Jerzy Pogonowski
Zakład Logiki Stosowanej UAM
pogon@amu.edu.pl

Zastosowania algebry
w logice i informatyce III
Zakopane 1999

Przestrzenie Tolerancji i Opozycji

0. Oznaczenia. Dla $R \subseteq X \times Y$ oraz $x \in X$, $y \in Y$ niech: $R^{\wedge}x = \{z \in Y : xRz\}$, $R^{\vee}y = \{z \in X : zRy\}$. Skrót *gdy* (pisany kursywą!) zastępuje *wtedy i tylko wtedy, gdy.*

Przestrzenie tolerancji

1. *Przestrzeń tolerancji*: każdy układ (X, R), gdzie $X \neq \emptyset$, R zwrotna i symetryczna relacja na X.
2. *R-preklasa*: każdy zbiór $A \subseteq X$ taki, że xRy dla wszystkich $x, y \in A$.
3. *R-klasa*: maksymalna R-preklasa. Rodzina wszystkich R-klas (oznaczana przez $X//R$) tworzy pokrycie X. Dla dowolnych $x, y \in X$ mamy: xRy *gdy* istnieje R-klasa A taka, że $x, y \in A$.
4. *Baza* przestrzeni (X, R): każda minimalna rodzina R-klas $\mathfrak{B}$ taka, że dla wszystkich $x, y \in X$: xRy *gdy* istnieje $A \in \mathfrak{B}$ takie, że $x, y \in A$. W każdej przestrzeni tolerancji istnieje baza.
5. *Relacja stowarzyszona* z R: relacja R^+ zdefiniowana następująco: xR^+y *gdy* $\forall z \in X\ (xRz \leftrightarrow yRz)$. Jeśli R jest tolerancją, to R^+ jest równoważnością.
6. *R-jądra* (przestrzeni (X, R)): rodzina X/R^+.
7. *R-składowe* (przestrzeni (X, R)): rodzina X/R^{tr}, gdzie R^{tr} jest przechodnim domknięciem R.
8. Przestrzeń (X, R) jest: a) *prosta gdy* $\forall x \in X\ (R^+)^{\wedge}x = \{x\}$; b) *spójna gdy* $X/R^{tr} = \{X\}$; c) *regularna gdy* $\forall x \in X\ (R^+)^{\wedge}x = \bigcap\{A \in X//R :\ x \in A\}$.
9. Zbiór $A \subseteq X$ jest: a) *R-pochłaniający gdy* $\forall y \in X\ \exists x \in A\ (xRy)$; b) *R-rozproszony gdy* $\forall x, y \in A\ (x \neq y \rightarrow \neg xRy)$.
10. Dla $A \subseteq X$ niech: $G_R(A) = \{y \in X : \forall x(x \in A \rightarrow xRy)\}$. Wtedy: a) (G_R, G_R) jest odpowiedniością Galois. b) $A \in X//R$ *gdy* $A = G_R(A)$.
11. Dla dowolnej przestrzeni tolerancji (X, R) niech:
 $T^*_R = \{A \subseteq X : \forall x(x \in A \rightarrow R^{\wedge}x \subseteq A)\}$ T^0_R = topologia generowana przez podbazę $X//R$
 $d_R(x, y)$ = najmniejsze n takie, że istnieją $x_0, x_1, \ldots, x_n \in X$ dla których $x_0 = x, x_n = y$ oraz x_iRx_{i+1} $(0 \leqslant i < n)$ [lub ∞, jeśli nie ma takiego n]. Wtedy:
 a) $T^*_R \subseteq T^0_R$. Przestrzeń (X, T^*_R) ma bazę $X//R$ złożoną ze zbiorów domknięto-otwartych.
 b) d_R jest metryką. c) $\forall A \in T^*_R\ \forall x \in A\ (x \in A \rightarrow (R^{tr})^{\wedge}x \subseteq A)$;
 d) (X, R) jest prosta i regularna *gdy* T^0_R jest T_1-topologią.
 e) Dla dowolnego $x \in X$ mamy: $\forall A \in T^0_R\ (x \in A \rightarrow (R^+)^{\wedge}x \subseteq A)$.
 f) Jeśli (X, R) jest prosta, to T^0_R jest T_0-topologią.
12. Dla dowolnego $A \subseteq X$ niech: $cl_R(A) = \{x \in X : \exists y \in A\ (xRy)\}$
 $int_R(A) = \{x \in A : \forall y \in X\ (xRy \rightarrow y \in A)\}$ $fr_R(A) = cl_R(A) - int_R(A)$. Wtedy:
 a) (X, cl_R) jest przestrzenią domknięć;
 b) R jest równoważnością *gdy* $\forall A \subseteq X\ (cl_R(cl_R(A)) = cl_R(A))$.
13. Niektóre relacje i funkcje wyznaczone w rodzinie niepustych podzbiorów uniwersum przez wyjściową tolerancję:
 $A\ ind_R\ B$ *gdy* $A \subseteq cl_R(B) \wedge B \subseteq cl_R(A)$ $A\ ins_R\ B$ *gdy* $cl_R(A) \cap B \neq \emptyset$
 $A\ pr_R\ B$ *gdy* $cl_R(A) \cap cl_R(B) \neq \emptyset$ $dist_R(A, B) = \min\{d_R(x, y) : x \in A \wedge y \in B\}$
 $Dist_R(A, B) = \max(\{dist_R(\{x\}, B) : x \in A\} \cup \{dist_R(A, \{y\}) : y \in B\})$. Mamy wtedy:
 a) $ind_R \subseteq ins_R \subseteq pr_R$; b) $A\ ins_R\ B$ *gdy* $dist_R(A, B) \leqslant 1$;
 c) Dla dowolnych niepustych $A, B \subseteq X$ następujące warunki są równoważne:
 (i) $A\ ind_R\ B$ (ii) $A \cup B \subseteq cl_R(A) \cap cl_R(B)$ (iii) $Dist_R(A, B) \leqslant 1$.
 d) $A\ pr_R\ B$ *gdy* $dist_R(A, B) \leqslant 1$; e) $A \cap B \neq \emptyset \rightarrow A\ ins_R\ B$.

Przestrzenie opozycji

14. *Przestrzeń opozycji*: każdy układ (X, R), gdzie $\overline{\overline{X}} \geqslant 2$, R przeciwzwrotna i symetryczna relacja na zbiorze$X$.
15. *Diagram opozycji*: każdy układ (X, F, φ) taki, że:
    a) $\overline{\overline{X}} \geqslant 2$; b) $\overline{\overline{F}} \geqslant 2$; c) $\neg \exists x \in X \ \forall y \in X \ \forall a \in F \ (x \ \varphi \ a \leftrightarrow y \ \varphi \ a)$;
    d) $\forall x \in X \ \exists a \in F \ (x \ \varphi \ a) \wedge \forall x \in X \ \exists a \in F \ (x \ \varphi \ a)$.
16. Niektóre relacje opozycji w X wyznaczone przez diagram (X, F, φ):
    a) $x \ op_1 \ y \quad gdy \quad \varphi^{\wedge} x \cap \varphi^{\wedge} y = \emptyset$
    b) $x \ op_2 \ y \quad gdy \quad \varphi^{\wedge} x - \varphi^{\wedge} y \neq \emptyset \wedge \varphi^{\wedge} y - \varphi^{\wedge} x \neq \emptyset$
    c) $x \ op_3 \ y \quad gdy \quad \varphi^{\wedge} x \div \varphi^{\wedge} y \neq \emptyset$
    d) $x \ op_A \ y \quad gdy \quad \exists a \in A (a \in \varphi^{\wedge} x \div \varphi^{\wedge} y)$, gdzie $A \subseteq F$.
17. Niech $\triangle_{\varphi}(Y) = \bigcap\limits_{x \in Y} \varphi^{\wedge} x \qquad \triangledown_{\varphi}(A) = \bigcap\limits_{a \in A} \varphi^{\vee} a$, dla dowolnych $Y \subseteq X$ oraz $A \subseteq F$.
    Wtedy $(\triangle_{\varphi}, \triangledown_{\varphi})$ jest odpowiedniością Galois.
18. *Opozycje parametryczne* są wyznaczone przez układy postaci $(X, F, \varphi, \mathcal{A})$, gdzie:
    a) (X, F, φ) jest diagramem opozycji;
    b) $\mathcal{A}$ jest podziałem F o co najmniej dwóch elementach;
    c) każdy element $\mathcal{A}$ ma co najmniej dwa elementy;
    d) $\forall x \in X \ \forall A \in \mathcal{A} \ \exists! a \in A \ (x \ \varphi \ a)$
    e) $\forall A \in \mathcal{A} \ \bigcup\limits_{a \in A} \varphi^{\vee} a = X$.
19. *Opozycje kontekstowe* są wyznaczone przez układy postaci (X, F, φ, S), gdzie:
    a) (X, F, φ) jest diagramem opozycji;
    b) $S \subseteq FS(X)$ = wolna półgrupa generowana przez X;
    c) $F = \{(u, v) \in (FS(X))^2 : \exists x \in X \ uxv \in S\}$
    d) $\forall x \in X \ \forall (u, v) \in F \ \ x \ \varphi \ (u, v) \leftrightarrow uxv \in S$.
20. Niektóre zastosowania: fizjologia widzenia (Zeeman); uogólnione kongruencje (Chajda, Niederle, Zelinka); automaty tolerancyjne (Arbib, Dal Cin); podstawy geometrii (Poston); lingwistyka (Szrejder, Semeniuk-Polkowska, Fischer, Pogonowski).

W szczególności, w następujących pracach znaleźć można opisy kilkudziesięciu przestrzeni tolerancji i opozycji związanych z podobieństwami i opozycjami fonologicznymi, leksykalnymi, hiponimicznymi, syntagmatycznymi:

Pogonowski, J. (1981). *Tolerance spaces with applications to linguistics.* Poznań: UAM.
Pogonowski, J. (1993). *Linguistic oppositions.* Poznań: UAM.
Pogonowski, J. (1995). Trzy drobiazgi fonologiczne. *Investigationes Linguisticae*, I, 7–54.

Niniejsze dwie kartki stanowią bodaj najkrótszą "ściągę" dotyczącą tolerancji i opozycji. Może komuś się to przyda. W tekście abstraktu był w tym miejscu stary (trzydziestoletni) rysuneczek ukazujący chrześcijańskie rozumienie tolerancji w XV wieku. Zamiast tego załączam jeden z limeryków napisanych w owym pamiętnym 1999 roku na Jaszczurówce:

Raz w Zakopanem, przy pełni,
Zjawił się facet z uczelni.
Wśród logik pośrednich pomyka,
Poznajcie — Wojciecha Dzika!
Jest strukturalnie zupełny...

Konstanz, pełnia Księżyca, maj 2003