, że tzw. *aksjomat konstruowalności* $V = L$, głoszący, że wszystkie zbiory są konstruowalne jest przykładem aksjomatu ekstremalnego w teorii mnogości. Oczywiście, ogranicza on liczbę zbiorów: jest aksjomatem *minimalności* (ograniczenia). Innym, wcześniej rozważanym aksjomatem ograniczenia był tzw. *aksjomat ograniczenia* Fraenkla, który głosił, w przybliżeniu, że nie istnieją żadne zbiory oprócz tych, których istnienie można dowieść z aksjomatów teorii mnogości. Aksjomaty ograniczenia nie są już rozważane jako ewentualne nowe aksjomaty teorii mnogości.[24] Poszukuje się raczej *aksjomatów maksymalności*, mających gwarantować, że jest możliwie jak najwięcej zbiorów: powiemy o tym za chwilę, omawiając aksjomaty istnienia dużych liczb kardynalnych.

Fraenkel, formułując swój aksjomat ograniczenia, dążył do uzyskania jakiejś wersji zupełności teorii mnogości. Trzeba pamiętać, że aksjomat ten został sformułowany w 1922 roku i powtórzony w drugim wydaniu *Einleitung in die Mengenlehre* z 1928 roku, a więc przed wynikami o niezupełności uzyskanymi przez Gödla, wraz z ich konsekwencjami także dla teorii mnogości.

---

[22] Pomijamy precyzyjną definicję tego oraz paru dalszych pojęć występujących poniżej.

[23] Zbiór (także: klasa) x jest przechodni, gdy dla wszystkich $y \in x$ oraz $z \in y$ zachodzi: $z \in x$.

[24] Uwagi w tym punkcie opieram na notatkach do tekstu „Aksjomaty ograniczenia w teorii mnogości", który ukazał się w: I. Bondecka-Krzykowska, J. Pogonowski (red.) *Światy matematyki. Tworzenie czy odkrywanie? Księga Pamiątkowa ofiarowana Profesorowi Romanowi Murawskiemu.* Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2010.

O ile aksjomat zupełności w systemie Hilberta miał gwarantować, że dziedzina systemu jest możliwie najbardziej *obszerną* spełniającą aksjomaty, o tyle w teorii mnogości aksjomat ograniczenia (podobnie jak schemat aksjomatu indukcji w arytmetyce) miałby gwarantować, iż dziedzina jest możliwie najbardziej *wąską*, spełniającą aksjomaty.

Należy pamiętać, że aksjomat ograniczenia formułowany był dla teorii mnogości bez aksjomatu regularności. Fraenkel podkreśla, że ten system aksjomatów nie wyklucza istnienia zbiorów nieufundowanych, czyli takich nieskończonych łańcuchów zbiorów x_n, gdzie n jest liczbą naturalną, dla których zachodzi $x_{n+1} \in x_n$, dla wszystkich n. Aksjomat ograniczenia miałby umożliwić wykluczenie takich sytuacji.

Fraenkel był oczywiście w pełni świadom, że aksjomat ten jest całkowicie odmienny od pozostałych (nie jest ani egzystencjalny, ani „relacyjny", tj. pozwalający na tworzenie zbiorów z innych, danych już zbiorów). Podkreślał też rolę składnika indukcyjnego, *implicite* zawartego w aksjomacie ograniczenia. W każdym razie, jak pisał Fraenkel, aksjomat ograniczenia (jeśli dałoby się go sformułować w precyzyjnej postaci) powinien gwarantować, że pojęcie zbioru określane przez aksjomatyczną teorię mnogości byłoby tak wąskie, jak to możliwe. Nie można wykluczyć, że w sformułowaniu aksjomatu ograniczenia Fraenkel wzorował się na wynikach Dedekinda dotyczących definicji liczb naturalnych (w ramach „teorii łańcuchów").

Bodaj najbardziej wnikliwą krytykę aksjomatów minimalności w teorii mnogości podano w Fraenkel, A.A., Bar Hillel, Y., Levy A. 1973. *Foundations of set theory*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam London. Formułuje się tam, poddając następnie krytyce, dwa aksjomaty ograniczenia.

Głównym pomysłem na wyrażenie faktu, iż nie ma więcej zbiorów niż wymagają tego aksjomaty jest następujący schemat:

- *Jeśli Q jest własnością taką, że każdy zbiór, którego istnienie wynika z aksjomatów ma własność Q, to każdy zbiór ma własność Q.*

Trzeba teraz wyrazić w sposób ścisły sformułowanie „Każdy zbiór, którego istnienie wynika z aksjomatów ma własność Q." Ponieważ rozważany system aksjomatów jest nieskończony, więc stwierdzenia tego nie wyrazimy jedną formułą. Bez wdawania się w szczegóły powiedzmy jedynie, że rozważana własność Q odnosi się do domknięcia uniwersum na podstawowe operacje tworzenia zbiorów, występujące w aksjomatach teorii mnogości. Tak rozumiejąc Pierwszy Aksjomat Ograniczenia dowodzi się np., że:

- Pierwszy Aksjomat Ograniczenia jest równoważny koniunkcji aksjomatu ufundowania oraz zdania stwierdzającego, iż nie istnieją nieosiągalne liczby kardynalne. Można zatem udowodnić również konsekwencje nieistnienia takich liczb.

- Przy sformułowaniu teorii mnogości w logice drugiego rzędu (lub w systemie ze zbiorami i klasami), aksjomaty w rodzaju Pierwszego Aksjomatu Ograniczenia pozwalają na udowodnienie kategoryczności takiej teorii mnogości.

- Z Pierwszego Aksjomatu Ograniczenia *nie* można wywnioskować niczego na temat hipotezy kontinuum.

Drugi Aksjomat Ograniczenia to następująca koniunkcja poniższych zdań (i) i (ii):

(i) Wszystkie zbiory są konstruowalne.

(ii) Nie istnieją zbiory przechodnie, które są modelami ZF.

Ze zdania (i) wynika, że wszystkie zbiory są ufundowane. Jak wiadomo z pracy Gödla, (i) implikuje także uogólnioną hipotezę kontinuum. Z kolei, zdanie (ii) implikuje, że nie istnieją nieosiągalne liczby kardynalne. Widać zatem, że Drugi Aksjomat Ograniczenia implikuje Pierwszy Aksjomat Ograniczenia.

Każdy z powyższych aksjomatów ogranicza liczbę istniejących zbiorów. Najważniejsze argumenty przeciw przyjmowaniu takich aksjomatów, to wedle autorów:

- Pierwszy to argument z analogii. W przypadku aksjomatu indukcji w arytmetyce lub aksjomatu zupełności w geometrii są one przyjmowane nie dlatego, że czynią system aksjomatów kategorycznym, ani dlatego, że służą jakimś celom metamatematycznym, ale dlatego, iż po dodaniu tych aksjomatów otrzymujemy systemy, które w sposób doskonały oddają nasze intuicje dotyczące arytmetyki i geometrii. Powód dodania tych aksjomatów miałby zatem, wedle autorów, naturę *pragmatyczną*. Przez analogię, aksjomaty ograniczenia w teorii mnogości powinny być oceniane w zależności od tego, czy otrzymana po ich dodaniu teoria mnogości wiernie oddaje nasze intuicje dotyczące zbiorów.

- Ograniczenie pojęcia zbioru do możliwie najwęższego zgodnego z aksjomatami ZFC jedynie dla względów ekonomii byłoby właściwie jedynie wtedy, gdybyśmy w sposób absolutny wierzyli, że te aksjomaty oraz ich konsekwencje są jedynymi matematycznie interesującymi stwierdzeniami o zbiorach. Autorzy twierdzą, że trudno przyjąć taką absolutną wiarę w odniesieniu do aksjomatów ZFC. A nawet gdyby to przyjąć, to należałoby raczej poszukiwać czegoś w rodzaju aksjomatu zupełności (jak w geometrii), a nie aksjomatu ograniczenia, oczywiście pod warunkiem, że tego typu aksjomat można byłoby precyzyjnie sformułować.

- Kolejny argument związany jest ze sceptycznym stanowiskiem autorów wobec aksjomatu konstruowalności Gödla. Chodzi mianowicie o uzasadnienie tego fragmentu aksjomatu ograniczenia, który każe ograniczać „rozmiar" zbiorów. Przy tym, autorzy przypominają o dwóch czynnikach (oraz ich wzajemnych związkach) odgrywających ważną rolę w argumentach za lub przeciw przyjęciu jakiegoś stwierdzenia za aksjomat: *elegancji matematycznej* oraz *postawie platońskiej*.

  Elegancja matematyczna. Nie można powiedzieć, aby aksjomaty ograniczenia przyczyniały się do matematycznej elegancji teorii dlatego, iż możemy z ich pomocą udowodnić jakieś mocniejsze twierdzenia. Jeśli aksjomaty owe są użyteczne w dowodach takich twierdzeń to raczej poprzez fakt, iż po prostu zaprzeczają istnieniu zbiorów, które „nie pasują" do dowodzonego twierdzenia. Inaczej rzecz się ma np. z aksjomatem ufundowania.

Postawa platońska. Aksjomaty ograniczenia poświadczają istnienie pewnych ustalonych uniwersów zbiorów (które to uniwersa same zbiorami nie są). Wiemy skądinąd, że uniwersum wszystkich zbiorów nie może być zbiorem. Pogodzenie tego faktu z postawą platońską może polegać na uznaniu, iż uniwersum wszystkich zbiorów nie jest ustalone, lecz raczej jest stale zdolne do „rozwijania się", czyli iż jesteśmy w stanie stale „produkować" coraz to większe zbiory. Jeśli teraz ogół wszystkich zbiorów (przy przyjęciu aksjomatu ograniczenia) miałby być bytem platońskim, to dlaczego nie moglibyśmy uznać go za nowy zbiór w szerszym uniwersum niż to, które wyznacza aksjomat ograniczenia? Pogodzenie ze sobą obrazu stale rosnącego uniwersum zbiorów oraz żądania, aby mówić o prawdzie lub fałszu stwierdzeń o *wszystkich* zbiorach prowadzi do założenia, że niektóre „tymczasowe" uniwersa są dowolnie bliskimi „aproksymacjami" ostatecznego, nieosiągalnego uniwersum. Sprawa ta znajduje swoje formalne rozwiązania w *zasadach odbicia*.

5.2 Wyniki metamatematyczne

Wyniki Gödla dotyczące względnej niesprzeczności aksjomatu wyboru oraz uogólnionej hipotezy kontinuum ukazują, że w ZF ani zaprzeczenia tego aksjomatu, ani zaprzeczenia owej hipotezy udowodnić nie można. Wiemy nadto (udowodnił to już Wacław Sierpiński), że ZF wraz z GCH implikuje aksjomat wyboru. Pozostaje jednak problem: czy można w ZF udowodnić aksjomat wyboru lub (uogólnioną) hipotezę kontinuum? Gdyby udało się zbudować model dla ZF, w którym nie byłaby prawdziwa hipoteza kontinuum (a więc w konsekwencji również GCH nie byłaby w nim prawdziwa), to uzyskalibyśmy *niezależność* hipotezy kontinuum od aksjomatów ZF: w pewnych modelach CH jest prawdziwa, w pewnych fałszywa, a zatem ani CH, ani jej zaprzeczenia nie można udowodnić w ZF.

Problem ten został rozstrzygnięty przez Paula Cohena w 1963 roku. Oryginalna metoda stosowana w dowodzie tego wyniku nazywana jest *wymuszaniem*. Za jej pomocą konstruuje się model dla ZF, w którym hipoteza kontinuum jest fałszywa. Co więcej, można zbudować nieprzebrane mnóstwo takich modeli: okazuje się, że kontinuum może mieć *prawie* dowolną wartość na skali alefów.[25]

Na mocy wyniku Cohena mamy także następujący wniosek:

- *Jeśli ZF jest niesprzeczna, to* $ZFC \cup \{\neg V \doteq L\}$ *jest niesprzeczna.*

Stosując różne, często wielce wyrafinowane wersje metody wymuszania pokazano, że jeśli ZF jest niesprzeczna, to $ZF \cup \{\psi\}$ jest niesprzeczna, dla szeregu dalszych zdań ψ języka teorii mnogości. Metoda wymuszania okazała się więc niezwykle płodna.[26]

[25] Są pewne ograniczenia (twierdzenia Eastona, Silvera, Shelaha). Znanym już dawno ograniczeniem jest $\aleph_0 < cf(2^{\aleph_0})$, czyli to, iż kontinuum nie może mieć przeliczalnej *współkońcowości*. W szczególności, $\aleph_\omega$ jest pierwszą nieprzeliczalną mocą nieskończoną, która nie może być wartością kontinuum.

[26] Notatki do ostatniego wykładu *Metalogika* dla doktorantów Instytutu Filozofii Uniwersytetu Opolskiego, zamieszczone na stronach Zakładu Logiki Stosowanej UAM zawierają nieco informacji o klasycznym wyniku Cohena.

Jakie implikacje dla charakterystyki *modelu zamierzonego* teorii mnogości mają wyniki Gödla, Cohena i innych, którzy wskazali na wielką różnorodność zdań teorii mnogości niezależnych od ZF?

Po pierwsze, warto zauważyć, że dla ZF zachodzą (stosownie sformułowane) twierdzenia Gödla o niezupełności oraz niedowodliwości niesprzeczności, ponieważ arytmetykę PA można interpretować w teorii mnogości ZF. Przy okazji zwróćmy też uwagę na pewną asymetrię, przynajmniej w dzisiejszym paradygmacie podstaw matematyki. Arytmetykę możemy interpretować w teorii mnogości, ale interpretacja odwrotna nie wydaje się naturalna.[27] Teoria mnogości jest instancją odwoławczą dla arytmetyki, ale sama nie ma już dla siebie innej instancji odwoławczej.

Po drugie, zauważmy, że obecnie znanych jest bardzo wiele zdań niezależnych od ZF, por. kilka ważnych przykładów:

- CH i GCH. Kontinuum może przyjmować prawie dowolną wartość: $\aleph_1$, $\aleph_{2010}$, itd. Automatycznie dostajemy więc nieskończoną wielość zdań niezależnych od aksjomatów teorii mnogości.

- Ani aksjomatu konstruowalności, ani jego zaprzeczenia nie można udowodnić w teorii ZFC (ZF z aksjomatem wyboru).

- AD, czyli *aksjomat determinacji* (o nim za chwilę). AD jest sprzeczny z aksjomatem wyboru.

- *Drzewo Suslina* to drzewo o wysokości $\aleph_1$, w którym zarówno wszystkie łańcuchy, jak i antyłańcuchy są przeliczalne. *Hipoteza Suslina* SH głosi, że *nie istnieje drzewo Suslina*. Aksjomat konstruowalności implikuje zaprzeczenie SH. Hipotezę SH można też sformułować tak: każdy porządek liniowy bez elementu pierwszego i ostatniego, w którym topologia porządkowa jest spójna i spełnia warunek ccc (przeliczalnych antyłańcuchów) jest izomorficzny ze zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych z ich naturalnym porządkiem.

- *Aksjomat Martina MA. Niech P będzie zbiorem częściowo uporządkowanym o własności ccc (przeliczalnych antyłańcuchów), a G rodziną gęstych podzbiorów zbioru P o mocy mniejszej od $2^{\aleph_0}$. Wtedy istnieje filtr $F \subseteq P$, który ma niepusty przekrój z każdym zbiorem z G.* Hipoteza kontinuum implikuje MA. Podczas gdy CH implikuje, że jedyną nieskończoną liczbą kardynalną mniejszą od $2^{\aleph_0}$ jest $\aleph_0$, to MA implikuje, że każda nieskończona liczba kardynalna mniejsza od $2^{\aleph_0}$ jest w pewnym sensie podobna do $\aleph_0$. Konsekwencją MA oraz zaprzeczenia CH jest np. to, że $2^{\aleph_0}$ jest regularną liczbą kardynalną, a także SH; połączenie MA i $\neg$CH ma też wiele ciekawych konsekwencji topologicznych.

- *Drzewa Kurepy*. Niech κ będzie regularną liczbą kardynalną nieskończoną. Przez κ-drzewo rozumiemy drzewo o wysokości κ, którego każdy α-ty poziom ma moc mniejszą od κ, dla wszystkich $\alpha < \kappa$. Jak wiadomo (TWIERDZENIE KÖNIGA), każde ω-drzewo ma gałąź nieskończoną. Istnieje $\aleph_1$-drzewo, którego

[27] Wszystkie zbiory *skończone* możemy kodować w arytmetyce, ale teoria mnogości jest przede wszystkim teorią zbiorów *nieskończonych*.

wszystkie gałęzie są przeliczalne (takie drzewa nazywamy *drzewami Aronszajna*). Drzewo Aronszajna jest *specjalne*, gdy jest sumą przeliczalnie wielu antyłańcuchów. Z MA oraz zaprzeczenia CH wynika, że każde drzewo Aronszajna jest specjalne. *Drzewem Kurepy* nazywamy $\aleph_1$-drzewo, które ma więcej niż $\aleph_2$ gałęzi nieprzeliczalnych. *Hipoteza Kurepy* KH to zdanie stwierdzające, że *istnieją drzewa Kurepy*. Hipoteza Kurepy jest spełniona w uniwersum konstruowalnym L. Jeśli niesprzeczna jest ZFC wraz z aksjomatem istnienia liczb nieosiągalnych, to niesprzeczna jest ZFC wraz z zaprzeczeniem KH.

- *Diament Jensena*. Niech κ będzie nieprzeliczalną regularną liczbą kardynalną. Zbiór C jest *stacjonarnym* podzbiorem κ, jeśli $C \cap S \neq \emptyset$ dla każdego domkniętego (w topologii porządkowej na κ) nieograniczonego zbioru $S \subseteq \kappa$. Przez *diament Jensena* $\diamondsuit$ rozumiemy następujące zdanie:

  Istnieje ciąg $\langle A_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ taki, że:

  1. $A_\alpha \subseteq \alpha$ dla każdej liczby porządkowej $\alpha < \omega_1$
  2. Dla każdego zbioru $A \subseteq \omega_1$ zbiór $\{\alpha < \omega_1 : A \cap \alpha = A_\alpha\}$ jest stacjonarny.

  Jeśli ZFC jest niesprzeczna, to niesprzeczna jest także ZFC$\cup\{$GCH$\} \cup \{\neg\diamondsuit\}$. Diament $\diamondsuit$ implikuje CH. Aksjomat konstruowalności implikuje $\diamondsuit$. Jeśli zachodzi $\diamondsuit$, to istnieje $\aleph_1$-drzewo Suslina. Wzmocnieniem diamentu Jensena jest następujący warunek $\diamondsuit^+$:

  Istnieje ciąg $\langle \mathcal{A}_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ taki, że:

  1. Dla każdej liczby porządkowej $\alpha < \omega_1$ zbiór $\mathcal{A}_\alpha$ jest przeliczalną rodziną podzbiorów α.
  2. Dla każdego zbioru $A \subseteq \omega_1$ istnieje domknięty i nieograniczony zbiór $C \subseteq \omega_1$ taki, że dla wszystkich $\alpha \in C$ zarówno $A \cap \alpha \in \mathcal{A}_\alpha$, jak też $C \cap \alpha \in \mathcal{A}_\alpha$.

  Warunek $\diamondsuit^+$ implikuje warunek $\diamondsuit$. Aksjomat konstruowalności implikuje $\diamondsuit^+$. Jeśli $\diamondsuit^+$ zachodzi, to istnieje ω_1-drzewo Kurepy (które ma 2^{ω_1} gałęzi o długości ω_1).

Ta obfitość zdań niezależnych może niepokoić: daje świadectwo, że aksjomaty ZF słabo charakteryzują pojęcie zbioru, z punktu widzenia możliwych do rozważenia własności matematycznych. Wyjścia z tej sytuacji są, jak się zdaje, dwa:

- poszukiwanie nowych aksjomatów, rozszerzających ZF i precyzujących znaczenie terminu *zbiór*,
- uznanie, że teoria mnogości nie ma tak fundamentalnego, wyróżnionego statusu, a więc traktowanie poszczególnych modeli teorii mnogości podobnie, jak traktujemy np. przestrzenie topologiczne, lub inne klasy przestrzeni, charakteryzowanych ogólnymi aksjomatami, acz różniącymi się między sobą w wybranych aspektach.

Obecnie przeważa chyba podejście pierwsze; być może praktyka matematyczna, która ma tu przecież głos decydujący, skłoni — powiedzmy nasze prawnuki — do przychylenia się do drugiego podejścia.

Metoda wymuszania ma obecnie wiele wyrafinowanych odmian. Ważne okazało się m.in. *wymuszanie Boolowskie*, gdzie uniwersa teorii mnogości rozważa się jako hierarchie klas funkcji o wartościach w zupełnych algebrach Boole'a.[28]

5.3 Poszukiwanie nowych aksjomatów

Skoro jest tak wiele zdań niezależnych od aksjomatów teorii mnogości, a teoria ta ma tak wiele różnorodnych modeli, to zasadne staje się pytanie o *nowe* aksjomaty, precyzujące pojęcie zbioru oraz — ewentualnie — pozwalające rozstrzygać zdania dotąd nierozstrzygalne w pierwotnej aksjomatyce. Pamiętajmy przy tym, że dodanie nowych aksjomatów zmienia znaczenie terminu *zbiór*: w obecności nowego aksjomatu mogą pojawić się nowe zbiory (lub „zniknąć" inne).

Mówi się o *programie Gödla* w kontekście szukania nowych aksjomatów teorii mnogości.[29] Oto co pisze np. Joan Bagaria (tłumaczenie: JP):

> Wedle Gödla jest pięć takich zasad: *Intuicyjny zasięg*, *Zasada Domknięcia*, *Zasada Odbicia*, *Ekstensjonalizacja* oraz *Jednostajność*. Pierwsza zasada, *Intuicyjnego zasięgu* to zasada intuicyjnego tworzenia zbiorów, która wcielona jest w aksjomaty ZFC. *Zasada Domknięcia* może zostać podłączona pod *Zasadę Odbicia*, którą można podsumować następująco: uniwersum V wszystkich zbiorów nie może zostać jednoznacznie scharakteryzowane, tj. odróżnione od wszystkich swoich odcinków początkowych przez jakąkolwiek własność wyrażalną w dowolnej rozsądnej logice wykorzystującej relację należenia. Słabą formą tej zasady jest dowodliwe w ZFC twierdzenie o odbiciu, autorstwa Montague i Levy'ego (zob. Kanamori 1994):
>
> *Dowolne zdanie języka teorii mnogości pierwszego rzędu, które zachodzi w V, zachodzi również w pewnym V_α.*
>
> *Zasada Odbicia* Gödla jest dokładnie rozszerzeniem tego twierdzenia na logiki wyższych rzędów, logiki infinitarne, itd.
>
> *Zasada Ekstensjonalizacji* stwierdza, że V spełnia ekstensjonalną postać Aksjomatu Zastępowania i jest wprowadzona dla uzasadnienia istnienia liczb kardynalnych nieosiągalnych. [...]
>
> *Zasada Jednostajności* stwierdza, że uniwersum V jest jednostajne, w tym sensie, że jego struktura jest wszędzie podobna. W sformułowaniu Gödla (Wang 1996, 8.7.5): *Te same lub podobne stany rzeczy pojawiają się stale*

[28] A więc przy rozważaniu ogólniejszych przestrzeni wartości logicznych. Rozważanie takie nie są czysto ezoteryczne: wystarczy przypomnieć sobie anegdotę Devlina dotyczącą przyporządkowania wartości logicznej zdaniom o elementach Wielkiego Łańcucha Stworzeń, przy założeniu teorii ewolucji.

[29] Zob. np. Bagaria, J. 2005. Natural Axioms of Set Theory and the Continuum Problem. W: P. Hájek, L.V. Villanueva, D. Westerståhl (red.) *Proceedings of the 12th International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science.* Kings College Publications, London.

> *na nowo (być może w bardziej skomplikowanych wersjach).* Mówi on też, że zasada ta mogłaby zostać nazwana *zasadą proporcjonalności uniwersum*, zgodnie z którą analogony własności małych liczb kardynalnych prowadzą do dużych liczb kardynalnych. Gödel twierdzi, że ta zasada umożliwia wprowadzenie liczb kardynalnych mierzalnych lub silnie zwartych, jako iż te pojęcia dotyczące dużych liczb kardynalnych otrzymywane są przez uogólnienie pewnych własności ω na liczby kardynalne nieprzeliczalne.

Kurt Gödel, choć sformułował minimalistyczny aksjomat konstruowalności (dla dowodu niesprzeczności aksjomatu wyboru i GCH z ZF) wyraźnie dawał do zrozumienia, że nowe aksjomaty teorii mnogości powinny być maksymalistyczne, podobne do aksjomatu zupełności w geometrii Hilberta:

> Z drugiej strony z aksjomatu w pewnym sensie przeciwnego do tego [tj. aksjomatu konstruowalności – JP] daje się być może wyprowadzić negację hipotezy Cantora. Mam tu na myśli aksjomat, który (podobnie jak [wprowadzony przez] Hilberta aksjomat zupełności w geometrii) stwierdzałby pewną własność maksymalności systemu wszystkich zbiorów, podczas gdy aksjomat A [konstruowalności – JP] orzeka własność minimalności. Zauważmy, że tylko własność maksymalności wydaje się harmonizować z pojęciem zbioru [...][30]

Wedle Andrzeja Mostowskiego,[31] wyróżnić można dwie zasady budowania coraz to nowych aksjomatów nieskończoności:

- Pierwsza z nich może być nazywana *zasadą przechodzenia od nieskończoności potencjalnej do aktualnej* i znajdujemy ją już w pracach Dedekinda. Tworzymy nowe zbiory, wykorzystując *aksjomat nieskończoności* oraz *aksjomat zastępowania*. Uniwersum zbiorów jest potencjalnie nieskończone, zamknięte na pewne operacje. Postulujemy istnienie *zbioru*, który sam jest domknięty na owe operacje. Posługując się tą zasadą, uzyskujemy liczby kardynalne nieosiągalne oraz pewne inne.

- Druga zasada to *zasada istnienia zbiorów osobliwych*. Przypuśćmy, że konstruując zbiory za pomocą operacji opisanych w aksjomatach teorii mnogości, które przyjęliśmy dotychczas, napotykamy stale na zbiory o pewnej własności P. Jeśli nie ma oczywistych powodów, które skłaniałyby nas do przyjęcia twierdzenia, że każdy zbiór ma własność P, to przyjmujemy nowy aksjomat, stwierdzający, że istnieją zbiory nie posiadające własności P. W ten sposób otrzymujemy np. liczby mierzalne.

[30]Gödel, K. 1964. 1964. What is Cantor's continuum problem? W: P. Benaceraff, H. Putnam (red.) *Philosophy of Mathematics. Selected Readings.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey; cytat ze strony 115 w tłumaczeniu: Murawski, R. 2002. *Współczesna filozofia matematyki.* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 103–136.

[31]Mostowski, A. 1967. O niektórych nowych wynikach meta-matematycznych dotyczących teorii mnogości. *Studia Logica* **20**, 99–116.

Nie podamy tu precyzyjnej definicji liczb mierzalnych: obiecaliśmy przecież nie epatować formalizmem matematycznym.[32] Powiedzmy jedynie, że liczby mierzalne (jeżeli istnieją) są o wiele większe od liczb nieosiągalnych: jeśli κ jest liczbą mierzalną, to poprzedza ją κ liczb nieosiągalnych. Istnienie liczb mierzalnych wiąże się z istnieniem *miary* na pewnych zbiorach. Aksjomat istnienia liczb mierzalnych implikuje zaprzeczenie aksjomatu konstruowalności.

Rozważa się całą hierarchię o wiele jeszcze większych liczb kardynalnych. Dlaczego? Po co? Słuchacze mają pełne prawo do zadania takich pytań, zwłaszcza podczas odczytu o charakterze popularnym, jak dzisiejszy. Ogólniej nawet rzecz ujmując, podatnicy mają prawo pytać, jak użytkowane są ich pieniądze.[33]

Opór, z jakim przyjmuje się kolejne aksjomaty istnienia dużych liczb kardynalnych jest coraz mniejszy. Hausdorff uważał, że liczby nieosiągalne są tak olbrzymie, że nie będzie żadnej potrzeby korzystania z nich w praktyce matematycznej. Zermelo postulował już istnienie całej pozaskończonej skali liczb nieosiągalnych. Jak zobaczymy za chwilę, liczby nieosiągalne są naprawdę Mikroskopijnymi Żyjątkami na pozaskończonej skali liczb kardynalnych.

Pewne duże liczby kardynalne są oswajane od dawna. Już sto lat temu Paul Mahlo rozważał liczby, zwane dziś jego imieniem, znacznie większe od liczb nieosiągalnych (i których istnienia w ZFC dowieść nie można, przy założeniu niesprzeczności ZFC). Liczba kardynalna κ jest liczbą *Mahlo*, gdy jest liczbą nieosiągalną oraz zbiór liczb nieosiągalnych od niej mniejszych jest stacjonarny w κ.

Oprócz korzyści o charakterze czysto matematycznym, warto zwrócić uwagę na dwie sprawy związane z aksjomatami istnienia dużych liczb kardynalnych. Po pierwsze, okazuje się, że aksjomaty te związane są z możliwością uzyskania zgodności aparatu dedukcyjnego ze stosownie dobraną semantyką w językach infinitarnych, rozszerzających FOL, a ważnych z punktu widzenia praktyki matematycznej. Zwykłe twierdzenie o zwartości w takich silnych logikach nie zachodzi. Przy założeniu istnienia odpowiednio dużych liczb kardynalnych można jednak otrzymać stosowne dla tych języków twierdzenie o zwartości oraz pełność owych logik infinitarnych, co jak wiadomo jest priorytetem logicznym. Liczby *słabo zwarte* można scharakteryzować jako spełniające *warunek podziałowy*[34] $\kappa \longrightarrow (\kappa)^2_2$. Pokazuje się, że κ jest słabo zwarta dokładnie wtedy, gdy jest nieosiągalna oraz w logice infinitarnej $L_{\kappa\kappa}$ zachodzi (stosownie sformułowane) twierdzenie o zwartości. Uogólnienia liczb słabo zwartych to tzw. liczby α-*nieopisywalne* oraz *całkowicie nieopisywalne*. Z warunkami podziałowymi związane są też np. liczby *niewysłowione* (oraz, a jakże, ich uogólnienia). Liczba kardynalna κ jest *niewysłowiona*, gdy dla każdej funkcji $f : \kappa \to \{0, 1\}$ istnieje stacjo-

[32] Nieprzeliczalna liczba kardynalna κ jest mierzalna jeśli istnieje κ-zupełny niegłówny ultrafiltr podzbiorów κ. Wiem, jestem niekonsekwentny w obietnicach. Ale w wersji mówionej *naprawdę* pominę okrutne dla wielu słuchaczy formalizmy, przyrzekam.

[33] W wersji mówionej niniejszego odczytu cała reszta tego punktu musi zostać podsumowana w paru okrągłych zdaniach. Tekst można wykorzystać w następującym po wykładzie seminarium *Ontologia teorii mnogości*.

[34] Pomijamy precyzyjną definicję, zainteresowanych wypada zaprosić na seminarium po tym wykładzie. Wszyscy pamiętają zapewne *zasadę szufladkową Dirichleta*: jeśli podzielimy zbiór nieskończony na skończenie wiele zbiorów, to co najmniej jeden z tych zbiorów jest nieskończony. Twierdzenia podziałowe dotyczą właśnie tego typu zagadnień: dzielenie „dużego” zbioru na „małą” liczbę części implikuje, że pewne z tych części są „duże”.

narny w κ zbiór jednorodny dla f. Rozważa się całą plejadę różnego rodzaju dużych liczb kardynalnych: zainteresowany czytelnik zechce sięgnąć np. do klasycznej już monografii Kanamori, A. 2003^2. *The Higher Infinite : Large Cardinals in Set Theory from Their Beginnings*. Springer.

Druga sprawa, bodaj ważniejsza, to związek aksjomatów istnienia dużych liczb kardynalnych z wynikami dotyczącymi niezależności coraz to nowych zdań od aksjomatyki teorii mnogości. Powiedzmy, w największym skrócie, parę zdań na ten ważny temat.[35] W arytmetyce PA nie można dowieść zdania $Con(PA)$, stwierdzającego niesprzeczność PA, jak już wiemy. Przy pewnych dodatkowych założeniach, w PA nie można także udowodnić zdania $\neg Con(PA)$. Kurt Gödel już w 1931 roku zauważył, że niesprzeczność arytmetyki (pierwszego rzędu) PA udowodnić można w arytmetyce drugiego rzędu PA_2. W tej ostatniej nie można dowieść zdania $Con(PA_2)$, ale można to uczynić w arytmetyce trzeciego rzędu PA_3. I tak dalej. Owe coraz mocniejsze systemy arytmetyki wiążą się z poziomami kumulatywnej hierarchii zbiorów: PA z piętrem V_ω (wszystkich zbiorów dziedzicznie skończonych), PA_2 z piętrem $V_{\omega+1}$ (tu mamy zbiór $\wp(\omega)$, a więc na tym piętrze mamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych), PA_3 z piętrem $V_{\omega+2}$ (na tym piętrze mamy m.in. zbiór wszystkich funkcji zmiennej rzeczywistej). Tak więc, pierwsze trzy nieskończone piętra hierarchii kumulatywnej zbiorów obejmują arytmetykę, analizę oraz analizę funkcjonalną.

Nie jest jednak tak, iż *jedynym* zdaniem nierozstrzygalnym w arytmetyce PA_n jest zdanie $Con(PA_n)$ (lub zdanie z nim równoważne, np. zdanie Gödla). Dla przykładu, CH nie może zostać rozstrzygnięta w podobny sposób, jak zdania $Con(PA_n)$, gdyż trzeba byłoby to zrobić na trzecim nieskończonym piętrze hierarchii. Podobnie zdanie PM: *wszystkie zbiory rzutowe są mierzalne w sensie Lebesgue'a* formułujemy na drugim piętrze nieskończonym. I tu właśnie przywołuje się na pomoc aksjomaty istnienia dużych liczb kardynalnych. Przedtem jeszcze parę słów o rodzajach niezależności zdań oraz o hierarchii interpretowalności.

Możemy jedne teorie interpretować w innych (np. analizę w teorii mnogości, jeden system geometrii w innym, itp.). Niech T_1 i T_2 będą teoriami (o rekurencyjnych zbiorach aksjomatów).[36] Powiemy, że T_1 jest *interpretowalna* w T_2 (co zapiszmy jako $T_1 \preceq T_2$), gdy istnieje *przekład* (nie ma tu potrzeby podawać precyzyjnej definicji tego terminu) τ języka teorii T_1 na język teorii T_2 taki, że dla dowolnego zdania języka teorii T_1 dowodliwego w T_1 jego przekład jest dowodliwy w T_2. Gdy relacja $\preceq$ zachodzi między T_1 i T_2 w obie strony, to mówimy, że T_1 i T_2 są *wzajemnie interpretowalne* i piszemy $T_1 \equiv T_2$, a gdy $T_1 \preceq T_2$, ale nie zachodzi $T_2 \preceq T_1$, to piszmy $T_1 \prec T_2$. Relacja $\preceq$ jest częściowym porządkiem, a więc relacja $\equiv$ jest równoważnością; jej klasy równoważności nazywamy *stopniami interpretowalności*. Ogół teorii wraz z relacją $\preceq$ tworzy *hierarchię interpretowalności*. Okazuje się, że $T_1 \preceq T_2$ dokładnie wtedy, gdy każde Π^0_1-zdanie dowodliwe w T_1 jest też dowodliwe w T_2. Zachodzą ponadto m.in. następujące fakty, dla dowolnej teorii T:

- $T \prec T \cup \{Con(T)\}$

[35] Na podstawie artykułu Petera Koellnera *Independence and Large Cardinals*, opublikowanego w Stanford Encyklopedia of Philosophy, 20 kwietnia 2010.

[36] Zakładamy dodatkowo, że wszystkie rozważane teorie zawierają ZF bez aksjomatu nieskończoności oraz że są Σ^0_1-trafne.

- $T \cup \{\neg Con(T)\} \preceq T$, a stąd $T \equiv T \cup \{\neg Con(T)\}$.

Możemy teraz w terminach interpretowalności wskazać trzy możliwości niezależności zdania ψ od teorii T:

1. SKOK POJEDYNCZY. Tylko jedno ze zdań ψ, $\neg\psi$ prowadzi do skoku (w relacji $\prec$):

   $T \prec T \cup \{\psi\}$ oraz $T \equiv T \cup \{\neg\psi\}$

   (lub podobnie, zamieniając ψ na $\neg\psi$).

2. BRAK SKOKU. Ani ψ, ani $\neg\psi$ nie prowadzą do skoku:

   $T \equiv T \cup \{\psi\}$ oraz $T \equiv T \cup \{\neg\psi\}$.

3. SKOK PODWÓJNY. Zarówno ψ, jak i $\neg\psi$ prowadzą do skoku:

   $T \prec T \cup \{\psi\}$ oraz $T \prec T + \cup\{\neg\psi\}$.

Pierwsza możliwość to przypadek zdania $Con(T)$ (jest to Π^0_1-zdanie), a także zdania PM oraz zdania Parisa-Harringtona. Najprostsze zdanie z możliwości drugiej (*zdania Oreya*) musi mieć złożoność Δ^0_2; pod tę możliwość podpada CH. Nie ma „naturalnych" przykładów dla trzeciej możliwości, ale można skonstruować pewne przykłady „sztuczne."

Struktura porządkowa stopni interpretowalności jest dość skomplikowana. Między każdymi dwiema teoriami istnieje teoria $\prec$-pośrednia. Hierarchia interpretowalności nie jest ufundowana. Co interesujące z metodologicznego punktu widzenia to to, że teorie „naturalne", wykorzystywane w praktyce matematycznej są jednak dobrze uporządkowane przez relację interpretowalności (jest to zatem „fakt empiryczny"). U podstaw tego fragmentu hierarchii leży teoria ZF bez aksjomatu nieskończoności.

Dodawanie zdań o postaci $Con(T)$ może prowadzić od teorii „naturalnych" do „nienaturalnych", nie daje też zbyt wielkich „skoków". Otrzymujemy je dopiero rozważając aksjomaty dużych liczb kardynalnych.

Niech Z_0 będzie teorią ZFC bez aksjomatów: nieskończoności oraz zastępowania. Standardowym modelem dla Z_0 jest V_ω. Istnienie tego zbioru wynika z aksjomatu nieskończoności. Niech Z_1 oznacza Z_0 wraz z aksjomatem nieskończoności. Wtedy w Z_1 możemy udowodnić, że:

- Z_0 jest niesprzeczna.
- Istnieje model standardowy dla Z_0.

Modelem standardowym dla Z_1 jest z kolei $V_{\omega+\omega}$. Istnienie tego zbioru gwarantowane jest przez aksjomat zastępowania. Niech Z_2 oznacza Z_1 wraz z aksjomatem zastępowania. Wtedy w Z_2 możemy udowodnić, że:

- Z_1 jest niesprzeczna.
- Istnieje model standardowy dla Z_1.

Standardowym modelem dla Z_2 jest V_κ, gdzie κ jest liczbą (mocno) nieosiągalną. Następnym w hierarchii będzie zatem aksjomat stwierdzający istnienie liczby nieosiągalnej. Następna teoria, czyli ZFC wraz z tym aksjomatem dowodzi istnienia poziomu hierarchii kumulatywnej, który jest modelem dla ZFC. Domyślamy się, że postępując dalej w ten sposób otrzymujemy coraz mocniejsze aksjomaty nieskończoności, stwierdzające istnienie coraz wyższych poziomów (pięter) w uniwersum zbiorów.

Na mocy wspomnianych wyników Gödla i Cohena wiemy, że zarówno ZFC wraz z CH, jak i ZFC wraz z negacją CH są wzajemnie interpretowalne z ZFC, a więc te trzy teorie należą do tego samego stopnia interpretowalności. Z kolei, Gödel pokazał, że negacja zdania PM zachodzi w L (czyli w L prawdziwe jest zdanie orzekające, że istnieje zbiór rzutowy, który nie jest mierzalny w sensie Lebesgue'a). Tak więc, ZFC wraz z negacją PM jest wzajemnie interpretowalna z ZFC. Co możemy powiedzieć o samym zdaniu PM? Czy metodą wymuszania można zbudować model ZFC, w którym prawdziwe jest zdanie PM? Okazuje się, że ZFC wraz z PM implikuje niesprzeczność ZFC (Shelah), a więc na mocy twierdzenia o niedowodliwości niesprzeczności, ZFC wraz z PM nie jest interpretowalna w ZFC. Nawet jeśli zatem założymy niesprzeczność ZFC, to (inaczej niż w przypadku CH) nie możemy udowodnić, że PM jest zdaniem niezależnym od ZFC. Dla ustanowienia niezależności PM od ZFC potrzebujemy niesprzeczności teorii silniejszej, a mianowicie ZFC wraz ze zdaniem stwierdzającym istnienie liczby kardynalnej (mocno) nieosiągalnej. PM jest zatem podobne do $Con(ZFC)$: tylko jedno ze zdań PM i $\neg PM$ prowadzi do skoku, a ponadto skok jest o wiele większy (i reprezentowany przez teorię „naturalną").

Rozważane w teorii mnogości zdania niezależne ψ dotąd znane są podobne albo do CH, albo do PM:

- albo zarówno $ZFC \cup \{\psi\}$, jak i $ZFC \cup \{\neg\psi\}$ mają ten sam stopień interpretowalności jak ZFC, albo
- tylko jedna z $ZFC \cup \{\psi\}$ i $ZFC \cup \{\neg\psi\}$ ma ten sam stopień interpretowalności jak ZFC, a druga ma stopień interpretowalności rozszerzenia ZFC o aksjomat istnienia dużych liczb kardynalnych.

Następne, po (mocno) nieosiągalnych duże liczby kardynalne to: liczby Mahlo, liczby nieopisywalne (*indescribable*) oraz liczby niewysłowione (*ineffable*). Wszystkie one otrzymywane są poprzez różne zasady odbicia, nie osiągają jednak tzw. liczby kardynalnej Erdősa $\kappa(\omega)$. Jakkolwiek śmiesznie by to nie brzmiało, nazywane są one (do $\kappa(\omega)$ włącznie) *małymi* dużymi liczbami kardynalnymi. Duża liczba kardynalna, której aksjomatem istnienia jest ψ jest *mała*, gdy ψ może zachodzić w uniwersum zbiorów konstruowalnych, czyli gdy niesprzeczność „$V \models \kappa$ jest ψ-liczbą kardynalną" implikuje niesprzeczność „$L \models \kappa$ jest ψ-liczbą kardynalną". W przeciwnym przypadku mówimy, że duża liczba kardynalna jest *duża*. Nie możemy pozwolić sobie w tym odczycie na podawanie komentarzy dotyczących własności wymienionych rodzajów liczb: wymagałoby to całej serii wykładów.

Może warto wspomnieć, że istnieje pewien wzorzec formułowania aksjomatów dla *dużych* dużych liczb kardynalnych. Aksjomaty takie stwierdzają mianowicie, że istnieje klasa przechodnia M oraz nietrywialne włożenie elementarne $j : V \to M$. Skoro

j ma być nietrywialne (czyli różne od funkcji identycznościowej), to musi istnieć najmniejsza liczba kardynalna, której obraz względem j jest od niej różny (która zostaje „poruszona” przez j). Nazywamy ją *punktem krytycznym* odwzorowania j i oznaczamy przez crit(j). Dla przykładu, liczba kardynalna jest mierzalna dokładnie wtedy, gdy jest punktem krytycznym takiego włożenia elementarnego.

Jeśli $\kappa = \text{crit}(j)$, to $V_{\kappa+1} \subseteq M$. Pozwala to na dowodzenie, że κ musi być większa od *małych* dużych liczb kardynalnych (nieosiągalnych, Mahlo, nieopisywalnych, niewysłowionych, itp.). Z kolei, w przeciwieństwie do *małych* dużych liczb kardynalnych, liczby mierzalne nie mogą istnieć w uniwersum zbiorów konstruowalnych. Chociaż L zawiera wszystkie liczby porządkowe, to klasa L jest zbyt „cienka”, aby zawierać ultrafiltr miary na liczbie mierzalnej.

Wzorzec tworzenia aksjomatów istnienia dużych liczb kardynalnych wspomniany wyżej może zostać wzmocniony poprzez wymaganie większej zgodności między V oraz M. Dla przykładu, jeśli zażądamy aby $V_{\kappa+2} \subseteq M$, gdzie κ jest mierzalna, to można pokazać, że muszą istnieć liczby mierzalne poniżej κ. Ogólniej, jeśli κ jest liczbą kardynalną, a $\eta > \kappa$ jest liczbą porządkową, to mówimy, że κ jest η-*mocna*, gdy istnieje klasa przechodnia M oraz nietrywialne włożenie elementarne $j : V \to M$ takie, że crit$(j) = \kappa$, $j(\kappa) > \eta$ oraz $V_\eta \subseteq M$. Liczba kardynalna κ jest *mocna*, gdy jest η-mocna dla wszystkich $\eta > \kappa$. Dalej, możemy również żądać, aby włożenie zachowywało pewne klasy. Jeśli A jest klasą, κ liczbą kardynalną, a $\eta > \kappa$ liczbą porządkową, to mówimy, że liczba κ jest η-A-*mocna*, gdy istnieje włożenie elementarne $j : V \to M$ poświadczające, że κ jest η-mocna i które ma dodatkową własność: $j(A \cap V_\kappa) \cap V_\eta = V \cap V_\eta$. Liczba kardynalna κ jest *liczbą Woodina*, gdy κ jest mocno nieosiągalna oraz dla wszystkich $A \subseteq V_\kappa$ istnieje liczba kardynalna $\kappa_A < \kappa$ taka, że κ_A jest η-A-mocna dla każdej η takiej, iż $\kappa_A < \eta < \kappa$.

Mocniejsze aksjomaty istnienia dużych liczb kardynalnych otrzymujemy wiążąc włożenie j ze stopniem podobieństwa między M i V. Dla przykładu, liczbę kardynalną κ nazywamy *supermocną*, gdy istnieje klasa przechodnia M oraz nietrywialne włożenie elementarne $j : V \to M$ takie, że crit$(j) = \kappa$ oraz $V_{j(\kappa)} \subseteq M$. Jeśli κ jest supermocna, to jest ona liczbą Woodina oraz istnieją dowolnie duże liczby Woodina poniżej κ.

Możemy również nakładać pewne warunki domknięcia na model M. Jeśli $\gamma \geqslant \kappa$, to mówimy, że κ jest γ-*super-zwarta*, gdy istnieje klasa przechodnia M oraz nietrywialne włożenie elementarne $j : V \to M$ takie, że $\kappa = \text{crit}(j)$ oraz ${}^\gamma M \subseteq M$, czyli M jest domknięta na γ-ciągi (wtedy $V_{\gamma+1} \subseteq M$, czyli ten warunek zawiera w sobie poprzednie podejście). Liczba kardynalna κ jest *super-zwarta*, jeśli jest γ-super-zwarta dla wszystkich $\gamma \geqslant \kappa$. Dalej, liczba kardynalna κ jest n-*olbrzymia*, gdy istnieje klasa przechodnia M oraz nietrywialne włożenie elementarne $j : V \to M$ takie, że ${}^{j^n(\kappa)}M \subseteq M$, gdzie crit$(j) = \kappa$, a $j^{i+1}(\kappa)$ definiujemy jako $j(j^i(\kappa))$.

Jak dalece można się posunąć w żądaniach zgodności między V a M? Reinhardt rozważał nietrywialne włożenia o postaci $j : V \to V$, ale ich istnienie okazało się sprzeczne (w ZFC), jak udowodnił Kunen. Przy założeniu ZFC Kunen pokazał też, jakie są górne ograniczenia na rozważaną klasę M. Woodin odkrył jeszcze dalsze, silniejsze od dotąd wymienianych, aksjomaty istnienia dużych liczb kardynalnych.

Jest *faktem empirycznym*, że rozważane w literaturze aksjomaty istnienia dużych liczb kardynalnych są w sposób naturalny *dobrze uporządkowane*, jeśli chodzi o moce powoływanych do istnienia zbiorów. Zapewnia to *naturalny* sposób poruszania się coraz wyżej w hierarchii interpretowalności, poczynając od teorii Z_0.

Jest także *faktem empirycznym*, że dla dowolnego „naturalnego" zdania ψ języka teorii mnogości znajdujemy aksjomat Ψ istnienia dużych liczb kardynalnych taki, że $ZFC \cup \{\psi\}$ oraz $ZFC \cup \{\Psi\}$ są wzajemnie interpretowalne. Dla przykładu, ZFC wraz z negacją PM jest wzajemnie interpretowalna z ZFC wraz z aksjomatem istnienia liczb nieosiągalnych. W ogólności, wykorzystuje się łącznie techniki: modeli wewnętrznych oraz wymuszania dla pokazywania wzajemnej interpretowalności teorii, a aksjomaty istnienia dużych liczb kardynalnych pełnią przy tym rolę pośredniczącą:

- Aby wykazać, że $ZFC \cup \{\Psi\}$ interpretuje $ZFC \cup \{\psi\}$ zaczyna się od modelu dla teorii $ZFC \cup \{\Psi\}$ i buduje się, za pomocą metody wymuszania, model dla $ZFC \cup \{\psi\}$. Duża liczba kardynalna określona warunkiem Ψ ulega „kolapsowi", który zaprojektowany jest tak, aby zachodziło zdanie ψ.
- W drugą stronę, zaczynamy od modelu dla $ZFC \cup \{\psi\}$ i budujemy model wewnętrzny (przypominający L, ale zdolny do przyswojenia aksjomatu istnienia dużej liczby kardynalnej), który zawiera dużą liczbę kardynalną, istnienie której stwierdza Ψ.

Ponadto, możemy też porównywać (za pośrednictwem aksjomatów istnienia dużych liczb kardynalnych) np. teorie o postaci $ZFC \cup \{\varphi\}$ i $ZFC \cup \{\psi\}$. Znajdujemy aksjomaty istnienia dużych liczb kardynalnych Φ i Ψ takie, że wzajemnie interpretowalne są:

- $ZFC \cup \{\varphi\}$ i $ZFC \cup \{\Phi\}$,
- $ZFC \cup \{\psi\}$ i $ZFC \cup \{\Psi\}$.

Porównanie między $ZFC \cup \{\varphi\}$ i $ZFC \cup \{\psi\}$ otrzymujemy wtedy poprzez naturalną zależność pomiędzy $ZFC \cup \{\Phi\}$ i $ZFC \cup \{\Psi\}$. Widać zatem, że porównywanie teorii (nawet dotyczących różnych dziedzin) w terminach interpretowalności może zostać oparte na: metodzie modeli wewnętrznych, metodzie wymuszania oraz wspomnianym wyżej zastosowaniu aksjomatów istnienia dużych liczb kardynalnych.

Rozważanie dużych liczb kardynalnych okazało się konieczne w związku z badaniami definiowalnych podzbiorów prostej rzeczywistej. Można też powiedzieć, że rozważanie aksjomatów dużych liczb kardynalnych nie jest czczą rozrywką z tego m.in. powodu, że chcemy przecież opisać uniwersum *pozaskończone*: dlaczego mielibyśmy zatrzymywać się na jakimś etapie tego opisu, jeśli z logicznego punktu widzenia etap ten nie jest ostatnim możliwym? Dla Georga Cantora *absolutna nieskończoność*, cała pozaskończona hierarchia liczb kardynalnych była Bogiem. To bodaj któryś ze świętych Grzegorzy miał się wyrazić, iż podążając ku Bogu stale pozostajemy *pod* nim.[37]

[37]Nie wiem, który: 1) św. Grzegorz Cudotwórca (ok. 213–273) – Ojciec Kościoła; 2) św. Grzegorz Oświeciciel (ok. 257–ok. 326) – założyciel Kościoła Ormiańskiego; 3) św. Grzegorz z Nazjanzu (ok. 330–390) – Ojciec Kościoła; 4) św. Grzegorz z Nyssy (ok.335–po 394) – biskup, Ojciec Kościoła; 5) św. Grzegorz z Tours (538 lub 539–594) – biskup Tours; 6) św. Grzegorz I (ok. 540–604) – papież; 7) św. Grzegorz II (zm. 731) – papież; 8) św. Grzegorz III (zm. 741) – papież; 9) św. Grzegorz VII (ok. 1020–1085) – papież; 10) św. Grzegorz Grassi (1833–1900) – włoski franciszkanin, misjonarz, biskup, męczennik; 11) św. Grzegorz Palamas (1296–1359) – teolog, arcybiskup Tesalonik.

Czy może się zdarzyć, że nowe aksjomaty będą się nawzajem wykluczać? Albo, czy może być tak, że (atrakcyjny z pewnych względów matematycznych) nowy aksjomat może być w sprzeczności z którymś z aksjomatów ZFC? Ta druga sytuacja ma miejsce np. w przypadku *aksjomatu determinacji*: jest on mianowicie sprzeczny z aksjomatem wyboru. Aksjomat determinacji można interpretować w terminach teorii gier (dwuosobowych). Gracze wybierają kolejno liczby naturalne. Gra (o zbiór A) jest zatem nieskończonym ciągiem takich liczb. Jeśli ciąg ten należy do A, wygrywa gracz I, w przeciwnym przypadku wygrywa gracz II. Zbiór A jest *zdeterminowany*, jeśli co najmniej jeden gracz ma strategię wygrywającą w grze o zbiór A.

Dla dowolnej rodziny $\mathcal{C}$ zbiorów funkcji z ω w ω niech $AD[\mathcal{C}]$ będzie zdaniem: „$\forall A \in \mathcal{C}$ A jest zdeterminowany". W szczególności, gdy $\mathcal{C}$ jest całym zbiorem potęgowym zbioru wszystkich funkcji z ω w ω, to zamiast $AD[\mathcal{C}]$ piszemy AD. Zdanie AD nazywamy *aksjomatem determinacji*. Zachodzą następujące fakty:

- Na gruncie ZF, aksjomat determinacji AD implikuje zaprzeczenie aksjomatu wyboru AC.
- W $ZF \cup \{AD\}$ można udowodnić $Con(ZFC)$ (czyli zdanie głoszące, że ZF jest niesprzeczna).
- Jeśli ZF jest niesprzeczna, to w ZF nie można sformalizować dowodu, że: „Jeśli ZF jest niesprzeczna, to $ZF \cup \{AD\}$ jest niesprzeczna."
- W ZFC można udowodnić, że wszystkie zbiory Borelowskie są zdeterminowane.
- Jeśli istnieje liczba mierzalna, to zdeterminowane są wszystkie zbiory klasy Π^1_1 w hierarchii zbiorów rzutowych.

Wśród konsekwencji AD mamy następujące zdania:

- Każdy podzbiór liczb rzeczywistych ma własność Baire'a.
- Każdy podzbiór liczb rzeczywistych jest mierzalny w sensie miary Lebesgue'a.
- Każdy nieprzeliczalny podzbiór liczb rzeczywistych zawiera podzbiór doskonały.
- $\aleph_1$ oraz $\aleph_2$ są liczbami mierzalnymi.
- Dla każdego zbioru $x \subseteq \omega$ liczba $\aleph_1$ jest liczbą nieosiągalną w $L[x]$ (hierarchii zbiorów konstruowalnych ze zbioru x).

Aksjomat determinacji jest atrakcyjny np. z punktu widzenia teorii miary. Implikuje on, że każdy podzbiór odcinka jednostkowego $[0, 1]$ zbioru liczb rzeczywistych jest mierzalny w sensie Lebesgue'a. Słuchacze być może wiedzą, że (nieefektywny!) aksjomat wyboru ma pewne „paradoksalne" (dla intuicji potocznych, zdroworozsądkowych, związanych z percepcją obiektów spotykanych w doświadczeniu codziennym), konsekwencje np. twierdzenie Banacha-Tarskiego o paradoksalnym rozkładzie kuli.[38]

[38]Jak głosi dość znana anegdota, jeśli masz chleb, rybę oraz licznie zgromadzoną publiczność i umiejętnie skorzystasz z twierdzenia Banacha-Tarskiego, to konsekwencje tego mogą trwać tysiąclecia.

Jest takich konsekwencji wiele; osobnym problemem jest to, dlaczego niby nasza intuicja dotycząca abstrakcyjnych obiektów matematycznych miałaby być prostym przedłużeniem naszej intuicji potocznej, zdroworozsądkowej.

Nowe aksjomaty formułowane być mogą też w terminach *twierdzeń podziałowych.* Własności podziałowe zbiorów istotnie zależą od ich mocy: inne twierdzenia otrzymujemy dla zbiorów skończonych, inne dla przeliczalnych, a jeszcze inne dla nieprzeliczalnych. Przypomnijmy dwa wyniki klasyczne w sformułowaniu odnoszącym się do kolorowania[39] liczb i zbiorów:

- TWIERDZENIE RAMSEYA. *Jeśli pokolorujemy wszystkie pary nieuporządkowane liczb naturalnych używając dwóch kolorów, to istnieje nieskończony zbiór liczb naturalnych, taki że wszystkie pary z tego zbioru mają ten sam kolor.*

- TWIERDZENIE ERDŐSA-RADO. *Jeśli A ma moc niemniejszą niż $(2^\kappa)^+$ oraz wszystkie dwuelementowe podzbiory zbioru A pokolorujemy używając dwóch kolorów, to istnieje zbiór $B \subseteq A$ o mocy κ^+ taki, że wszystkie pary elementów zbioru B są tego samego koloru.*

Z twierdzenia Ramseya wynika np., że jeśli X jest nieskończonym zbiorem liczb naturalnych, to X zawiera taki nieskończony podzbiór Y, że albo każde dwie liczby należące do Y są względnie pierwsze, albo żadne dwie liczby należące do Y nie są względnie pierwsze.

Dodajmy, że nierozstrzygalne na gruncie arytmetyki PA zdanie Parisa-Harringtona odwołuje się do twierdzeń podziałowych. UOGÓLNIONE SKOŃCZONE TWIERDZENIE RAMSEYA głosi, że:

- *Dla dowolnych liczb dodatnich n, k, m istnieje liczba N taka, że jeśli pokolorujemy każdy z n-elementowych podzbiorów zbioru $S = \{1, 2, 3, \dots, N\}$ na jeden z k kolorów, to istnieje zbiór $Y \subseteq S$ o co najmniej m elementach taki, iż:*

  1. *wszystkie n-elementowe podzbiory zbioru Y są pokolorowane tak samo,*
  2. *liczba elementów zbioru Y jest niemniejsza od najmniejszej liczby w zbiorze Y.*

Paris i Harrington pokazali, że powyższe twierdzenie nie jest dowodliwe w PA, ponieważ implikuje (w PA) zdanie stwierdzające niesprzeczność PA. Najmniejsza liczba N, o której mowa w uogólnionym skończonym twierdzeniu Ramseya jest wyznaczona przez funkcję rekurencyjną (argumentów n, k, m). Funkcja ta „rośnie o wiele szybciej" niż funkcja Ackermanna, a więc oczywiście nie jest pierwotnie rekurencyjna. W PA nie można udowodnić, że jest to funkcja całkowita.

Rozważanie dużych liczb kardynalnych okazało się konieczne w związku z badaniami definiowalnych podzbiorów prostej rzeczywistej. Oto kilka, całkiem *ad hoc* dobranych przykładów[40]:

[39]Ernst Zermelo byłby może zniesmaczony; ale dlaczego liczby i zbiory muszą być zawsze bezbarwne? Korzystajmy z ostatnich dni kolorowej wiosny! Zaraz opadną wszystkie liście, dni będą tak krótkie, że nos Jamnika węszył będzie świt, a ogon machał już w mroku wieczoru. Czy jest to *Jamnik Niesprzeczny*?

[40]Za: Woodin, W.H. 1988. Supercompact cardinals, sets of reals, and weakly homogeneous trees. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **85**, 6587–6591.

- Jeśli istnieje liczba mierzalna, to każdy Σ^1_2-zbiór liczb rzeczywistych jest mierzalny w sensie Lebesgue'a oraz ma własność Baire'a (Solovay).
- Jeśli istnieje liczba mierzalna, to każdy Π^1_1-zbiór liczb rzeczywistych jest zdeterminowany (Martin).
- Jeśli istnieje liczba super-zwarta, to $L(\mathbb{R})$, czyli najmniejszy model wewnętrzny teorii mnogości zawierający liczby porządkowe i liczby rzeczywiste jest mierzalny w sensie Lebesgue'a oraz ma własność Baire'a (Shelah, Woodin).
- Jeśli istnieje liczba super-zwarta, to każdy zbiór liczb rzeczywistych należący do $L(\mathbb{R})$ jest rzutem drzewa słabo jednorodnego (Woodin).
- Jak wiadomo z pracy Gödla, jeśli założymy aksjomat konstruowalności, to istnieje Δ^1_2 podzbiór prostej, który nie jest mierzalny w sensie Lebesgue'a i który nie ma własności Baire'a, oraz istnieje nieprzeliczalny zbiór klasy Π^1_1, który nie zawiera żadnego podzbioru doskonałego.
- Z kolei, jeśli założymy aksjomat determinacji rzutowej PD, to wszystkie zbiory rzutowe mają własność Baire'a i są mierzalne w sensie Lebesgue'a oraz każdy nieprzeliczalny zbiór rzutowy zawiera podzbiór doskonały. Aksjomat PD głosi, że zdeterminowany jest każdy rzutowy podzbiór zbioru ω^ω.

Widzimy zatem, że nowe aksjomaty w teorii mnogości pozwalają powiedzieć coś o tak podstawowych dla matematyki obiektach, jak np.: zbiór wszystkich liczb rzeczywistych (a więc także zbiór potęgowy zbioru wszystkich liczb naturalnych) oraz szczególnie ważne w rozważaniach matematycznych rodziny zbiorów liczb rzeczywistych.

Teoria mnogości ma już za sobą swoją MŁODOŚĆ (naiwna teoria mnogości oraz aksjomatyczne ujęcia tej teorii). Przeszła już również przez swój wiek DOJRZAŁOŚCI (badanie modeli teorii mnogości, badania w deskryptywnej teorii mnogości). Czy wchodzi ona zatem w okres STAROŚCI? Czy zostanie zastąpiona inną teorią pretendującą do miana podstaw całej matematyki? Może sama matematyka zrezygnuje z pożądania posiadania *jednej* tylko teorii jako swojej podstawy? A może teoria mnogości przeżyje swoją DRUGĄ MŁODOŚĆ, wzmocniona nowymi aksjomatami? Oczywiście na żadne z tych pytań nie odpowiemy, zarówno z powodu ich pewnej nieprecyzyjności jak i z powodu naszej własnej niekompetencji. W każdym okresie rozwoju teorii mnogości były formułowane różne przewidywania dotyczące dalszych losów tej teorii. Ograniczmy się tu tylko do przywołania jednej z takich opinii, z zakończenia artykułu Mostowski, A. 1967. O niektórych nowych wynikach meta-matematycznych dotyczących teorii mnogości. *Studia Logica* **20**, 99–11 (cytat ze stron 110–111):

> Istotnym wynikiem, do którego doprowadzają rozważania na temat pojęcia zbioru jest to, że pojęcie to nie jest należycie sprecyzowane i że istnieją różne sposoby uściślania go. Tak np. dzięki Gödlowi rozumiemy dobrze pojęcie zbioru definiowalnego predykatywnie (konstruowalnego), a także pojęcie zbioru definiowalnego za pomocą liczb porządkowych. Modele skonstruowane przez Cohena sugerują możliwość jeszcze innych

pojęć, w których znajdą swój wyraz niektóre koncepcje intuicjonistów, a zapewne w przyszłości znajdą się inne jeszcze pojęcia. Być może będziemy operowali w przyszłości różnymi pojęciami zbiorów, podobnie jak dziś operujemy różnymi rodzajami przestrzeni. Przypuszczać należy, że te różne teorie zbiorów będą miały wspólną część, która wystarczy do uzasadnienia podstawowych faktów teorii mnogości potrzebnych do dowodów niezbędnych dla ugruntowania podstawowych pojęć matematycznych. Jak ta wspólna część różnych teorii mnogości ustosunkuje się do zagadnienia wysokich mocy trudno teraz przewidzieć.

O ile naszkicowana wyżej sytuacja powstanie, to teoria mnogości nie będzie oczywiście mogła pretendować do zajmowania centralnego miejsca w matematyce w tym sensie, że każda teoria będzie sprowadzalna do teorii mnogości.

Nie jest wykluczone, że sam Cantor uświadamiał sobie, że pojęcie zbioru nie jest dostatecznie ostro sprecyzowane. Jego osobliwą uwagę, którą zacytowaliśmy na początku artykułu, można interpretować w ten właśnie sposób[41]. Mimo że pogląd Dedekinda wydaje się na pierwszy rzut oka jaśniejszy i bardziej przekonywający, to jednak stwierdzić musimy, że dość dziwny i niejasny pogląd Cantora odpowiada być może lepiej obecnej sytuacji w teorii mnogości.

Dodajmy też na marginesie, że spośród współtwórców współczesnej teorii mnogości ani Skolem, ani von Neumann od samego początku nie uważali jej za poważną kandydatkę na podstawy całej matematyki.

6 Koniec. Skromne konkluzje

Zakładam, że słuchacze zetknęli się już z różnymi *relatywizmami*: językowym, etycznym, itd. W Instytucie Filozofii Uniwersytetu Opolskiego, którego gośćmi dzisiaj jesteśmy, omawiano zapewne ze studentami słynną rozprawę Hilarego Putnama *Modele i rzeczywistość*. O wielkich twierdzeniach metalogicznych (Gödla, Tarskiego, Löwenheima-Skolema) każdy wykształcony obywatel również coś słyszał. Czy omówione wyżej w wielkim skrócie twierdzenia dotyczące podstaw matematyki prowadzą do jakichś *relatywistycznych* konkluzji natury filozoficznej? Jeśli tak, to jakich: ontologicznych czy epistemologicznych?

[41]Mostowski cytował (w swoim tłumaczeniu) z: Becker, O. 1954. *Grundlagen der Mathematik in Geschichtlicher Entwicklung*. Freiburg – München, s. 316. Jest to znana anegdota, zawsze warta przypomnienia: „Dedekind wyraził się odnośnie pojęcia zbioru jak następuje: wyobraża on sobie zbiór jak zamknięty worek, który zawiera zupełnie określone przedmioty; przedmiotów tych jednak nie widzimy i nie wiemy o nich nic, poza tym, że istnieją i są określone. W pewien czas później Cantor sformułował swój pogląd na zbiory: uniósł on swą ogromną figurę, podniesionym ramieniem zatoczył wielki łuk i kierując swój wzrok w nieokreślony punkt powiedział: *ja wyobrażam sobie zbiór, jako przepaść*".

6.1 Trochę filozofii

Istnienie modeli zamierzonych to problem ontologiczny, a ich charakterystyka (możliwość dotarcia do nich środkami językowymi) to problem epistemologiczny. Zajmowaliśmy się tu podstawami matematyki, a więc odpowiedzi na pytania o modele zamierzone teorii poszukujemy na gruncie samej matematyki, uzupełniając je ewentualnie o rozważania wzięte z filozofii matematyki. Gdy mówimy o modelach zamierzonych teorii empirycznych, to wkraczamy na grunt ogólnej metodologii nauk, gdzie terminy: *teoria* i *model* mogą być (i są) rozumiane na różne sposoby, nie tylko tak, jak w klasycznej (matematycznej) teorii modeli. Wiedzą o tym doskonale ci ze słuchaczy, studentów filozofii Uniwersytetu Opolskiego, którzy nie polegli na egzaminie z metodologii nauk u Profesora Adama Groblera.[42] Z tego ogólnikowego wstępu widać już chyba, że zamierzam uchylić się od rozważania kwestii metodologicznych dotyczących nauk empirycznych. Istotnie, ograniczę się jedynie do dwóch komentarzy:

- *ontologicznego*, podsumowując niektóre tezy z monografii: Bedürftig, T., Murawski, R. 2001. *Zählen. Grundlage der elementaren Arithmetik.* Verlag Franzbecker, Hildesheim Berlin;[43]
- *epistemologicznego*, odwołując się do monografii: Woleński, J. 1993. *Metamatematyka a epistemologia*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa oraz Woleński, J. 2005. *Epistemologia*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Książka Thomasa Bedürftiga i Romana Murawskiego dotyczy systemów liczenia. Poniżej podajemy jedynie wybrane uwagi dotyczące *ontologicznych* aspektów arytmetyki:

- Autorzy sytuują swoje poglądy jako bliskie Dedekindowi oraz Damerowowi, a całkiem odległe od pozytywizmu Milla.
- W procesie liczenia wyrażana jest możliwość następowania w szeregu (*Vermögen der Reihenfolge*). Liczenie (w standardowych systemach liczenia o postaci (N, ν, a), gdzie $\nu : N \to N$, $a \in N$ oraz $\langle a \rangle_\nu = N$) jest zewnętrzną, kolektywną (intersubiektywną) reprezentacją pojęcia następowania elementów w szeregu.
- Liczby są dla autorów, podobnie jak dla Cantora i Dedekinda, „tworami umysłowymi" (*geistige Schöpfungen*), tworzą byty immanentne (*immanente Realitäten*), powstające w psychologicznych konstrukcjach schematów liczenia.

---

[42] Pojęcia te omawiane są w monografii: Grobler, A. 2006. *Metodologia nauk.* Wydawnictwo Aureus, Wydawnictwo Znak, Kraków; zob. zwłaszcza strony 175–207. Polecenia godnych jest rzecz jasna wiele monografii, w których mowa o *modelach zamierzonych teorii*, nie sposób ich tu wyliczać. Matematyczną teorię modeli dla charakterystyki inkryminowanego pojęcia wykorzystano np. w: Przełęcki, M. 1988. *Logika teorii empirycznych.* PWN, Warszawa (jest to przekład monografii, która ukazała się już w 1969 roku); zob. np. strona 119. Do innych polskich monografii zajmujących się tą problematyką, które darzę sentymentem zaliczam: Wójcicki, R. 1974. *Metodologia formalna nauk empirycznych.* Ossolineum oraz Nowaczyk, A. 1990. *Wprowadzenie do logiki nauk ścisłych.* PWN, Warszawa.

[43] Wykorzystuję tu swoje notatki do artykułu „Naukowe *curriculum vitae* Romana Murawskiego" (współautorka: I. Bondecka-Krzykowska), umieszczonego w wydanej niedawno książce: I. Bondecka-Krzykowska, J. Pogonowski (red.) *Światy matematyki. Tworzenie czy odkrywanie? Księga Pamiątkowa ofiarowana Profesorowi Romanowi Murawskiemu.* Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2010.

- Choć *w zasadzie* wewnętrzna konstrukcja schematów liczenia jest wolna od abstrahowania z rzeczywistości oraz jakichkolwiek zastosowań, to *w faktycznym rozwoju psychologicznym* (podmiotu poznającego) znajduje się ona od samego początku, poprzez działanie, w ciągłym kontakcie z rzeczywistością zewnętrzną (dla tego podmiotu). Jest więc ona przede wszystkim narzędziem podmiotu w ujęciu i opanowaniu świata zewnętrznego oraz w kierowaniu działaniami.

- Wewnętrzna konstrukcja liczb natrafia w powyższym procesie rozwoju na abstrakcje, które przydają liczbom treści związanych z wyliczaniem wielkości, porządkowaniem elementów oraz z operacjami arytmetycznymi. Tworzone wewnętrznie (przez podmiot) liczby uzyskują w ten sposób zewnętrzne reprezentacje znakowe. Z kolei, reprezentacje te umożliwiają odniesienie procesu liczenia do samych liczb: *Durch interne und externe Zeichen kann das Zählen sich auf sich beziehen: Es ist in der Lage, Zahlen zu zählen.* (S. 265). Współdziałanie takie uważają autorzy za konieczne dla rozwoju arytmetyki.

- Wyraźna i zdecydowana jest deklaracja autorów w kwestii, którą określają jako meta-metafizyczną, a mianowicie pytania o to, czy myśleniu o liczbach odpowiada jakieś obiektywne upostaciowanie świata zewnętrznego. Uważają oni mianowicie, że takie pytania należy raczej *pozostawiać bez odpowiedzi*. Podobnie rzecz ma się np. z pytaniem o istnienie liczb jako bytów obiektywnych, niezależnych od myślenia o nich, albo i nawet na owo myślenie wpływających. Autorzy wyjawiają jednak jednocześnie swoje inklinacje kantowsko-platońskie: liczby akceptują jako formy jednocześnie wewnętrzne i zewnętrzne, których współdziałanie zarówno dostarcza impulsu dla wypracowania liczb na płaszczyźnie psychologicznej, jak i ma wpływ na interpretację rzeczywistości zewnętrznej.

- Liczb nie uważają autorzy ani za po prostu zwykłe znaki, ani też za odpowiadające im abstrakcje. Wewnętrzne schematy liczenia oraz zewnętrzne reprezentacje znakowe są nierozerwalnie ze sobą powiązane.

- Wreszcie, liczby nie są jedynie abstrakcjami, które powstają na tle „aktywności arytmetycznych." Bez struktur związanych z procesami liczenia abstrakcje takie pozostają bowiem tylko własnościami.

- Stanowisko autorów opiera się zarówno na wybranych, danych historycznie poglądach (istotnie rozwijając, w szczególności, stanowisko Damerowa), jak też ich własnych wynikach, przedstawionych w tekście.

* * *

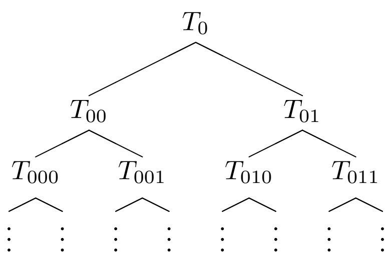
W obu wymienionych wyżej monografiach Jana Woleńskiego pojęciu *modelu zamierzonego* poświęca się wiele uwagi, zarówno przy okazji krytyki niektórych propozycji metodologicznych innych autorów, jak i przy wykorzystaniu wyników metamatematycznych dla charakterystyki tego pojęcia oraz innych ważnych dla epistemologii pojęć, przede wszystkim *przedmiotu poznania*. Wybierzmy z tego wachlarza tematów trzy zagadnienia:

- A. *Pragmatyczny charakter pojęcia modelu zamierzonego.*
- B. *Związki ze zdaniami analitycznymi.*
- C. *Krytyka „argumentu teoriomodelowego" Putnama.*

A. Uwagi Jana Woleńskiego dotyczą przede wszystkim arytmetyki oraz jej modeli. Przypomnijmy najpierw znaną konstrukcję. Zbudujemy kontinuum rozszerzeń arytmetyki PA. Niech $T_0 = PA$ i niech ψ_0 będzie dowolnym zdaniem nierozstrzygalnym w T_0. Przyjmujemy: $T_{00} = PA \cup \{\psi_0\}$ oraz $T_{01} = PA \cup \{\neg\psi_0\}$. Dla dowolnego skończonego ciągu o wyrazach 0 i 1 niech:

- $T_{\sigma 0} = T_\sigma \cup \{\psi_\sigma\}$
- $T_{\sigma 1} = T_\sigma \cup \{\neg\psi_\sigma\}$.

(gdzie ψ_σ jest dowolnym zdaniem nierozstrzygalnym w T_σ). Otrzymujemy w ten sposób następujące nieskończone drzewo dwójkowe rozszerzeń PA:



Drzewo to ma kontinuum ($2^{\aleph_0}$) gałęzi. Na mocy TWIERDZENIA O ZWARTOŚCI suma teorii z każdej gałęzi jest niesprzeczna (przy założeniu o niesprzeczności PA). Z kolei, każda z tych sum ma model przeliczalny, na mocy DOLNEGO TWIERDZENIA LÖWENHEIMA-SKOLEMA. Żadne dwa z tych modeli nie są elementarnie równoważne, na mocy konstrukcji powyższego drzewa.

Jeśli rozpoczniemy konstrukcję od zdania ψ_0 równego $Con(PA)$, a kolejne ψ_α też będą wyrażały niesprzeczność T_α, to modelem „najbardziej lewej" gałęzi tego drzewa będzie model standardowy $\mathfrak{N}_0$, pozostałe gałęzie będą miały modele niestandardowe. Każde zdanie o postaci $\neg Con(T_\alpha)$ będzie bowiem miało numer gödlowski, który jest liczbą niestandardową w odnośnym modelu. Tak więc, model standardowy jest tu wyróżniony przez pewną własność *metamatematyczną*.

Przypomnijmy jeszcze definicje kilku dalszych pojęć:

- Teoria T jest *opisowo zupełna* (*o-zupełna*) ze względu na ciąg stałych indywidualnych $(a_s)_{s\in S}$ (gdzie S jest dowolnym zbiorem), gdy dla dowolnej formuły $\psi(x)$ języka tej teorii z jedną zmienną wolną x zachodzi implikacja:

  Jeśli $T \vdash \psi(x/a_s)$ dla wszystkich $s \in S$, to $T \vdash \forall x\ \psi(x)$.

  Gdy ciąg rozważanych powyżej stałych jest przeliczalny, to mówimy, że T jest *ω-zupełna*.

- Teoria T jest *konstruktywna* ze względu na ciąg termów $(t_s)_{s \in S}$, gdy dla dowolnej formuły $\psi(x)$ języka tej teorii z jedną zmienną wolną x zachodzi implikacja:

  Jeśli $T \vdash \exists x\ \psi(x)$, to dla pewnego $s \in S$ zachodzi $T \vdash \psi(x/t_s)$.

- Teoria T jest *o-niesprzeczna* ze względu na ciąg termów $(t_s)_{s \in S}$, gdy dla dowolnej formuły $\psi(x)$ języka tej teorii z jedną zmienną wolną x zachodzi implikacja:

  Jeśli $T \vdash \psi(x/t_s)$ dla wszystkich $s \in S$, to $T\ non \vdash \exists x\ \neg\psi(x)$.

  Gdy ciąg rozważanych powyżej stałych jest przeliczalny, to mówimy, że teoria T jest *ω-niesprzeczna*.

Pojęcia te wiążą się z możliwością *nazywania* elementów uniwersum modelu teorii. W szczególności, jeśli w języku teorii mamy *liczebniki*, to możemy nazywać liczby naturalne. Czy tego rodzaju własności teorii pozwalają na jednoznaczną charakterystykę ich modeli zamierzonych?

Woleński analizuje m.in. zależności logiczne między powyżej wprowadzonymi pojęciami, nas jednak interesuje oczywiście ich związek z pojęciem modelu zamierzonego. Niech $\mathbb{N}'$ będzie niestandardowym modelem PA otrzymanym w pierwszym przykładzie z punktu 3.2, a $\mathbb{R}$ modelem dla $PA \cup \neg Con(PA)$. Niech $Th(\mathfrak{M})$ oznacza teorię modelu $\mathfrak{M}$, czyli ogół zdań prawdziwych w $\mathfrak{M}$. Woleński przedstawia argumenty za tym, iż:

- o-niesprzeczność i konstruktywność są zbyt silnymi warunkami dla charakterystyki dowolnego zbioru zdań prawdziwych: dla przykładu, $Th(\mathbb{R})$ jest niesprzeczny, ale ω-sprzeczny.

- Można uznać zbiór $Th(\mathbb{N}')$ za o-niesprzeczny i konstruktywny ze względu na odpowiednio dobrany ciąg stałych (wtedy będzie on też o-zupełny).

- Wynika z tego, że to niesprzeczność i zupełność są *minimalnymi* warunkami, charakteryzującymi zbiór zdań prawdziwych w dowolnym modelu. Ponadto, istnienie teorii niesprzecznych, ale ω-sprzecznych (czyli takich, które nie są ω-niesprzeczne) pokazuje różnicę między prawdziwością a dowodliwością w innym jeszcze aspekcie.

Fakt, iż semantyczna definicja prawdy nie wystarcza do wyróżnienia modelu zamierzonego spośród innych modeli (arytmetyki) komentuje Woleński następująco (Woleński 2005, 259, zmieniam oznaczenia na wyżej omówione):

> To, czy dany zbiór spełnia warunki mocniejsze zależy od konkretnych okoliczności, np. $Th(\mathfrak{N}_0)$ jest ω-niesprzeczny, ω-zupełny i konstruktywny z uwagi na ciąg liczebników, ale zbiór $Th(\mathbb{R})$ nie ma ω-własności. Można jednak podać przykłady zdań fałszywych takich, że dodanie ich do PA zachowuje nie tylko niesprzeczność, ale również ω-niesprzeczność stosownie rozszerzonej teorii [...]. W ogólności, semantyczna definicja prawdy tych kwestii nie rozstrzyga i nie wymusza standardowości, ponieważ jej trafność jest związana z $\mathbf{T}$-równoważnościami, a nie decydowaniem, które zdania są prawdziwe i dlaczego. [...] Powyższe rozważania ujawniają

fundamentalną rolę języka w przekazywaniu stosownej intuicji i dekodowaniu sensów. Gdy teoria $\mathbf{T}$ ma modele standardowe i niestandardowe, nie można ich odróżnić w jej języku. Nawet, gdy weźmiemy zbiór wszystkich prawd arytmetycznych, ma on model niestandardowy, w szczególności $\mathbb{N}'$.

Jak wiemy z twierdzeń Gödla i Tarskiego, semantyka „wychodzi poza" składnię. Środkami finitarnymi, czysto syntaktycznymi nie można scharakteryzować pojęcia prawdy arytmetycznej. Z kolei pojęcie modelu *zamierzonego* „wychodzi poza" semantykę. Środkami semantycznymi (a więc tym bardziej syntaktycznymi) nie jesteśmy w stanie odróżnić modelu zamierzonego od innych modeli teorii. Trzeba odwołać się do pragmatyki, do *nazwania* któregoś z modeli *zamierzonym*. Model standardowy ma definicję w metajęzyku (w teorii mnogości liczby naturalne możemy zdefiniować np. metodą von Neumanna). Jest on wyróżniony na tym właśnie poziomie, przez odwołanie się do własności modelu (model standardowy jest tzw. modelem *pierwszym*, jest jedynym modelem rekurencyjnym, jego uniwersum jest zbiorem dobrze uporządkowanym, itd.). Te odwołania wykraczają jednak poza samą semantykę.

B. Spory o definicje (różnego rodzaju) zdań *analitycznych* oraz zdań *a priori* nie są rozstrzygnięte, nawet po propozycjach autorytetów tej miary co Carnap lub Quine. W odniesieniu do zdań analitycznych Jan Woleński podaje oryginalne wyróżnienia pewnych ich rodzajów i wykorzystuje te propozycje również do mówienia o modelach zamierzonych. I tak, *zdaniem analitycznym w sensie pragmatycznym* nazywa Woleński każde zdanie ψ takie, dla którego istnieje teoria T, której tezą jest ψ, a nadto ψ jest prawdziwe we wszystkich modelach zamierzonych teorii T. O motywacji dla rozważania takich zdań pisze następująco (Woleński 2005, 442):

> Brak koincydencji pomiędzy prawdziwością a dowodliwością w PA motywuje wprowadzenie kategorii zdań analitycznych w sensie pragmatycznym, a więc prawdziwych w modelach zamierzonych (standardowych), tj. wyróżnionych pragmatycznie. Z punktu widzenia logiki jako takiej, modele, które nie są standardowe są równie dobre jak standardowe. To nasze decyzje epistemiczne sprawiają, że pewne modele wybieramy jako standardy i traktujemy jako właściwe. Nie ma też przeszkód w traktowaniu zdań prawdziwych w modelach niestandardowych jako analitycznych w sensie pragmatycznym. Trzeba tylko powiedzieć, że właśnie je bierzemy pod uwagę.

Konieczna w tym miejscu jest następująca uwaga. Jan Woleński jest zwolennikiem Tezy Pierwszego Rzędu, głoszącej, iż to klasyczna logika pierwszego rzędu jest *właściwą* logiką (*the* logic). Argumenty na rzecz tej tezy są liczne i dobrze uzasadnione. Przeciwko niej przemawiać może *praktyka* matematyczna: pamiętamy, iż FOL jest bardzo słabą logiką, jeśli chodzi o środki wyrażania jej języka, a być może również nieadekwatną dla przeprowadzania niektórych inferencji, którymi posługują się matematycy. To jednak temat na całkiem inny wykład.

C. Artykuł Hilarego Putnama *Modele i rzeczywistość* wywołał olbrzymią lawinę prac filozoficznych, w tym wiele krytycznych. Również Jan Woleński zajmuje postawę krytyczną wobec pewnych tez Putnama. Jak słuchacze pamiętają, Putnam krytykuje *realizm metafizyczny* (świat miałby być gotowym tworem niezależnym od aparatur pojęciowych) za, wedle niego nieuprawnione, twierdzenie, iż stanowisko to daje podstawy do odróżnienia modeli zamierzonych od niezamierzonych. Sam zaś określa się jako *realista wewnętrzny* (o modelach można mówić jedynie w kontekście stosownej teorii, wraz z jej aparaturą pojęciową). Krytyka Putnama wykorzystuje przy tym TWIERDZENIE LÖWENHEIMA-SKOLEMA-TARSKIEGO, a dokładniej, wynikające z niego istnienie modeli niezamierzonych teorii. O argumentacji Putnama pisze Woleński m.in. tak (Woleński 2005, 480–481):

> Pomijając sprawy realisty metafizycznego, osobistości rzeczywiście podejrzanej, ograniczę się do uwag z punktu widzenia realizmu epistemologicznego i $\mathbf{STP}$ [semantycznej teorii prawdy — JP] jako wersji klasycznej teorii prawdy. Realizm nie jest zagrożony przez $(\mathbf{LST})$ [twierdzenie Löwenheima-Skolema-Tarskiego — JP], ponieważ dotyczy ono modeli zamierzonych i niezamierzonych, a w semantycznej definicji prawdy nie ma nic tajemniczego w sprawie związku języka ze światem. Z drugiej strony, twierdzenie to obala tezę Putnama, że modele są niczym innym jak konstrukcjami wewnątrz teorii. Kluczowy problem polega na identyfikacji modelu zamierzonego. Putnam zdaje się zakładać, iż wskazanie modelu odbywa się zawsze środkami danej teorii. To jest jednak jawna nieprawda, gdyż trzeba przy tym korzystać z metateorii, dokładnie tak, jak w przypadku wyjaśnienia paradoksu Skolema [...], że to właśnie struktura mocy kontinuum, a nie przeliczalna, jest modelem teorii liczb rzeczywistych. Wbrew Putnamowi twierdzę, że aksjomat $\mathbf{MJ}$ [metajęzyka — JP] ustalający, że słowo 'kot' odnosi się do kotów (i każdy inny aksjomat tego rodzaju) wyklucza, w świetle $\mathbf{STP}$, modele niezamierzone, w tym przypadku takie, że rozważane słowo odnosi się do psów. Jest tak dlatego, że mamy do czynienia z aksjomatem metajęzyka, który ustala sposób przekładu języka przedmiotowego na metajęzyk ([...]; wbrew Putnamowi sądzę, że kauzalna teoria referencji pomaga realizmowi epistemologicznemu). Zdanie „'kot' oznacza koty" jest analityczne w sensie pragmatycznym, a takie zdania są niezbędne dla stabilności układów pojęciowych. Dopiero w tym kontekście można rozważać ograniczenia operacyjne i teoretyczne, a nie „same w sobie". Nie ma żadnych przeszkód, aby zamienić słowa 'pies' i 'kot', jak w przykładzie Putnama, ale to zmienia języki i podręczniki przekładu z języka przedmiotowego na metajęzyk. Fakt, że możemy porównywać interpretacje słów 'pies' i 'kot' wskazuje, że dysponujemy środkami odróżniania modeli zamierzonych i niezamierzonych w świetle praktyki językowej. Jeszcze raz powtórzę, iż modele właściwe są rozpoznawalne, aczkolwiek nie czysto semantycznie. I to wystarczy realiście epistemologicznemu.

6.2 Jeszcze trochę matematyki

Wypada też odpowiedzieć na pytanie, jakie konsekwencje dla *praktyki matematycznej* mają wyniki metalogiczne dotyczące podstaw matematyki, a w szczególności te, które pokazują niejednoznaczność charakterystyki modeli zamierzonych teorii (w ustalonych systemach logicznych). Otóż wydaje się, że wyniki te mają dla owej praktyki znaczenie znikome. Oczywiście, np. badanie modeli niestandardowych jest interesujące z czysto matematycznego punktu widzenia. Praktyka badawcza matematyki nie jest jednak ograniczona do sztywno określonego systemu. Pojęcie dowodu matematycznego ma naturę psychologiczną (trochę też socjologiczną). *Wierzymy*, że wszelkie dowody matematyczne można rekonstruować tak, aby otrzymać w wyniku dowody formalne w rozumieniu współczesnej logiki. *Wiemy* też, powtórzmy, że całość matematyki nie może zostać ujęta w *jednym* systemie logicznym (spełniającym określone warunki dotyczące efektywności).

Zwróćmy uwagę na interesujące zmiany w paradygmacie logiki formalnej w ponad stu ostatnich latach. Początkowo wzorcem była teoria typów, następnie wyłonił się standard logiki pierwszego rzędu, a ponad pół wieku temu ponownie podjęto intensywne badania nad logikach silniejszymi od FOL, w których reprezentować można ważne pojęcia matematyczne. Być może, nastąpi kolejna zmiana w tym paradygmacie (np. wpływy informatyki?), tego przewidywać nie sposób. Nowy paradygmat logiki może powstać na skutek nowych potrzeb matematyki, wpływ na zmianę paradygmatu ma też wymieranie kolejnych pokoleń matematyków i logików.[44]

Niezależnie od deklarowanych poglądów filozoficznych, „zwykły” matematyk korzysta z liczb naturalnych i rzeczywistych oraz z uniwersum teorii mnogości (z „prawdziwych” zbiorów) tak, jakby były one podane w sposób jednoznaczny. Niektóre teorie matematyczne budowano z myślą o wielorakich zastosowaniach (np. teorię grup lub teorię algebr Boole'a), a więc w ich przypadku nie ma sensu mówienie o (jednym, z dokładnością do izomorfizmu) modelu zamierzonym, właściwe jest natomiast np. pytanie jakie zachodzą w tym przypadku *twierdzenia o reprezentacji* (słuchacze mogli spotkać się z twierdzeniem Stone'a o reprezentacji algebr Boole'a na wykładzie logiki). Oto kilka *ad hoc* dobranych przykładów twierdzeń o reprezentacji:

- TWIERDZENIE RIESZA. *Niech H będzie przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Wówczas dla każdego funkcjonału liniowego y^* należącego do przestrzeni sprzężonej H^* istnieje dokładnie jeden element $y \in H$ taki, że*

  $$y^*(x) = \langle x, y \rangle$$

  dla wszystkich $x \in H$. Odwzorowanie $y^* \mapsto y$ jest wzajemnie jednoznacznym izometrycznym odwzorowaniem antyliniowym.

- TWIERDZENIA STONE'A DLA ALGEBR BOOLE'A. *Każda algebra Boole'a jest izomorficzna z ciałem zbiorów.*

- TWIERDZENIE CAYLEYA. *Każda grupa jest izomorficzna z pewną grupą permutacji.*

---

[44]Usłyszałem taką opinię (na temat zmiany paradygmatu teorio-mnogościowego na teorio-kategoryjny) od pewnego znanego matematyka.

- TWIERDZENIE MOSTOWSKIEGO O KONTRAKCJI. *Każda ekstensjonalna struktura ufundowana jest izomorficzna ze strukturą przechodnią.*

- TWIERDZENIE GÖDLA O REPREZENTOWALNOŚCI. *Każda funkcja rekurencyjna jest reprezentowalna w PA.*

W pewnym sensie, wszystkie *twierdzenia o pełności* dotyczące systemów logicznych także są twierdzeniami o reprezentacji (W.A. Pogorzelski): pokazujemy, że zbiór formuł *dowodliwych* w danej logice pokrywa się ze zbiorem jej *tautologii*, gdzie ten ostatni jest określony przez pewną klasę struktur (algebraicznych, porządkowych, topologicznych).

Wspomnieć warto, że współczesna teoria modeli intensywnie bada problemy *klasyfikacji* teorii: m.in. to, jakie wartości przyjmuje funkcja podająca dla wybranej teorii i każdej mocy nieskończonej κ liczbę nieizomorficznych modeli tej teorii mocy κ. Maksymalna taka liczba to 2^{κ}: teorie o takiej liczbie nieizomorficznych (różnych pod względem struktury) modeli (dla każdej κ) to teorie najbardziej „dzikie". Taką teorią jest np. arytmetyka. Dla teorii kategorycznych w mocy κ wartość tej funkcji wynosi oczywiście 1 (dla argumentu κ).

O implikacjach twierdzeń Gödla, Tarskiego, Löwenheima-Skolema, Lindströma oraz innych twierdzeń *limitacyjnych* dla refleksji filozoficznej napisano już wiele, czasem nadużywając tych twierdzeń dla tworzenia złudnych i bałamutnych spekulacji. Mówiący te słowa nie ma poczucia, że potrafiłby powiedzieć w tej materii coś oryginalnego. Pozostaje mu zatem zaproszenie słuchaczy do samodzielnych studiów, sięgnięcia po dzieła uznanych autorytetów.

* * *

Wróćmy jeszcze do centralnego pojęcia tego odczytu, czyli pojęcia *modelu zamierzonego* teorii. Przypuśćmy, że mamy wybraną strukturę matematyczną i traktujemy ją jako model zamierzony dla teorii budowanej w celu jego jednoznacznej charakterystyki. Możliwe są teraz różne scenariusze:

- Udaje się wykazać kategoryczność teorii (lub kategoryczność w interesującej nas mocy). Wtedy teoria jednoznacznie opisuje swój model zamierzony. Przykład: aksjomatyczny system geometrii.

- Okazuje się, że istnieją modele nieizomorficzne z modelem zamierzonym. Dla przykładu, argument ze zwartości lub wykorzystanie konstrukcji ultraproduktu daje modele arytmetyki różne od modelu zamierzonego. Zaczynamy wtedy nazywać model zamierzony *modelem standardowym*, a pozostałe *modelami niestandardowymi*. Może być tak, iż model standardowy ma pewne własności matematyczne, które nie przysługują pozostałym, niestandardowym modelom. Dla przykładu, standardowy model arytmetyki jest jej modelem *pierwszym* (może zostać elementarnie włożony w każdy inny model tej teorii). Model ten jest też jedynym modelem *rekurencyjnym* tej teorii, jak głosi TWIERDZENIE TENNENBAUMA.

- Okazuje się, że istnieją modele nieizomorficzne z modelem zamierzonym. Dla przykładu, DOLNE TWIERDZENIE LÖWENHEIMA-SKOLEMA ustala, że jeśli teoria mnogości ZF jest niesprzeczna, to ma model przeliczalny. Z pewnością nie jest on modelem zamierzonym, więc nazywamy go *niestandardowym*. Ale czy mamy, w przypadku teorii mnogości, *jeden* (z dokładnością do izomorfizmu) model, który nie jest niestandardowy, który zatem chcemy nazwać *standardowym*? Uzus językowy, przyjęty w teorii mnogości nakazuje nazwać *standardowym* każdy model tej teorii, w którym intrpretacja predykatu $\in$ jest relacją należenia (ograniczoną do uniwersum tego modelu). Dopuszcza się więc wielość modeli standardowych. Modele wewnętrzne są przechodnie, modele przechodnie są standardowe, a modele standardowe są ufundowane.

  Tak więc w tym ostatnim przypadku chyba jednak porzucamy (odsuwamy w przyszłość?) mówienie o *modelu zamierzonym*. Szukamy nowych aksjomatów dla teorii mnogości, np. w postaci aksjomatów istnienia bardzo dużych liczb kardynalnych. Nowe aksjomaty miałyby lepiej charakteryzować pojęcie zbioru (a więc w istocie podawać propozycję *nowego* rozumienia tego pojęcia), a być może rozstrzygać też zdania niezależne od systemu ZF. Oczywiście możliwa jest także inna strategia: pozostajemy przy dotychczasowej aksjomatyce i godzimy się na to, iż teoria mnogości ma podobny status, jak na przykład teorie algebraiczne lub topologiczne, dopuszczające mnogość interpretacji.

Zarówno w przypadku teorii mnogości, jak i w przypadku arytmetyki liczb naturalnych pierwsze niestandardowe modele tych teorii wskazał Thoralf Skolem. Niestandardowość modelu teorii mnogości polegała na jego przeliczalności przy jednoczesnej dowodliwości w teorii mnogości istnienia zbiorów nieprzeliczalnych. Uzyskujemy zatem *efekt Skolema* (zwykle nazywany *paradoksem Skolema*): w teorii (mnogości) udowodnić możemy istnienie zbiorów nieprzeliczalnych (na mocy aksjomatu nieskończoności oraz TWIERDZENIA CANTORA), a na mocy DOLNEGO TWIERDZENIA LÖWENHEIMA-SKOLEMA teoria (mnogości) ma model przeliczalny, o ile ma jakikolwiek model. Model niestandardowy dla arytmetyki wskazał Skolem odwołując się do konstrukcji, która antycypowała później wprowadzoną konstrukcję ultraproduktu.

* * *

Argument ze zwartości (lub, równoważnie, wykorzystanie konstrukcji ultraproduktu) może zostać wykorzystany również dla pokazania, że pewne teorie empiryczne mają, oprócz modelu zamierzonego, również inne modele. Wyobraźmy sobie na przykład, że chcemy zbudować formalną teorię (w języku pierwszego rzędu) ujmującą zależności syntaktyczne, której modelami zamierzonymi miałyby być wszystkie zdania syntaktycznie poprawne (ustalonego języka etnicznego). Wszystkie modele takiej teorii miałyby być skończone, gdyż zdania dowolnego języka etnicznego są strukturami skończonymi. Przyjmijmy, dla ustalenia uwagi, że elementarnymi składnikami zdań są wyrazy (rozumiane wedle jakiejś definicji, zaproponowanej przez lingwistę). Zależnościami natury syntaktycznej między wyrazami są m.in.: szyk, związek zgody, związek rządu, składniki bezpośrednie, itp. Jeśli nasza teoria syntaktyczna dopuszcza, iż zdania mogą mieć dowolną skończoną liczbę wyrazów (a takie założenie przyjmowane jest w każdej rozsądnej teorii składni), to musi mieć ona (o ile jest niesprzeczna), oprócz modeli dowolnej mocy skończonej również model nieskończony, właśnie na mocy argumentu ze zwartości lub poprzez konstrukcję ultraproduktu. Tak więc, taka teoria składniowa w języku pierwszego rzędu nie może mieć jako klasy swoich *modeli zamierzonych* dokładnie wszystkich poprawnych składniowo zdań wybranego języka etnicznego.

* * *

Nie każda *innowacja* w matematyce prowadzi do modeli niestandardowych, jak zauważa Haim Gaifman.[45] Systemy liczbowe były w historii matematyki stale rozszerzane: od liczb naturalnych i wymiernych przechodzono do liczb całkowitych oraz rzeczywistych, a dalej liczb zespolonych i pewnych, całkiem współcześnie rozważanych systemów (np. *liczby hiperrzeczywiste*, *liczby nadrzeczywiste*). Odkrycie liczb niewymiernych było rewolucyjne, kazało zrewidować przyjmowane dotąd poglądy na temat związku liczb (wymiernych) z postulowaną ontologią. Racjonalność greckich filozofów skłania ich jednak do akceptacji tego odkrycia, jako mówiącego coś nowego o (jak się okazało nie do końca poznanym) świecie liczb, którymi operowali. Nie stają się zatem liczby niewymierne jakimiś obiektami *niestandardowymi*, lecz zostają włączone do aparatury pojęciowej, bez konieczności *całkowitej* zmiany dogmatów o związkach miedzy liczbami a światem: dogmaty te ulegają jedynie *modyfikacji*.

Gaifman w cytowanej wyżej pracy zwraca uwagę na pewne dalsze (oprócz odkrycia liczb niewymiernych) podobne innowacje w rozwoju matematyki:

- włączenie liczb *ujemnych* oraz *zespolonych* do systemów liczbowych;
- rozszerzenie rozumienia pojęcia *funkcji* dokonane w wieku dziewiętnastym;
- odkrycie geometrii *nieeuklidesowych*.

Fakty dotyczące rozszerzania systemów liczbowych są dość dobrze znane, nie będziemy ich tu przywoływać. Rozwój analizy matematycznej dostarczył wielu przykładów „dziwnych" funkcji: wszędzie nieciągłych, wszędzie ciągłych lecz nigdzie nie różniczkowalnych, odwzorowań odcinka $[0, 1]$, których zbiór wartości wypełniał kwadrat jednostkowy, itd. Wcześniej operowano dość nieprecyzyjnym pojęciem funkcji, jako pewnego przepisu otrzymywania wartości dla danych argumentów, wzorując się na ilościowych opisach zależności fizycznych. Obecnie pojęcie funkcji jest, jak wiadomo, czysto ekstensjonalne i ma prostą definicję w teorii mnogości.

Ostatnia z wyliczonych przez Gaifmana innowacji różni się nieco od pozostałych, geometrie nieeuklidesowe nie powinny być jednak uważane za modele niestandardowe, m.in. z następujących powodów (Gaifman 2004, 12, tłumaczenie: JP):

[45] Gaifman, H. 2004. Nonstandard models in a broader perspective. W: Ali Enayat, Roman Kossak (eds.) *Nonstandard Models in Arithmetic and Set Theory.* AMS Special Session Nonstandard Models of Arithmetic and Set Theory, January 15–16, 2003, Baltimore, Maryland, *Contemporary Mathematics* **361**, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1–22.

> Odkrycie geometrii nieeuklidesowej oznacza, że wbrew poprzednim oczekiwaniom, geometria absolutna [w oryginale: *neutral geometry*] ma modele nieeuklidesowe. W tym oczywistym sensie, modele te były niezamierzone. Byłoby jednak błędem klasyfikowanie ich jako niestandardowych. Jeśli chodzi o geometrię *euklidesową*, to nie były one w ogóle [jej] modelami, ponieważ naruszały jeden z aksjomatów. Zostały jednak rozpoznane jako modele innego rodzaju geometrii, z uzasadnionymi roszczeniami do miana przestrzeni geometrycznej. Okazało się zatem, że geometria absolutna nie określa jednoznacznego pojęcia. W przeciwieństwie do tego, niestandardowy model arytmetyki nie ma analogicznych roszczeń wobec pojęcia liczby naturalnej; nie jest tak, że staliśmy się świadomi, iż „ciąg [wszystkich] liczb naturalnych" [w oryginale: *the sequence of natural numbers*] ma inną uzasadnioną interpretację — taką, która czyni fałszywymi standardowe prawdy arytmetyczne [w oryginale: *a standard arithmetical truth*].

Należy przy okazji zaznaczyć, że różne są opinie na temat znaczenia użytego wyżej pojęcia *przestrzeni geometrycznej*. Nie podejmujemy tej dyskusji, gdyż prowadziłaby ona zbyt daleko od głównego tematu naszych rozważań.

Nadto, może warto też podkreślić (w związku z ostatnim przykładem), że zarówno model standardowy, jak i modele niestandardowe (danej teorii) mają pewną cechę wspólną: spełniają mianowicie wszystkie aksjomaty (tej teorii). Są zatem nieodróżnialne semantycznie, choć nie są izomorficzne.

Powinno być również oczywiste, że postanowienie wyróżnienia jakiegoś modelu teorii jako jej modelu standardowego pociąga za sobą przyjęcie *realistycznego* stanowiska w odniesieniu do teorii matematycznych. Zdania prawdziwe w modelu standardowym mogą przy tym stanowić zbiór obszerniejszy od zbioru zdań dowodliwych w teorii, jak to ma miejsce w przypadku arytmetyki.

Gaifman wskazuje dalsze struktury, które mogą pretendować do miana modeli *standardowych*. Dla przykładu, pojęcie *dobrego porządku* zdaje się mieć interpretację zamierzoną. Ponieważ każdy zbiór dobrze uporządkowany jest izomorficzny z odcinkiem początkowym klasy wszystkich liczb porządkowych, więc klasa ta jest standardowym modelem dla pojęcia dobrego porządku. Jeśli teraz uznajemy, iż mamy dobrze określony model standardowy dla tego pojęcia, to również konstrukcje na nim oparte mogą aspirować do bycia uznanymi za *standardowe*. Dla przykładu, status taki uzyskuje klasa wszystkich zbiorów konstruowalnych L.

Z drugiej strony, na przykład pojęcie *zbioru potęgowego zbioru* ω nie jest charakteryzowane przez warunek minimalności (jak ma to miejsce w przypadku zbioru ω), lecz raczej przez warunek maksymalności. Jest kwestią stale otwartą, jakie ewentualne nowe aksjomaty w teorii mnogości mogłyby jednoznacznie charakteryzować wspomniane wyżej pojęcie.

* * *

Niezależnie od trudności w próbach scharakteryzowania pragmatycznego pojęcia modelu zamierzonego, modele niestandardowe mają wiele zalet cieszących matematyków, np.:

- Modele niestandardowe są strukturami interesującymi same w sobie, ze względu na ich budowę i własności.
- Modele niestandardowe mogą zostać wykorzystane w dowodach twierdzeń metalogicznych, ustalających własności teorii.
- Modele niestandardowe mogą zostać również wykorzystane w eksplikacji dotąd niejasnych pojęć: klasycznym przykładem jest tu analiza niestandardowa, gdzie pojęcie wielkości *nieskończenie małej* znajduje precyzyjną definicję.

* * *

Pojęcie modelu zamierzonego zawiera zatem nieusuwalny komponent pragmatyczny. Ani środkami syntaktycznymi, ani nawet semantycznymi modelu takiego wyróżnić nie można. Potrzebne staje się odwołanie do metajęzyka, własności modeli w nim opisywanych oraz do naszych decyzji epistemologicznych.

* * *

Jak słuchacze zdążyli się przekonać, odczyt miał charakter bardziej popularny niż oryginalny.[46] Jeśli udało mi się zachęcić kogokolwiek ze słuchaczy do samodzielnych dalszych studiów dotyczących omawianej problematyki, to odczyt spełnił swoje zadanie. W przeciwnym przypadku był, rzecz jasna, dydaktyczną klęską.

Mam również nadzieję, że treść wykładu uzasadniła nieco może pretensjonalny jego tytuł. Tytuł motywowany jest także osobistymi względami natury sentymentalnej, ale to już całkiem *Inna Historia*.

* * *

Uprzejmie dziękuję za poświęconą odczytowi uwagę. Można już przestać wierzyć w istnienie aktualnej nieskończoności.[47]

[46] Niniejszy tekst ma przy tym charakter wstępny. Postaramy się, za przyzwoleniem Losu, dokonać jego uzupełnienia. Uprzejmie dziękuję Panu Profesorowi Janowi Woleńskiemu za przekazane uwagi dotyczące pierwszej wersji tekstu.

[47] Chyba, że ktoś ze słuchaczy wybiera się na seminarium bezpośrednio po tym wykładzie, poświęcone *Ontologii teorii mnogości* i przeznaczone, nie ukrywajmy, dla osób *wielkiej wiary w wielkie nieskończoności*.