# Szczęściarze epistemiczni

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
www.kognitywistyka.amu.edu.pl
http://logic.amu.edu.pl/index.php/Dydaktyka
pogon@amu.edu.pl

22xii2015

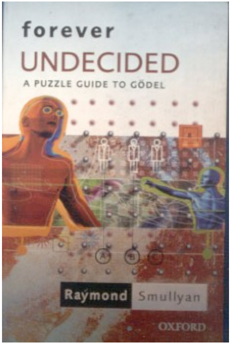
# Po co tego słuchać?

Pokazujemy kilka twierdzeń z tłumaczenia książki Raymonda Smullyana *Forever Undecided. A Puzzle Guide to Gödel*, które ukazało się w 2007 roku nakładem *Książki i Wiedzy*, pod tytułem *Na Zawsze Nierozstrzygnięte. Zagadkowy Przewodnik Po Twierdzeniach Gödla.*

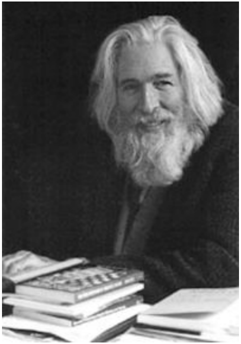
Obok zagadek o Rycerzach (mówiących zawsze prawdę) oraz Łotrach (mówiących zawsze fałsz), książka zawiera zagadki logiczne, w których w formie popularnej przedstawia się logikę epistemiczną oraz logikę dowodliwości (logikę Gödla-Löba).

Logiki epistemiczne są słuchaczom znane z kursu *Logika w zastosowaniach kognitywistycznych*. Proszę traktować niniejszą prezentację jako rozrywkę. W styczniu omówimy wybrane twierdzenia metalogiczne, podając ich precyzyjne matematyczne dowody.

# Forever Undecided




Forever Undecided



Raymond Smullyan

# Kilka zalecanych pozycji:


- Boolos, G. 1993. *The Logic of Provability.* Cambridge University Press.
- Smullyan, R. 1992. *Gödel's Incompleteness Theorems.* Oxford University Press.

- Jacek Hawranek: *Aspekty algebraiczne systemu modalnego Gödla–Löba.* Wydawnictwo Uniwersytetu Wrocławskiego, Wrocław, 1994.
- Andrzej Indrzejczak: *Hybrydowe systemy dedukcyjne w logikach modalnych.* Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź, 2006.
- Jerzy Perzanowski: *Logiki modalne a filozofia.* Uniwersytet Jagielloński, Rozprawy Habilitacyjne nr 156, Kraków, 1989.
- Kazimierz Świrydowicz: *Podstawy logiki modalnej.* Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań, 2004.

# Książki z zagadkami logicznymi Raymonda Smullyana

- *Jaki jest tytuł tej książki? Tajemnica Drakuli, zabawy i łamigłówki logiczne.* Warszawa 1993. Przełożył: Bohdan Chwedeńczuk. Trzy wydania polskie.
- *Dama czy tygrys oraz inne zagadki logiczne.* Warszawa 1995, 2004. Przełożył: Bohdan Chwedeńczuk.
- *Szatan, Cantor i nieskończoność oraz inne łamigłówki.* Warszawa 1998. Przełożyli z angielskiego: Anna i Krzysztof Wójtowicz.
- *Przedrzeźniać Przedrzeźniacza. Oraz Inne Zagadki Logiczne Łącznie z Zadziwiającą Przygodą w Krainie Logiki Kombinatorycznej.* Warszawa 2007. Przekład z języka angielskiego: Jerzy Pogonowski.
- *Na zawsze nierozstrzygnięte. Zagadkowy Przewodnik po Twierdzeniach Gödla*. Warszawa 2007. Z angielskiego przełożył Jerzy Pogonowski.

# W poszukiwaniu wydawcy:

Kilka dalszych książek Smullyana z zagadkami logicznymi przetłumaczonych (JP) na język polski:

- *Alicja w Krainie Zagadek.*
- *Labirynty logiczne.*
- *Magiczny ogród George'a B. i inne zagadki logiczne.*
- *Księga zagadek Gödlowskich. Zagadki, paradoksy, dowody.*
- *Przewodnik po logice matematycznej dla początkujących* (rozpoczęto prace nad przekładem).

# Plan na dziś

**Plan na dziś:**

- **Systemy przekonań.** Kto jest prostaczkiem logicznym?
- **Poziomy samoświadomości.** Kto jest szczęściarzem epistemicznym?
- **II Twierdzenie Gödla.**
  Czy możesz wiedzieć, że twój system przekonań jest niesprzeczny, bez popadnięcia przy tym w sprzeczność?
- **Twierdzenie Löba i samospełniające się przekonania.**
  Kiedy *wishful thinking* ma wartość?
- **I Twierdzenie Gödla (o niezupełności).**
  Czy łatwy jest los *Besserwissera*?
- **Twierdzenie Tarskiego.**
  Czy *dictum*: ***Doctrina multiplex, veritas una!*** jest mrzonką?

# Kurt Gödel

Kurt Gödel

Logik i Fizyk

Logik rozwiązał równania Fizyka, otrzymując Rotacyjny Model Wszechświata, w którym możliwe są podróże w czasie. Z rozwiązania tego korzystano też w UAM (Zarządzenie Rektora nr 72/2006/2007 z 15 III 2007).

# Jak wysoko zajdziemy?

# Modalna interpretacja dowodliwości

Logika dowodliwości (logika Gödla-Löba) *GL* jest systemem modalnym o aksjomatach:

1. $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$
2. $\Box(\Box\varphi \to \varphi) \to \Box\varphi$

Regułami są: *modus ponens* oraz *reguła Gödla* (jeśli tezą jest $\varphi$, to tezą jest $\Box\varphi$). Formuła $\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$ jest tezą systemu *GL*.

(Sgerberg, de Jongh, Kripke). *GL* jest pełna względem klasy modeli przechodnich i odwrotnie ufundowanych. Jest rozstrzygalna.
(Solovay). $GL \vdash \varphi$ dokładnie wtedy, gdy w PA (*arytmetyce Peana*) dowodliwy jest przekład $\varphi$.
Przekładem $\bot$ jest formuła $0 = 1$, przekładem $\Box\varphi$ jest formuła $Bew(\ulcorner\varphi\urcorner)$, gdzie *Bew* jest arytmetyczną reprezentacją *relacji dowodliwości* w PA, a $\ulcorner\varphi\urcorner$ *numerem Gödlowskim* $\varphi$ (omówimy te pojęcia w styczniu).

# Aby cieszyć się wędrówką po Szczytach Metalogiki. . .

. . . najpierw musimy ominąć przepaście.

# Systemy przekonań

**Notacja.** Operatory doksastyczne i epistemiczne to np.:

- $\boldsymbol{B}$ — zdanie $\boldsymbol{B}p$ czytamy: *(rozważany podmiot) wierzy, że p*;
- $\boldsymbol{K}$ — zdanie $\boldsymbol{K}p$ czytamy *(rozważany podmiot) wie, że p*.

(gdzie $p$ jest dowolnym zdaniem języka rozważanej logiki epistemicznej). Zwykle zakłada się, że $\boldsymbol{K}p \equiv (p \wedge \boldsymbol{B}p)$.

Systemy epistemiczne są interesujące same przez się — w opisie systemów przekonań, w szczególności: racjonalnych świadomych przekonań. Niektóre z nich mają także interesującą i ważną interpretację metalogiczną: $\boldsymbol{B}p$ można interpretować jako ***zdanie*** $p$ ***jest dowodliwe w arytmetyce PA***.

**Uwaga.** Angielski termin reasoner oddaję przez polski neologizm myślak.

# Systemy przekonań

Przypuśćmy, że jesteś racjonalną, samoświadomą Istotą. Jak to przypuszczenie przełożyć na język logiki epistemicznej? Oto propozycja. Nazwiemy **szczęściarzem epistemicznym** każdą osobę $S$, której system przekonań spełnia warunki:

- (1a) $S$ wierzy we wszystkie tautologie klasycznego rachunku zdań;
- (1b) system przekonań $S$ jest domknięty na regułę *modus ponens*: jeśli $S$ wierzy w $p$ oraz wierzy w $p \to q$, to wierzy także w $q$;
- (2) dla dowolnych $p$ oraz $q$, $S$ wierzy w $(\boldsymbol{B}p \wedge \boldsymbol{B}(p \to q)) \to \boldsymbol{B}q$;
- (3) dla dowolnego $p$, jeśli $S$ wierzy w $p$, to wierzy w $\boldsymbol{B}p$;
- (4) dla dowolnego $p$, $S$ wierzy w $\boldsymbol{B}p \to \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}p$.

**Uwaga:** rozważamy tylko osoby, które albo zawsze mówią prawdę (rycerze, *knights*), albo zawsze mówią fałsz (łotrzy, *knaves*).

# Poziomy samoświadomości

Każdą osobę, która spełnia jedynie warunki (1a) i (1b) nazwiemy prostaczkiem logicznym. Zatem, jeśli $S$ jest prostaczkiem logicznym, to jego/jej system przekonań zawiera klasyczną logikę zdaniową, ale $S$ może być tego nieświadom(a).

Powiemy, że osoba $S$ jest:

- normalna, gdy jeśli wierzy w $p$, to wierzy też w $\boldsymbol{B}p$;
- regularna, gdy jeśli wierzy w $p \to q$, to wierzy też w $\boldsymbol{B}p \to \boldsymbol{B}q$;
- sprzeczna, gdy do jej systemu przekonań należy jakaś para zdań wzajem sprzecznych, lub — co na jedno wychodzi — *fałsz logiczny*, który oznaczamy przez $\perp$.

**Uwaga.** Może bardziej właściwe byłoby mówienie o własnościach systemów przekonań, a nie osób.

# Poziomy samoświadomości

Można udowodnić, że: $(*)$ dowolny szczęściarz epistemiczny $S$ wie, że jeśli uwierzy w jakieś zdanie $p$ oraz w jego negację $\neg p$, to stanie się sprzeczny.

O szczęściarzach epistemicznych można udowodnić wiele innych ciekawych rzeczy. Nie wszystkie z nich będą nam dalej potrzebne. Dodajmy może jedynie, że:

- każdy szczęściarz epistemiczny jest normalny, a nawet wie, że jest normalny;
- każdy szczęściarz epistemiczny jest regularny i o tym także wie;
- wreszcie, każdy szczęściarz epistemiczny jest przekonany o tym, że jest szczęściarzem epistemicznym; a zatem to jego przekonanie jest trafne i, w konsekwencji, każdy szczęściarz epistemiczny wie, że jest szczęściarzem epistemicznym.

# Poziomy samoświadomości

Można rozważać pięć typów myślaków, o wstępujących poziomach samoświadomości:

- Typ 1: prostaczek logiczny.
- Typ 1*: prostaczek logiczny, który, jeśli wierzy w $p \to q$, to wierzy w $(\boldsymbol{B}p \to \boldsymbol{B}q)$.
- Typ 2: prostaczek logiczny, który wierzy we wszystkie zdania postaci $(\boldsymbol{B}p \wedge \boldsymbol{B}(p \to q)) \to \boldsymbol{B}q$.
- Typ 3: myślak typu 2, który, jeśli wierzy w $p$, to wierzy w $\boldsymbol{B}p$.
- Typ 4: szczęściarz epistemiczny, tj. normalny i regularny prostaczek logiczny, który wierzy we wszystkie zdania postaci $\boldsymbol{B}p \to \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}p$, czyli wierzy, że jest normalny.

Uwaga. Terminy: prostaczek logiczny oraz szczęściarz epistemiczny nie występują w *Forever Undecided*; wprowadzamy je na użytek tej prezentacji.

# Poziomy samoświadomości

Z podanych definicji wynika, że (pomijamy rachunkowe dowody):

- Każdy prostaczek logiczny jest myślakiem typu $1^*$.
- Każdy myślak typu $1^*$ jest regularnym prostaczkiem logicznym (i *vice versa*).
- Każdy myślak typu 2 wie, że jest typu $1^*$.
- Myślaki typu 3 to dokładnie normalne myślaki typu 2.
- Dla $1 \leqslant n < 4$: każdy myślak typu $n$ jest też myślakiem typu $n + 1$.
- $1 < n \leqslant 4$: każdy myślak typu $n$ wierzy, że jest myślakiem typu $n - 1$.

Uwaga. Ponieważ każdy szczęściarz epistemiczny wie, że jest szczęściarzem epistemicznym, więc stanowi on zwieńczenie hierarchii samoświadomych myślaków. Inaczej mówiąc, gdybyśmy chcieli zdefiniować myślaka typu 5 jako takiego, który jest typu 4 i wierzy, iż jest typu 4, to otrzymalibyśmy jedynie myślaka typu 4.

# Zapraszam na szczyt

Możemy już rozpocząć wyprawę na kilka Szczytów Metalogiki.

# II Twierdzenie Gödla

Za chwilę dowiesz się czegoś naprawdę frapującego o swoim systemie przekonań. Udowodnimy mianowicie:

**Twierdzenie 1.**
Przypuśćmy, że normalny prostaczek logiczny $S$ wierzy w zdanie postaci $p \equiv \neg \boldsymbol{B} p$. Wtedy:

- (a) Jeśli $S$ kiedykolwiek uwierzy w $p$, to stanie się sprzeczny.
- (b) Jeśli $S$ jest szczęściarzem epistemicznym, to wie, iż jeśli kiedykolwiek uwierzy w $p$, to stanie się sprzeczny — tj. uwierzy w $\boldsymbol{B} p \rightarrow \boldsymbol{B} \perp$.
- (c) Jeśli $S$ jest szczęściarzem epistemicznym i wierzy, że nie może być sprzeczny, to stanie się sprzeczny.

# II Twierdzenie Gödla

**Dowód Twierdzenia 1.**

(a) Przypuśćmy, że $S$ wierzy w $p$.

Będąc normalnym, uwierzy w $\boldsymbol{B}p$.

Nadto, ponieważ wierzy w $p$ oraz wierzy w $p \equiv \neg \boldsymbol{B}p$,
więc musi uwierzyć w $\neg \boldsymbol{B}p$
(bo jest prostaczkiem logicznym).

A więc uwierzy jednocześnie w $\boldsymbol{B}p$ oraz w $\neg \boldsymbol{B}p$,
a stąd stanie się sprzeczny.

# II Twierdzenie Gödla

(b) Przypuśćmy, że $S$ jest szczęściarzem epistemicznym. Ponieważ jest wtedy prostaczkiem logicznym i wierzy w $p \equiv \neg \boldsymbol{B}p$, więc musi także wierzyć w $p \to \neg \boldsymbol{B}p$.

Nadto, $S$ jest regularny, a stąd uwierzy w $\boldsymbol{B}p \to \boldsymbol{B}\neg\boldsymbol{B}p$. Wierzy też w $\boldsymbol{B}p \to \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}p$ (ponieważ wie, że jest normalny).

Zatem $S$ uwierzy w $\boldsymbol{B}p \to (\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}p \wedge \boldsymbol{B}\neg\boldsymbol{B}p)$, które jest logiczną konsekwencją ostatnich dwóch zdań.

Wierzy również w $(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}p \wedge \boldsymbol{B}\neg\boldsymbol{B}p) \to \boldsymbol{B} \perp$ (na mocy $(*)$, ponieważ dla dowolnego zdania $\varphi$, $S$ wierzy w $(\boldsymbol{B}\varphi \wedge \boldsymbol{B}\neg\varphi) \to \boldsymbol{B} \perp$, a więc wierzy w jego szczególny przypadek, gdzie $\varphi$ jest zdaniem $\boldsymbol{B}p$).

Gdy $S$ już uwierzy jednocześnie w $\boldsymbol{B}p \to (\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}p \wedge \boldsymbol{B}\neg\boldsymbol{B}p)$ oraz w $(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}p \wedge \boldsymbol{B}\neg\boldsymbol{B}p) \to \boldsymbol{B} \perp$, będzie musiał uwierzyć w $\boldsymbol{B}p \to \boldsymbol{B} \perp$ (ponieważ jest prostaczkiem logicznym).

# II Twierdzenie Gödla

(c) Ponieważ $S$ wierzy w $\boldsymbol{B}p \rightarrow \boldsymbol{B}\perp$ (jak właśnie udowodniliśmy), więc wierzy także w $\neg\boldsymbol{B}\perp \rightarrow \neg\boldsymbol{B}p$.

Załóżmy teraz, że $S$ wierzy w $\neg\boldsymbol{B}\perp$ (wierzy, że nie może być sprzeczny).

Ponieważ wierzy też w $\neg\boldsymbol{B}\perp \rightarrow \neg\boldsymbol{B}p$ (jak właśnie widzieliśmy), więc uwierzy w $\neg\boldsymbol{B}p$.

A ponieważ wierzy również w $p \equiv \neg\boldsymbol{B}p$, więc uwierzy w $p$, a stąd stanie się sprzeczny, na mocy (a).

# Co właściwie udowodniliśmy?

Wolisz być Prostaczkiem Logicznym czy Szczęściarzem Epistemicznym?

# II Twierdzenie Gödla

Udowodniliśmy przed chwilą nie byle co, bo modalną (epistemiczną) wersję **II Twierdzenia Gödla** (o niedowodliwości niesprzeczności arytmetyki w samej arytmetyce).

Oczywiście był to dowód w postaci wielce uproszczonej — precyzyjny dowód wymagałby, powiedzmy, jednosemestralnego wykładu wstępnego.

W tej prezentacji korzystaliśmy z rozdziału 12 tłumaczenia książki Raymonda Smullyana *Forever Undecided*.

Poddajemy ocenie audytorium, czy ten sposób popularyzacji wiedzy (meta)logicznej można uznać za dydaktycznie przydatny.

# Przykład teologiczny

**Przykład.**
Przypuśćmy, że jesteś studentką teologii i że Twój Ulubiony Profesor teologii mówi do Ciebie:
*Bóg istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy nigdy nie uwierzysz, że Bóg istnieje.*

Jeśli wierzysz profesorowi, to wierzysz w zdanie $g \equiv \neg \boldsymbol{B} g$, gdzie $g$ jest zdaniem stwierdzającym, że Bóg istnieje.
Wtedy, zgodnie z Twierdzeniem 1, nie możesz wierzyć w swoją własną niesprzeczność bez popadnięcia w sprzeczność.

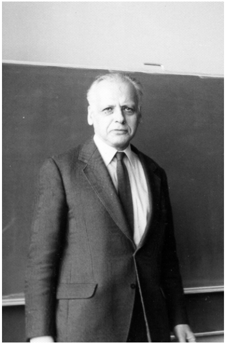
Oczywiście, możesz wierzyć we własną niesprzeczność, bez popadnięcia przy tym w sprzeczność — wystarczy, że przestaniesz ufać Twojemu Ulubionemu Profesorowi.
Coś za coś.

# Navigare necesse est

Schodzimy ze szczytu Gödla. Przed nami pasmo Gór Löba.

# Wishful thinking

Pokażemy teraz, co wystarcza, aby każda z obecnych tu Uroczych Pań została — powiedzmy — **Miss World 2016**. Będzie to przykład samospełniającego się przekonania.



Martin Hugo Löb

W styczniu poznamy Twierdzenie Löba i jego znaczenie dla PA.

# Samospełniające się przekonania

Przypuśćmy, że:

- jesteś szczęściarą epistemiczną;
- osoby, które rozważamy albo zawsze mówią fałsz, albo zawsze mówią prawdę (i Ty wiesz, że tak jest);
- wierzysz swojemu chłopakowi, który prawdziwie (!) mówi:
  (†) *Jeśli uwierzysz, że zostaniesz Miss World 2016, to zostaniesz Miss World 2016.*
- wierzysz też mnie (JP), który mówi:
  (‡) *Jeśli wierzysz, że ja zawsze mówię prawdę, to zostaniesz Miss World 2016.*

**Twierdzenie 2.**
Przy powyższych założeniach *zostaniesz* **Miss World 2016**. Cieszysz się?

# Samospełniające się przekonania

Dla skrótu, przyjmijmy oznaczenia:

- $k$ zastępuje zdanie stwierdzające, iż ja (JP) zawsze mówię prawdę;
- $\mu$ zastępuje zdanie stwierdzające, że zostaniesz Miss World 2016.

Dowód składa się z dwóch części.
**1.** W pierwszej pokazujemy, że nasze założenia implikują $\boldsymbol{B}\mu$. Jest to dowód założeniowy, dostępny dla każdej szczęściary epistemicznej. Mamy udowodnić formułę:

$$(\bigstar) \qquad ((\boldsymbol{B}\mu \to \mu) \wedge (k \equiv (\boldsymbol{B}k \to \mu))) \to \boldsymbol{B}\mu.$$

**Uwaga.** Zdanie $k$ stwierdza, iż JP zawsze mówi prawdę; a więc prawdą jest, że JP wypowiada (‡) dokładnie wtedy, gdy prawdziwe jest $k \equiv (\ddagger)$, czyli dokładnie wtedy, gdy prawdziwe jest $k \equiv (\boldsymbol{B}k \to \mu)$.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $(\boldsymbol{B}\mu \rightarrow \mu) \wedge (k \equiv (\boldsymbol{B}k \rightarrow \mu))$ | założenie |
| 2. | $\boldsymbol{B}\mu \rightarrow \mu$ | OK: 1 |
| 3. | $k \equiv (\boldsymbol{B}k \rightarrow \mu)$ | OK: 1 |
| 4. | $k \rightarrow (\boldsymbol{B}k \rightarrow \mu)$ | OR: 3 |
| 5. | $(\boldsymbol{B}k \rightarrow \mu) \rightarrow k$ | OR: 3 |
| 6.1. | $k$ | założenie dodatkowe |
| 6.2. | $\boldsymbol{B}k \rightarrow \mu$ | MP: 4, 6.1. |
| 6.3. | $\boldsymbol{B}k$ | 6.1. i warunek **(3)** |
| 6.4. | $\mu$ | MP: 6.2., 6.3. |
| 7. | $k \rightarrow \mu$ | 6.1.→6.4. |
| 8. | $\boldsymbol{B}(k \rightarrow \mu)$ | 7 i warunek **(3)** |
| 9. | $\boldsymbol{B}k \rightarrow \boldsymbol{B}\mu$ | 8 i warunki **(1a)** i **(2)** |
| 10. | $\boldsymbol{B}k \rightarrow \mu$ | 2, 9 i warunki **(1b)**, **(1a)** (prawo sylog. hipotet.) |
| 11. | $k$ | MP: 5, 10 |
| 12. | $\boldsymbol{B}k$ | 11 i warunek **(3)** |
| 13. | $\mu$ | MP: 10, 12 |
| 14. | $\boldsymbol{B}\mu$ | 13 i warunek **(3)**. |

# Samospełniające się przekonania

**2.** Ponieważ proroctwo (†) Twojego chłopaka (tj. zdanie $\boldsymbol{B}\mu \rightarrow \mu$) jest z założenia prawdziwe, a powyższy dowód formuły (★) pokazuje, iż nasze założenia implikują $\boldsymbol{B}\mu$, więc na mocy reguły odrywania otrzymujemy $\mu$, czyli tezę.

**Zostaniesz Miss World 2016!!!**
**Cieszysz się???**

**Uwaga.** Powyższy dowód był przykładem dowodu wprost. Aby pokazać, że zostaniesz Miss World 2016 nie musieliśmy odwoływać się do absurdu. Cieszysz się?

# Samospełniające się przekonania

**Ciekawostka prowincjonalna.** 16 maja 2005 roku odbyły się demokratyczne wybory Dyrektora Instytutu Językoznawstwa UAM. Dwa tygodnie wcześniej, na Seminarium Zakładu Logiki Stosowanej UAM, odczyt *Kto będzie Dyrektorem Instytutu Językoznawstwa UAM?* wygłosiła Pani Dr Alice Ann Hunter (*Department of Independent Logic*, **King David University**, Negev Desert).
Korzystając z Twierdzenia Löba, Dr Hunter trafnie przewidziała wynik wyborów. Jak się domyślasz, dowód był podobny do podanego wyżej dowodu, że zostaniesz Miss World 2016.
Tekst odczytu dostępny na stronie:
http://logic.amu.edu.pl/images/4/40/Fel03.pdf
Tekst nie został dopuszczony do druku w *Investigationes Linguisticae*, wydawanym przez Instytut Językoznawstwa UAM.

# Wędrujemy dalej?

Jeśli mamy: czas, siły oraz ochotę, to możemy wrócić w Góry Gödlowskie.

# I Twierdzenie Gödla

Myślak jest nazywany **stabilnym**, jeśli dla każdego zdania $p$, jeśli wierzy on w $\boldsymbol{B}p$, to wierzy też w $p$.

Powiemy, że system przekonań myślaka jest **niezupełny**, jeśli istnieje co najmniej jedno zdanie $p$ takie, że myślak nigdy nie uwierzy w $p$ ani też nigdy nie uwierzy w $\neg p$ (pozostanie na zawsze niezdecydowany, czy $p$ jest prawdziwe, czy fałszywe).

Systemy przekonań, które nie są niezupełne, nazywamy zupełnymi. Osoby, które władają takimi systemami przekonań, są dość uciążliwe w kontaktach społecznych — każda taka osoba jest Besserwisserem, kimś kto na każdy pogląd ma wyrobione zdanie, pozbawiony jest wątpliwości.

# I Twierdzenie Gödla

Normalny prostaczek logiczny przybywa na Wyspę Rycerzy i Łotrów i wierzy w reguły wyspy. Spotyka tubylca, który mówi: *„Nigdy nie uwierzysz, że jestem rycerzem.”* Udowodnimy, że zachodzi wtedy:

**Twierdzenie 3.**
Jeśli myślak jest jednocześnie niesprzeczny i stabilny, to jego system przekonań jest niezupełny. Dokładniej mówiąc, znajdziemy zdanie $p$ takie, że zachodzą następujące dwa warunki:

- (a) Jeśli myślak jest niesprzeczny, to nigdy nie uwierzy w $p$.
- (b) Jeśli myślak jest jednocześnie niesprzeczny i stabilny, to nigdy nie uwierzy w $\neg p$.

# I Twierdzenie Gödla

Zdanie, o które chodzi jest po prostu zdaniem stwierdzającym, że tubylec jest rycerzem. Oznaczmy je przez $k$.
Tubylec wygłosił $\neg \boldsymbol{B}k$, a więc myślak uwierzy w $k \equiv \neg \boldsymbol{B}k$.
(a) Przypuśćmy, że myślak wierzy w $k$. Wtedy, będąc normalnym, uwierzy w $\boldsymbol{B}k$. Uwierzy też w $\neg \boldsymbol{B}k$ (ponieważ wierzy w $k$ oraz wierzy w $k \equiv \neg \boldsymbol{B}k$ i jest prostaczkiem logicznym), a stąd stanie się sprzeczny. Zatem, jeśli jest niesprzeczny, to nigdy nie uwierzy w $k$.
(b) Przypuśćmy, że myślak jest prostaczkiem logicznym i wierzy w $k \equiv \neg \boldsymbol{B}k$, wtedy wierzy też w $\neg k \equiv \boldsymbol{B}k$. Przypuśćmy teraz, że kiedykolwiek uwierzy on w $\neg k$. Wtedy uwierzy w $\boldsymbol{B}k$. Jeśli jest stabilny, to uwierzy w $k$ i stąd stanie się sprzeczny (ponieważ wierzy w $\neg k$). Zatem, jeśli jest jednocześnie stabilny i niesprzeczny, to nigdy nie uwierzy w $\neg k$.
Podsumowując, jeśli jest on jednocześnie stabilny i niesprzeczny, to nigdy nie uwierzy że tubylec jest rycerzem i nigdy nie uwierzy, że tubylec jest łotrem.

# Wędrujemy, dopóki czynny jest horyzont

A na horyzoncie Masyw Tarskiego.

# Twierdzenie Tarskiego

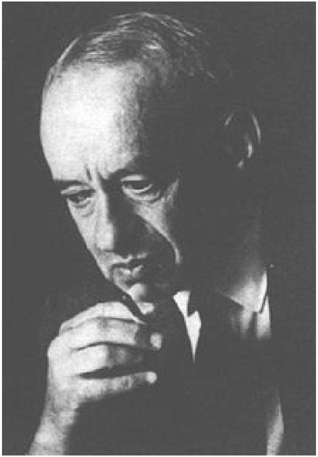
Przypuśćmy, że mamy myślaka — nazwijmy go Paul — który jest zawsze *ścisły* w swoich przekonaniach (nigdy nie wierzy w zdania fałszywe). Nie musi on być prostaczkiem logicznym, ani normalnym, nie jest też konieczne, aby rzeczywiście odwiedzał Wyspę Rycerzy i Łotrów. Wszystko, co musimy o nim wiedzieć to to, że jest ścisły.

Pewnego dnia tubylec z Wyspy Rycerzy i Łotrów mówi o nim:

„Paul nigdy nie uwierzy, że jestem rycerzem."
Wtedy logicznie wynika z tego:

Twierdzenie 4.
System przekonań Paula jest niezupełny.

# Twierdzenie Tarskiego



Alfred Tarski

# Twierdzenie Tarskiego

Jeśli Paul kiedykolwiek uwierzy, że tubylec jest rycerzem, to sfalsyfikuje to tym samym to, co powiedział tubylec, czyniąc tubylca łotrem, a tym samym czyniąc Paula nieścisłym z powodu jego wiary, że tubylec jest rycerzem.

Ale powiedziano nam, że Paul jest ścisły, a więc nigdy nie uwierzy on, że tubylec jest rycerzem.

Stąd, to co powiedział tubylec jest prawdziwe, a więc tubylec rzeczywiście jest rycerzem.

Wtedy, ponieważ Paul jest ścisły, nigdy nie będzie żywił fałszywego przekonania, że tubylec jest łotrem.

A zatem Paul nigdy nie dowie się, czy tubylec jest rycerzem, czy łotrem.

# Czas pożegnać się ze Szczytami Metalogiki

Byliśmy tylko na kilku. A jest ich nieskończenie wiele.

Dawniejsza opozycja filozoficzna wobec logiki modalnej była osadzona w przybliżeniu w trzech różnych (i nieporównywalnych) przekonaniach. Po pierwsze, są tacy, którzy są przekonani, że wszystko, co jest prawdziwe jest koniecznie prawdziwe, a stąd nie ma żadnej różnicy między prawdą a prawdą konieczną. Po drugie, są tacy, którzy wierzą, że nic nie jest koniecznie prawdziwe, a stąd dla dowolnego zdania $p$, zdanie $\boldsymbol{N}p$ ($p$ jest koniecznie prawdziwe) jest po prostu fałszywe! A po trzecie, są i tacy, którzy twierdzą, że słowa „koniecznie prawdziwe" nie niosą jakiegokolwiek sensu. Tak więc, każde z tych nastawień filozoficznych odrzuca logikę modalną ze swoich własnych powodów. W istocie, pewien bardzo znany filozof wsławił się sugestią, że nowoczesna logika modalna została poczęta w grzechu. Na co Boolos bardzo stosownie odpowiedział: „Jeśli nowoczesna logika modalna została poczęta w grzechu, to została wybawiona przez Gödlowskość". [W oryginale: *If modern modal logic was conceived in sin, then it has been redeemed through Gödliness.*]

# Trzeba już schodzić. . .

„Góry i Matematyka uczą pokory.” — Kazimierz Głazek.

# Koniec

Prezentacja nie rości sobie pretensji do kompletności:

- ani jako przedstawienie wszystkich treści *Forever Undecided*,
- ani jako wprowadzenie do logiki dowodliwości.

Staraliśmy się jedynie pokazać próbkę możliwości popularyzacji wiedzy o logice modalnej i jej zastosowaniach.

Zachęcamy do lektury książki!

# Czy wiesz, jak wysoko byłeś?

Dziękuję za uwagę.