Metalogika

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
pogon@amu.edu.pl

Twierdzenia Lindströma

Wstęp

Klasyczne Twierdzenia Lindströma charakteryzują logikę pierwszego rzędu jako maksymalną logikę abstrakcyjną o pewnych własnościach metalogicznych:

- zwartość i własność Löwenheima-Skolema, lub
- rekurencyjna przeliczalność zbioru zdań prawdziwych i własność Löwenheima-Skolema.

- Niniejsza prezentacja opiera się na: Ebbinghaus, H.D., Flum, J., Thomas, W. 1996. *Mathematical logic.* Springer.
- Definicję logiki abstrakcyjnej podano w poprzednim wykładzie.

Własność spójników Boolowskich

Powiemy, że logika $\mathcal{L}$ ma ***własność spójników Boolowskich***, gdy:

- Dla każdej σ oraz $\varphi \in L(\sigma)$ istnieje $\chi \in L(\sigma)$ taka, że dla każdej $\mathfrak{A} \in Str_\sigma$:
  $\mathfrak{A} \models^{\mathcal{L}} \chi$ wtedy i tylko wtedy, gdy nie zachodzi $\mathfrak{A} \models^{\mathcal{L}} \varphi$.
- Dla każdej σ oraz każdych $\varphi, \psi \in L(\sigma)$ istnieje $\chi \in L(\sigma)$ taka, że dla każdej $\mathfrak{A} \in Str_\sigma$:
  $\mathfrak{A} \models^{\mathcal{L}} \chi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{A} \models^{\mathcal{L}} \varphi$ lub $\mathfrak{A} \models^{\mathcal{L}} \psi$.

Jeśli $\mathcal{L}$ ma własność spójników Boolowskich, to będziemy używać oznaczeń, odpowiednio, $\neg\varphi$ oraz $\varphi \vee \psi$ dla formuły χ, o której mowa powyżej. W podobny sposób określamy też pozostałe spójniki Boolowskie logiki $\mathcal{L}$. Jest to oczywiście uproszczenie notacyjne: dla pełnej poprawności trzeba byłoby używać np. symboli $\neg^{\mathcal{L}}$, $\vee^{\mathcal{L}}$, itd.

Własność relatywizacji

Powiemy, że logika $\mathcal{L}$ ma ***własność relatywizacji***, gdy dla każdej σ oraz $\varphi \in L(\sigma)$ oraz każdego jednoargumentowego predykatu U istnieje $\psi \in L(\sigma \cup \{U\})$ takie, że: $(\mathfrak{A}, U^A) \models^{\mathcal{L}} \psi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $[U^A]^{\mathfrak{A}} \models^{\mathcal{L}} \varphi$, dla wszystkich $\mathfrak{A} \in Str_\sigma$ oraz wszystkich σ-domkniętych podzbiorów $U^A \subseteq A = dom(\mathfrak{A})$.

Tutaj $[U^A]^{\mathfrak{A}}$ jest podstrukturą $\mathfrak{A}$ o uniwersum U^A, gdzie U^A jest interpretacją U w $\mathfrak{A}$.

Jeśli $\mathcal{L}$ ma własność relatywizacji, to niech φ^U oznacza formułę ψ, o której mowa w powyższej definicji.

Przypomnienie z KRP

Przypomnijmy, że dla dowolnej σ, dowolnego zbioru zdań Φ z $\mathcal{L}_{\omega\omega}$ oraz symboli: n-argumentowego predykatu P, n-argumentowego symbolu funkcyjnego F oraz stałej indywidualnej c takich, że $P \notin \sigma$, $F \notin \sigma$ oraz $c \notin \sigma$ mówimy, że:

- formuła $\forall v_0 \ldots \forall v_{n-1}(P(v_0, \ldots, v_{n-1}) \equiv \varphi(v_0, \ldots, v_{n-1}))$ jest σ-definicją P w Φ;
- formuła $\forall v_0 \ldots \forall v_{n-1} \forall v_n(F(v_0, \ldots, v_{n-1}) = v_n \equiv \varphi(v_0, \ldots, v_{n-1}, v_n))$ jest σ-definicją F w Φ, gdy $\Phi \models \exists! v_n \varphi(v_0, \ldots, v_{n-1}, v_n)$;
- formuła $\forall v_0(c = v_0 \equiv \varphi(v_0))$ jest σ-definicją c w Φ, gdy $\Phi \models \exists! v_0 \varphi(v_0)$.

Przypomnienie z KRP

Jeśli Δ jest zbiorem σ-definicji dla predykatów $P \in \tau - \sigma$, symboli funkcyjnych $F \in \tau - \sigma$ oraz stałych indywidualnych $c \in \tau - \sigma$, to dla każdej $\mathfrak{A} \in Str_\sigma$ takiej, że $\mathfrak{A} \models \Phi$ istnieje dokładnie jedna struktura $\mathfrak{A}^\Delta \in Str_{\tau-\sigma}$ taka, że $\mathfrak{A}^\Delta \upharpoonright \sigma = \mathfrak{A}$ oraz $\mathfrak{A}^\Delta \models \Delta$.
Rozważamy teraz sygnatury σ^Δ takie, że $\sigma \subseteq \sigma^\Delta$ oraz Δ jest zbiorem σ-definicji symboli z $\sigma^\Delta - \sigma$.

Niech Φ będzie zbiorem zdań sygnatury σ. Wtedy każdej formule ψ o n zmiennych wolnych można przyporządkować formułę ψ^Δ taką, że:

- Jeśli $\mathfrak{A} \in Str_\sigma$, $\mathfrak{A} \models \Phi$ oraz $a_0, \ldots, a_{n-1} \in dom(\mathfrak{A})$, to: $\mathfrak{A}^\Delta \models \psi[a_0, \ldots, a_{n-1}]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{A} \models \psi^\Delta[a_0, \ldots, a_{n-1}]$.
- $\Phi \cup \Delta \models \psi \equiv \psi^\Delta$.

W konsekwencji, jeśli $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, to $\mathfrak{A}^\Delta \equiv \mathfrak{B}^\Delta$.

Przypomnienie z KRP

Możemy więc rozważać tylko sygnatury czysto relacyjne: możemy każdy n-argumentowy symbol funkcyjny f zamienić na $n+1$-argumentowy symbol relacyjny (predykat) F oraz każdą stałą indywidualną c zastąpić jednoargumentowym predykatem C. Niech σ^r oznacza sygnaturę w ten sposób utworzoną z sygnatury σ. Każdej strukturze $\mathfrak{A} \in Str_\sigma$ przyporządkowujemy wtedy strukturę $\mathfrak{A}^r$ określoną w sposób następujący:

- $A^r = dom(\mathfrak{A}^r) = A = dom(\mathfrak{A})$;
- dla predykatów $P \in \sigma$ niech: interpretacja P w $\mathfrak{A}^r$ będzie identyczna z interpretacją P w $\mathfrak{A}$;
- dla n-argumentowego symbolu funkcyjnego $f \in \sigma$ niech $F^{\mathfrak{A}^r}$ będzie wykresem funkcji $f^{\mathfrak{A}}$, czyli $F^{\mathfrak{A}^r}(a_0, \ldots, a_{n-1}, a_n)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f^{\mathfrak{A}}(a_0, \ldots, a_{n-1}) = a_n$;
- dla stałej indywidualnej $c \in \sigma$, niech $C^{\mathfrak{A}^r}(a)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $c^{\mathfrak{A}} = a$.

Przypomnienie z KRP

Dla każdej formuły ψ o n zmiennych wolnych w języku o sygnaturze σ istnieje wtedy formuła ψ^r w języku o sygnaturze σ^r taka, że dla wszystkich $\mathfrak{A}$ oraz wszystkich $a_0, \ldots, a_{n-1} \in dom(\mathfrak{A})$: $\mathfrak{A} \models \psi[a_0, \ldots, a_{n-1}]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{A}^r \models \psi^r[a_0, \ldots, a_{n-1}]$.

W konsekwencji, dla dowolnych $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in Str_\sigma$: $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{A}^r \equiv \mathfrak{B}^r$.

Te wiadomości wystarczają do sformułowania następnej własności logik abstrakcyjnych.

Logiki regularne

Powiemy, że logika $\mathcal{L}$ ***dopuszcza zastąpienie symboli funkcyjnych oraz stałych indywidualnych poprzez symbole relacyjne***, gdy dla dowolnej sygnatury σ:

- dla każdego $\varphi \in L(\sigma)$ istnieje $\psi \in L(\sigma^r)$ takie, że dla wszystkich $\mathfrak{A} \in Str_\sigma$: $\mathfrak{A} \models_\mathcal{L} \varphi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{A}^r \models_\mathcal{L} \psi$.

Jeśli logika $\mathcal{L}$ ma powyższą własność, to zdanie ψ istniejące na mocy powyższej definicji będziemy oznaczać przez φ^r.

Powiemy, że logika $\mathcal{L}$ jest ***regularna***, gdy:

- $\mathcal{L}$ ma własność spójników Boolowskich;
- $\mathcal{L}$ ma własność relatywizacji;
- $\mathcal{L}$ dopuszcza zastąpienie symboli funkcyjnych oraz stałych indywidualnych poprzez symbole relacyjne.

Kilka pojęć semantycznych

Następujące pojęcia przenosimy z KRP na wypadek logik abstrakcyjnych:

- zdanie $\varphi \in L(\sigma)$ nazywamy ***spełnialnym*** w logice $\mathcal{L}$, gdy $Mod^{\sigma}_{\mathcal{L}} \neq \emptyset$;
- zbiór $\Phi \subseteq L(\sigma)$ nazywamy ***spełnialnym*** w logice $\mathcal{L}$, gdy $\bigcap\limits_{\varphi \in \Phi} Mod^{\sigma}_{\mathcal{L}} \neq \emptyset$;
- zdanie $\varphi \in L(\sigma)$ nazywamy ***prawdziwym*** w logice $\mathcal{L}$, gdy $Mod^{\sigma}_{\mathcal{L}} = Str_{\sigma}$;
- piszemy $\Phi \models^{\mathcal{L}} \varphi$, gdy każdy $\mathcal{L}$-model wszystkich zdań z Φ jest także $\mathcal{L}$-modelem φ (czyli gdy $Mod(\Phi) = \bigcap\{Mod(\psi) : \psi \in \Phi\} \subseteq Mod(\varphi)$);
- $Th^{\mathcal{L}}_{\sigma}(\mathfrak{A}) = \{\varphi \in L(\sigma) : \mathfrak{A} \models^{\mathcal{L}} \varphi\}$, dla $\mathfrak{A} \in Str_{\sigma}$; opuszczamy indeksy, gdy nie powoduje to nieporozumień.

Kilka pojęć semantycznych

Niech $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in Str_\sigma$. Powiemy, że $\mathfrak{A}$ jest ***$\mathcal{L}$-równoważna*** z $\mathfrak{B}$, gdy dla każdego σ-zdania ψ z $\mathcal{L}$: $\mathfrak{A} \models^{\mathcal{L}} \psi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{B} \models^{\mathcal{L}} \psi$.

Jeśli $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ są $\mathcal{L}$-równoważne, to piszemy $\mathfrak{A} \equiv_{\mathcal{L}} \mathfrak{B}$.

Relacja elementarnej równoważności pokrywa się z relacją $\mathcal{L}_{\omega\omega}$-równoważności i będzie, jak dotychczas oznaczana przez $\equiv$.

Zwartość i własność Löwenheima-Skolema

Mówimy, że logika $\mathcal{L}$ ma własność:

- ***Löwenheima-Skolema***, gdy każde zdanie $\mathcal{L}$-spełnialne ma model przeliczalny.
- ***zwartości***, gdy dla dowolnego $\Phi \subseteq L(\sigma)$, jeśli każdy skończony podzbiór zbioru Φ jest $\mathcal{L}$-spełnialny, to Φ jest $\mathcal{L}$-spełnialny.

Częściowe izomorfizmy

Niech $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in Str_\sigma$. Mówimy, że f jest ***częściowym izomorfizmem*** $\mathfrak{A}$ w $\mathfrak{B}$, gdy:

- f jest injekcją o dziedzinie $dom(f)$ zawartej w $dom(\mathfrak{A})$ oraz zbiorze wartości $rng(f)$ zawartym w $dom(\mathfrak{B})$
- dla dowolnego n-argumentowego predykatu $P \in \sigma$ oraz dowolnych elementów $a_0, \ldots, a_{n-1} \in dom(f)$: $P^{\mathfrak{A}}(a_0, \ldots, a_{n-1})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $P^{\mathfrak{B}}(f(a_0), \ldots, f(a_{n-1}))$;
- dla dowolnego n-argumentowego symbolu funkcyjnego $F \in \sigma$ oraz dowolnych $a_0, \ldots, a_{n-1} \in dom(f)$: $F^{\mathfrak{A}}(a_0, \ldots, a_{n-1}) = a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $F^{\mathfrak{B}}(f(a_0), \ldots, f(a_{n-1})) = f(a)$;
- dla dowolnej stałej indywidualnej $c \in \sigma$ oraz $a \in dom(f)$: $c^{\mathfrak{A}} = a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $c^{\mathfrak{B}} = f(a)$.

Częściowe izomorfizmy

Przez $Part(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ będziemy oznaczać rodzinę wszystkich częściowych izomorfizmów z $\mathfrak{A}$ w $\mathfrak{B}$.
Gdy σ jest czysto relacyjna oraz $a_0, \ldots, a_{n-1} \in dom(\mathfrak{A})$, $b_0, \ldots, b_{n-1} \in dom(\mathfrak{B})$, oraz $f \in Part(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ jest taki, że $f(a_i) = b_i$ dla wszystkich $i < n$, to dla każdej formuły *atomowej* ψ o n zmiennych wolnych zachodzi: $\mathfrak{A} \models \psi[a_0, \ldots, a_{n-1}]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{B} \models \psi[b_0, \ldots, b_{n-1}]$.
Pojedyncze częściowe izomorfizmy nie zachowują jednak (w powyższym sensie) *dowolnych* formuł. Jak się okaże, dopiero pewne *rodziny* częściowych izomorfizmów pozwalają o takim zachowywaniu dowolnych formuł przesądzać, a tym samym rodziny takie pozwalają scharakteryzować elementarną równoważność struktur relacyjnych.
Będziemy identyfikować odwzorowania z ich (teorio-mnogościowymi) wykresami, czyli odwzorowanie f identyfikujemy z wykresem $\{(x, f(x)) : x \in dom(f)\}$.

Częściowe izomorfizmy

Powiemy, że $\mathfrak{A}$ oraz $\mathfrak{B}$ są ***skończenie izomorficzne***, gdy istnieje ciąg $(I_n)_{n\in\omega}$ o następujących własnościach:

- Każdy I_n jest niepustym zbiorem częściowych izomorfizmów z $\mathfrak{A}$ w $\mathfrak{B}$.
- Jeśli $f \in I_{n+1}$ oraz $a \in dom(\mathfrak{A})$, to istnieje $g \in I_n$ taki, że $f \subseteq g$ oraz $a \in dom(g)$.
- Jeśli $f \in I_{n+1}$ oraz $b \in dom(\mathfrak{B})$, to istnieje $g \in I_n$ taki, że $f \subseteq g$ oraz $b \in rng(g)$.

Jeśli rodzina $(I_n)_{n\in\omega}$ ma powyższe własności, to piszemy: $(I_n)_{n\in\omega} : \mathfrak{A} \cong_e \mathfrak{B}$. Jeśli $\mathfrak{A}$ oraz $\mathfrak{B}$ są skończenie izomorficzne, to piszemy $\mathfrak{A} \cong_e \mathfrak{B}$.

Częściowe izomorfizmy

Powiemy, że $\mathfrak{A}$ oraz $\mathfrak{B}$ są ***częściowo izomorficzne***, gdy istnieje zbiór I taki, że:

- I jest niepustym zbiorem częściowych izomorfizmów z $\mathfrak{A}$ w $\mathfrak{B}$.
- Jeśli $f \in I$ oraz $a \in dom(\mathfrak{A})$, to istnieje $g \in I$ taki, że $f \subseteq g$ oraz $a \in dom(g)$.
- Jeśli $f \in I$ oraz $b \in dom(\mathfrak{A})$, to istnieje $g \in I$ taki, że $f \subseteq g$ oraz $b \in rng(g)$.

Jeśli rodzina I ma powyższe własności, to piszemy: $I : \mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$. Jeśli $\mathfrak{A}$ oraz $\mathfrak{B}$ są skończenie izomorficzne, to piszemy $\mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$.

Częściowe izomorfizmy

Zachodzą następujące fakty:

- Jeśli $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, to $\mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$.
- Jeśli $\mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$, to $\mathfrak{A} \cong_e \mathfrak{B}$.
- Jeśli $\mathfrak{A} \cong_e \mathfrak{B}$ oraz $\mathfrak{A}$ jest skończona, to $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.
- Jeśli $\mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$ oraz $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ są co najwyżej przeliczalne, to $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.

Algebraiczną charakterystykę elementarnej równoważności podaje **Twierdzenie Fraïssé'go**:

- *Dla dowolnej skończonej σ oraz $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in Str_\sigma$: $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{A} \cong_e \mathfrak{B}$.*

Częściowe izomorfizmy

Przypomnijmy pojęcie ***kwantyfikatorowego rzędu formuły***:

- $qr(\varphi) = 0$, gdy φ jest atomowa;
- $qr(\neg\varphi) = qr(\varphi)$
- $qr(\varphi \vee \psi) = \max\{qr(\varphi), qr(\psi)\}$ (podobnie dla innych funktorów dwuargumentowych);
- $qr(\exists x\varphi) = qr(\varphi) + 1$.

Częściowe izomorfizmy

Powiemy, że struktury $\mathfrak{A}$ oraz $\mathfrak{B}$ są ***m-izomorficzne***, gdy istnieje ciąg $I_0, \ldots, I_m$ niepustych zbiorów częściowych izomorfizmów z $\mathfrak{A}$ w $\mathfrak{B}$ taki, że:

- Jeśli $n + 1 \leqslant m$, $f \in I_{n+1}$ oraz $a \in dom(\mathfrak{A})$, to istnieje $g \in I_n$ taki, że $f \subseteq g$ oraz $a \in dom(g)$.
- Jeśli $n + 1 \leqslant m$, $f \in I_{n+1}$ oraz $b \in dom(\mathfrak{B})$, to istnieje $g \in I_n$ taki, że $f \subseteq g$ oraz $b \in rng(g)$.

Jeśli $I_0, \ldots, I_m$ jest ciągiem o powyższych własnościach, to piszemy $(I_n)_{n \leqslant m} : \mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$. Jeśli $\mathfrak{A}$ oraz $\mathfrak{B}$ są m-izomorficzne, to piszemy $\mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$.

W dowodzie twierdzenia Fraïssé'go wykorzystujemy następujące fakty:

- Niech $(I_n)_{n\in\omega} : \mathfrak{A} \cong_e \mathfrak{B}$. Wtedy dla każdej formuły φ o k zmiennych wolnych: jeśli $qr(\varphi) \leqslant n$, $f \in I_n$ oraz $a_0, \ldots a_{k-1} \in dom(f)$, to:

  $\mathfrak{A} \models \varphi[a_0, \ldots a_{k-1}]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{B} \models \varphi[f(a_0), \ldots f(a_{k-1})]$.
- Jeśli $\mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$, to $\mathfrak{A}$ oraz $\mathfrak{B}$ spełniają te same zdania o rzędzie kwantyfikatorowym $\leqslant m$.
- Dla każdych n i r istnieje tylko skończenie wiele klas równoważności względem relacji równoważności logicznej w zbiorze wszystkich formuł o r zmiennych wolnych i o rzędzie kwantyfikatorowym $\leqslant n$.
- Jeśli $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, to $\mathfrak{A} \cong_e \mathfrak{B}$.
- Jeśli $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ spełniają te same zdania o rzędzie kwantyfikatorowym $\leqslant m$, to $\mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$.
- Niech σ będzie skończona i czysto relacyjna. Wtedy dla każdych struktur $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in Str_\sigma$ następujące warunki są równoważne:
  1. $\mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$
  2. $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ spełniają te same zdania o rzędzie kwantyfikatorowym $\leqslant m$.

I Twierdzenie Lindströma

Rozważamy logiki regularne $\mathcal{L}$ takie, że $\mathcal{L}_{\omega\omega} \leqslant \mathcal{L}$.

Jeśli φ jest zdaniem $\mathcal{L}_{\omega\omega}$ sygnatury σ, to przez φ^* będziemy oznaczać zdanie z $\mathcal{L}$ o tych samych modelach, co φ, czyli takie, że:

$$Mod^{\sigma}_{\mathcal{L}_{\omega\omega}} = Mod^{\sigma}_{\mathcal{L}}(\varphi^*).$$

Dla zbioru Φ zdań języka $\mathcal{L}_{\omega\omega}$ (ustalonej sygnatury σ) niech:

$$\Phi^* = \{\varphi^* : \varphi \in \Phi\}.$$

I Twierdzenie Lindströma

I Twierdzenie Lindströma.

Niech $\mathcal{L}$ będzie regularna i $\mathcal{L}_{\omega\omega} \leqslant \mathcal{L}$. Jeśli $\mathcal{L}$ jest zwarta i ma własność Löwenheima-Skolema, to $\mathcal{L} \sim \mathcal{L}_{\omega\omega}$.

Dowód twierdzenia Lindströma nie jest całkiem prosty — wygodnie jest najpierw udowodnić trzy lematy, a następnie wywieść z nich samo twierdzenie.

Lematy: 1, 2, 3

Lemat 1. Jeśli $\mathcal{L}$ jest zwarta oraz $\Phi \cup \{\varphi\}$ jest zbiorem zdań logiki $\mathcal{L}$ sygnatury σ takim, że $\Phi \models^{\mathcal{L}} \varphi$, to istnieje skończony zbiór $\Phi_0 \subseteq \Phi$ taki, że $\Phi_0 \models^{\mathcal{L}} \varphi$.

Lemat 2. Niech $\mathcal{L}$ będzie zwarta oraz $\psi \in L(\sigma)$. Wtedy istnieje skończony zbiór $\sigma_0 \subseteq \sigma$ taki, że dla wszystkich $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in Str_\sigma$: jeśli $\mathfrak{A} \upharpoonright \sigma_0 \cong \mathfrak{B} \upharpoonright \sigma_0$, to $\mathfrak{A} \models^{\mathcal{L}} \psi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{B} \models^{\mathcal{L}} \psi$.

Lemat 3. Niech $\mathcal{L}$ będzie zwarta. Jeśli każde dwie elementarnie równoważne struktury są także $\mathcal{L}$-równoważne, to $\mathcal{L} \sim \mathcal{L}_{\omega\omega}$.

Dowód Lematu 1

Niech $\mathcal{L}$ będzie zwarta. Ponieważ $\mathcal{L}$ ma własność spójników Boolowskich, istnieje formuła $\neg\varphi$. Dokładniej, powinniśmy pisać np.: $\neg_{\mathcal{L}}\varphi$, ale ponieważ istotne dalej będą jedynie własności semantyczne logiki, upraszczamy ten pedantyczny zapis.

Skoro $\Phi \models^{\mathcal{L}} \varphi$, to zbiór $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ nie jest spełnialny. Na mocy zwartości $\mathcal{L}$, istnieje skończony podzbiór $\Phi_0 \subseteq$ taki, że $\Phi_0 \cup \{\neg\varphi\}$ nie jest spełnialny. Wtedy jednak $\Phi_0 \models^{\mathcal{L}} \varphi$, co kończy dowód lematu 1.

Dowód Lematu 2

Ograniczymy się do przypadku, gdy σ jest czysto relacyjna (tylko taki przypadek będzie nam później potrzebny). Wybierzmy nowe symbole jednoargumentowe (predykaty): U, V oraz jednoargumentowy symbol funkcyjny f. Zbudujemy zbiór Φ zdań w sygnaturze $\sigma \cup \{U, V, f\}$, „mówiących", że f jest izomorfizmem podstruktury generowanej przez U w podstrukturę generowaną przez V. Elementami Φ są:

- $\exists x\ U(x)$, $\quad \exists x\ V(x)$
- $\forall x\ (U(x) \to V(f(x)))$, $\quad \forall y\ (V(y) \to \exists x\ (U(x) \wedge f(x) = y))$
- $\forall x \forall y\ ((U(x) \wedge V(y) \wedge f(x) = f(y)) \to x = y)$
- $\forall x_1 \ldots \forall x_n\ ((U(x_1) \wedge \ldots \wedge U(x_n)) \to (R(x_1, \ldots, x_n) \equiv R(f(x_1), \ldots, f(x_n)))$

(ostatni z warunków zapisujemy dla każdego n-argumentowego predykatu $R \in \sigma$; symbol $=$ jest tu predykatem identyczności).

Dowód Lematu 2

Wtedy zachodzi:

(1) $\Phi^* \models^{\mathcal{L}} (\psi^U \equiv \psi^V)$.

Udowodnimy (1). Jeśli $\mathfrak{A} \in Str_\sigma$ jest taka, że $(\mathfrak{A}, U^A, V^A, f^A) \models^{\mathcal{L}} \Phi^*$ (czyli $(\mathfrak{A}, U^A, V^A, f^A) \models \Phi$), to: U^A oraz V^A są niepuste, a $f^A \upharpoonright U^A$ jest izomorfizmem $[U^A]^{\mathfrak{A}}$ na $[V^A]^{\mathfrak{A}}$. Przypominamy, że stosujemy następujące konwencje notacyjne:

- A oznacza $dom(\mathfrak{A})$
- U^A oznacza interpretację predykatu U w A
- $[U^A]^{\mathfrak{A}}$ oznacza podstrukturę struktury $\mathfrak{A}$, której uniwersum jest zbiór U^A i której relacje otrzymujemy z relacji w $\mathfrak{A}$, ograniczając je do U^A.

Dowód Lematu 2

Na mocy własności izomorfizmu (zobacz: definicja logik abstrakcyjnych) mamy: $[U^A]^{\mathfrak{A}} \models^{\mathcal{L}} \psi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $[V^A]^{\mathfrak{A}} \models^{\mathcal{L}} \psi$.

Ponieważ $\mathcal{L}$ ma własność relatywizacji (zobacz: definicja logik regularnych), więc: $(\mathfrak{A}, U^A) \models^{\mathcal{L}} \psi^U$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(\mathfrak{A}, V^A) \models^{\mathcal{L}} \psi^V$.

Ponieważ $\mathcal{L}$ ma własność spójników Boolowskich (zobacz: definicja logik regularnych) oraz własność reduktów (zobacz: definicja logik abstrakcyjnych), więc: $(\mathfrak{A}, U^A, V^A, f^A) \models^{\mathcal{L}} \psi^U \equiv \psi^V$. To kończy dowód warunku (1).

Dowód Lematu 2

Na mocy zwartości $\mathcal{L}$ otrzymujemy skończony zbiór $\Phi_0 \subseteq \Phi$ taki, że:

(2) $\Phi_0^* \models^{\mathcal{L}} (\psi^U \equiv \psi^V)$.

Ponieważ Φ składa się ze zdań pierwszego rzędu, możemy wybrać skończony zbiór $\sigma_0 \subseteq \sigma$ taki, że Φ_0 składa się z σ_0-zdań (czyli zdań z języka o sygnaturze σ_0). Pokażemy, że σ_0 spełnia tezę lematu 2.

Niech $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in Str_\sigma$ i niech $\pi : \mathfrak{A} \restriction \sigma_0 \cong \mathfrak{B} \restriction \sigma_0$. Możemy założyć, że dziedziny tych struktur, czyli A i B są rozłączne: $A \cap B = \emptyset$. Gdyby tak nie było, to wzięlibyśmy izomorficzną kopię $\mathfrak{B}$ o uniwersum rozłącznym zA, korzystając z własności izomorfizmu (zobacz: definicja logik abstrakcyjnych).

Dowód Lematu 2

Zdefiniujemy strukturę $(\mathfrak{C}, U^C, V^C, f^C) \in Str_{\sigma \cup \{U,V,f\}}$. Uniwersum tej struktury to $C = A \cup B$. Jej relacje (i jedną funkcję) definiujemy następująco:

- $R^C = R^A \cup R^B$ dla $R \in \sigma$ [uwaga: σ jest czysto relacyjna]
- $U^C = A$
- $V^C = B$
- f^C definiujemy tak, aby $f^C \restriction U^C = \pi$.

Dowód Lematu 2

Wtedy $(\mathfrak{C}, U^C, V^C, f^C)$ jest modelem Φ_0, a więc mamy także:

$$(\mathfrak{C}, U^C, V^C, f^C) \models^{\mathcal{L}} \Phi_0^*.$$

Na mocy (2) dostajemy: $(\mathfrak{C}, U^C, V^C, f^C) \models^{\mathcal{L}} (\psi^U \equiv \psi^V)$.

Ponieważ $[U^C]^{\mathfrak{C}} = \mathfrak{A}$ oraz $[V^C]^{\mathfrak{C}} = \mathfrak{B}$, więc (skoro $\mathcal{L}$ ma własność spójników Boolowskich oraz relatywizacji): $\mathfrak{A} \models^{\mathcal{L}} \psi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{B} \models^{\mathcal{L}} \psi$. To kończy dowód lematu 2.

Dowód Lematu 3

Ponieważ $\mathcal{L}_{\omega\omega} \leqslant \mathcal{L}$ (co zakładaliśmy na początku rozważań w całym tym punkcie), więc musimy pokazać, że $\mathcal{L} \leqslant \mathcal{L}_{\omega\omega}$, czyli że dla każdego σ oraz każdego zdania $\psi \in L(\sigma)$ istnieje σ-zdanie pierwszego rzędu φ takie, że $Mod_{\mathcal{L}_{\omega\omega}}(\varphi) = Mod_{\mathcal{L}}(\psi)$.
Niech ψ będzie zdaniem spełnialnym. W przeciwnym przypadku możemy wziąć za φ np. zdanie $\forall x\ \neg x = x$ i teza lematu będzie trywialnie spełniona.
Twierdzimy, że:

(1) Dla każdej $\mathfrak{A} \in Mod_{\mathcal{L}}(\psi)$ istnieje σ-zdanie $\varphi_{\mathfrak{A}} \in L(\sigma)$ takie, że $\mathfrak{A} \models \varphi_{\mathfrak{A}}$ oraz $\varphi^{*}_{\mathfrak{A}} \models \psi$.

Dowód Lematu 3

Dowód (1) przeprowadzimy metodą wprost. Niech $\mathfrak{A} \in Mod_{\mathcal{L}}(\psi)$. Wtedy zachodzi: $Th(\mathfrak{A})^* \models^{\mathcal{L}} \psi$. Jest tak, ponieważ jeśli $\mathfrak{B} \models^{\mathcal{L}} Th(\mathfrak{A})^*$, czyli $\mathfrak{B} \models Th(\mathfrak{A})$, to $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$. Z założenia mamy $\mathfrak{A} \equiv_{\mathcal{L}} \mathfrak{B}$, a więc $\mathfrak{B} \models^{\mathcal{L}} \psi$.

Na mocy zwartości $\mathcal{L}$ istnieje liczba r oraz zdania $\varphi_0, \ldots, \varphi_r \in Th(\mathfrak{A})$ takie, że $\{\varphi_0^*, \ldots, \varphi_r^*\} \models^{\mathcal{L}} \psi$. Niech $\varphi_{\mathfrak{A}}$ będzie koniunkcją $\varphi_0 \wedge \ldots \wedge \varphi_r$. Wtedy $\varphi_{\mathfrak{A}} \in Th(\mathfrak{A})$, czyli $\mathfrak{A} \models \varphi_{\mathfrak{A}}$ oraz $\varphi_{\mathfrak{A}}^* \models^{\mathcal{L}} \psi$. To kończy dowód (1).

Na mocy (1) otrzymujemy teraz:

(2) $$Mod_{\mathcal{L}}(\psi) = \bigcup_{\mathfrak{A} \in Mod_{\mathcal{L}}(\psi)} Mod_{\mathcal{L}}(\varphi_{\mathfrak{A}}^*).$$

Dowód Lematu 3

Pokażemy, że istnieją $\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n \in Mod_{\mathcal{L}}(\psi)$ takie, iż:

(3) $\quad Mod_{\mathcal{L}}(\psi) = Mod_{\mathcal{L}}(\varphi^*_{\mathfrak{A}_0}) \cup \ldots \cup Mod_{\mathcal{L}}(\varphi^*_{\mathfrak{A}_n})$.

W przeciwnym przypadku (tj. gdyby (3) miało nie zachodzić), dla każdej skończonej liczby modeli $\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n \in Mod_{\mathcal{L}}(\psi)$ mielibyśmy: $Mod_{\mathcal{L}}(\varphi^*_{\mathfrak{A}_0}) \cup \ldots \cup Mod_{\mathcal{L}}(\varphi^*_{\mathfrak{A}_n}) \subsetneqq Mod_{\mathcal{L}}(\psi)$.

Wtedy każdy skończony podzbiór zbioru $\{\neg\psi\} \cup \{\neg\varphi^*_{\mathfrak{A}} : \mathfrak{A} \in Mod_{\mathcal{L}}(\psi)\}$ byłby spełnialny, a więc na mocy zwartości $\mathcal{L}$ cały ten zbiór byłby spełnialny, co daje sprzeczność z (2).

Na mocy (3) otrzymujemy:

$Mod_{\mathcal{L}}(\psi) = Mod_{\mathcal{L}_{\omega\omega}}(\varphi_{\mathfrak{A}_0}) \cup \ldots \cup Mod_{\mathcal{L}_{\omega\omega}}(\varphi_{\mathfrak{A}_n}) = Mod_{\mathcal{L}_{\omega\omega}}(\varphi_{\mathfrak{A}_0} \vee \ldots \vee \varphi_{\mathfrak{A}_n})$.

Dla φ o postaci $\varphi_{\mathfrak{A}_0} \vee \ldots \vee \varphi_{\mathfrak{A}_n}$ zachodzi zatem $Mod_{\mathcal{L}_{\omega\omega}} = Mod_{\mathcal{L}}(\psi)$. To kończy dowód lematu 3.

Dowód I Twierdzenia Lindströma

Wystarczy pokazać, że $\mathcal{L} \leqslant \mathcal{L}_{\omega\omega}$.

Ponadto, na mocy lematu 3 wystarczy pokazać, że dla wszystkich σ:

($\bigstar$) Dla wszystkich $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in Str_{\sigma}$, jeśli $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, to $\mathfrak{A} \equiv_{\mathcal{L}} \mathfrak{B}$.

Możemy przy tym ograniczyć się do sygnatur relacyjnych σ, z następującego powodu. Jeśli ($\bigstar$) zachodzi dla sygnatur relacyjnych σ, to gdy $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ przechodzimy do σ^r, $\mathfrak{A}^r$ oraz $\mathfrak{B}^r$ i otrzymujemy $\mathfrak{A}^r \equiv \mathfrak{B}^r$. Teraz ($\bigstar$) zachodzi dla sygnatur relacyjnych σ^r i mamy: $\mathfrak{A}^r \equiv_{\mathcal{L}} \mathfrak{B}^r$.

Dowód I Twierdzenia Lindströma

Na mocy własności zamiany symboli funkcyjnych i stałych indywidualnych na predykaty (zobacz: definicja logiki regularnej), dla dowolnego $\psi \in L(\sigma)$ następujące warunki są równoważne:

- $\mathfrak{A} \models^{\mathcal{L}} \psi$
- $\mathfrak{A}^r \models^{\mathcal{L}} \psi^r$
- $\mathfrak{B}^r \models^{\mathcal{L}} \psi^r$ (ponieważ $\mathfrak{A}^r \equiv_{\mathcal{L}} \mathfrak{B}^r$)
- $\mathfrak{B} \models^{\mathcal{L}} \psi$,

a zatem zachodzi $\mathfrak{A} \equiv_{\mathcal{L}} \mathfrak{B}$.

Dowód I Twierdzenia Lindströma

Dowód (★) dla sygnatur relacyjnych σ poprowadzimy nie wprost. Przypuśćmy, że dla pewnych $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in Str_\sigma$ oraz pewnej $\psi \in L(\sigma)$:

(1) $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \models^{\mathcal{L}} \psi$ oraz $\mathfrak{B} \models^{\mathcal{L}} \neg\psi$

(jak pamiętamy, powinniśmy właściwie pisać np. $\neg_{\mathcal{L}}$; korzystamy z tego, że $\mathcal{L}$ ma własność spójników Boolowskich).

Wybieramy ψ spełniającą (1) oraz (na mocy lematu 2) skończoną sygnaturę $\sigma_0 \subseteq \sigma$. Wtedy „znaczenie ψ zależy tylko od skończenie wielu symboli". Skoro $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, to oczywiście także $\mathfrak{A} \upharpoonright \sigma_0 \equiv \mathfrak{B} \upharpoonright \sigma_0$, więc na mocy twierdzenia Fraïssé'go struktury $\mathfrak{A} \upharpoonright \sigma_0$ oraz $\mathfrak{B} \upharpoonright \sigma_0$ są skończenie izomorficzne. Otrzymujemy zatem, dla *odpowiedniego* $(I_n)_{n\in\omega}$:

(2) $(I_n)_{n\in\omega} : \mathfrak{A} \upharpoonright \sigma_0 \cong_e \mathfrak{B} \upharpoonright \sigma_0$, $\quad \mathfrak{A} \models^{\mathcal{L}} \psi$, $\quad \mathfrak{B} \models^{\mathcal{L}} \neg\psi$.

Dowód I Twierdzenia Lindströma

Istota dowodu zasadza się w tym, aby otrzymać teraz (na mocy własności zwartości oraz własności Löwenheima-Skolema) struktury ***przeliczalne*** $\mathfrak{A}'$ oraz $\mathfrak{B}'$ takie, że:

(3) $\quad \mathfrak{A}' \upharpoonright \sigma_0 \cong_p \mathfrak{B}' \upharpoonright \sigma_0$, $\mathfrak{A}' \models^{\mathcal{L}} \psi$, $\mathfrak{B}' \models^{\mathcal{L}} \neg\psi$.

Gdy otrzymamy (3), to twierdzenie będzie udowodnione: ponieważ przeliczalne częściowo izomorficzne struktury $\mathfrak{A}' \upharpoonright \sigma_0$ oraz $\mathfrak{B}' \upharpoonright \sigma_0$ są izomorficzne, a zatem, na mocy wyboru σ_0 mamy: $\mathfrak{A}' \models^{\mathcal{L}} \psi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{B}' \models^{\mathcal{L}} \psi$, a to jest sprzeczność z (3). Trzeba zatem odrzucić przypuszczenie dowodu nie wprost warunku ($\bigstar$) i twierdzenie zachodzi.

Dowód I Twierdzenia Lindströma

Trzeba więc jedynie udowodnić (3). Dowód może sprawiać wrażenie nieco zawiłego. Będziemy, intuicyjnie mówiąc, podawać „opis” warunku (2) w logice $\mathcal{L}$. Możemy założyć, że A i B, czyli dziedziny struktur $\mathfrak{A}$ i, odpowiednio, $\mathfrak{B}$, są rozłączne. Pamiętajmy także, że sygnatura σ jest czysto relacyjna. Tworzymy sygnaturę σ^+ dodając do σ nowe symbole:

- jednoargumentowy symbol funkcyjny f
- jednoargumentowe predykaty P, U, V
- dwuargumentowe predykaty $<, I$
- trójargumentowy predykat G.

Zbudujemy strukturę $\mathfrak{C} \in Str_{\sigma^+}$, której uniwersum C będzie zawierało uniwersa struktur $\mathfrak{A}$ oraz $\mathfrak{B}$, a także (jako elementy) wszystkie częściowe izomorfizmy I_n. W ten sposób $\mathcal{L}$ „opisze” skończoną izomorficzność $(I_n)_{n\in\omega} : \mathfrak{A} \upharpoonright \sigma_0 \cong_e \mathfrak{B} \upharpoonright \sigma_0$.

Dowód I Twierdzenia Lindströma

Niech zatem:

- (a) $C = A \cup B \cup \omega \cup \bigcup\limits_{n \in \omega} I_n$
- (b) $U^C = A$ oraz $[U^C]^{\mathfrak{C} \restriction \sigma_0} = \mathfrak{A}$
- (c) $V^C = B$ oraz $[V^C]^{\mathfrak{C} \restriction \sigma_0} = \mathfrak{B}$
- (d) $<^C$ jest naturalnym porządkiem w ω, a $f^C \restriction \omega$ jest funkcją poprzednika, czyli $f^C(n+1) = n$, a $f^C(0) = 0$
- (e) $P^C = \bigcup\limits_{n \in \omega} I_n$
- (f) $I^C(n, p)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $n \in \omega$ oraz $p \in I_n$
- (g) $G^C(p, a, b)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $P^C(p)$, $a \in dom(p)$ oraz $p(a) = b$.

Dowód I Twierdzenia Lindströma

Teraz zbudujemy koniunkcję χ skończenie wielu poniższych zdań (i)–(viii) z $L(\sigma^+)$, dla której $\mathfrak{C}$ będzie modelem.

- (i) $\forall p\,(P(p) \rightarrow \forall x \forall y\,(G(p,x,y) \rightarrow (U(x) \wedge V(y))))$
- (ii) $\forall p\,(P(p) \rightarrow \forall x \forall y \forall u \forall v\,((G(p,x,y) \wedge G(p,u,v)) \rightarrow (x = u \wedge y = v)))$
- (iii) $\forall p\,(P(p) \rightarrow \forall x_1 \ldots x_n \forall y_1 \ldots y_n\,((G(p,x_1,y_1) \wedge \ldots \wedge G(p,x_n,y_n)) \rightarrow (R(x_1,\ldots,x_n) \equiv R(y_1,\ldots y_n))))$

  dla każdego n-argumentowego predykatu $R \in \sigma_0$
- (iv) aksjomaty częściowego porządku dla $<$ oraz fakt,że pole $<$ jest uporządkowane przez $<$ wraz z funkcją poprzednika f:

  $\forall x\,(\exists y\,(y < x) \rightarrow (f(x) < x \wedge \neg \exists z\,(f(x) < z \wedge z < x)))$
- (v) $\forall x\,(\exists y\,(x < y \vee y < x) \rightarrow \exists p\,(P(p) \wedge I(x,p)))$

  (czyli: jeśli x jest w polu $<$, to $I_x = \{p : P(p) \wedge I(x,p)\} \neq \emptyset$)

Dowód I Twierdzenia Lindströma

- (vi) $\forall x \forall p \forall u\ ((f(x) < x \wedge I(x,p) \wedge U(u)) \rightarrow$
  $\exists q \exists v\ (I(f(x),q) \wedge G(q,u,v) \wedge \forall x' \forall y'\ (G(p,x',y') \rightarrow G(q,x',y'))))$
  (to jest, jak widać, własność rozszerzania częściowych izomorfizmów „w przód")
- (vii) $\forall x \forall p \forall v\ ((f(x) < x \wedge I(x,p) \wedge V(v)) \rightarrow$
  $\exists q \exists u\ (I(f(x),q) \wedge G(q,u,v) \wedge \forall x' \forall y'\ (G(p,x',y') \rightarrow G(q,x',y'))))$
  (to jest, jak widać, własność rozszerzania częściowych izomorfizmów „w tył")
- (viii) $\exists x\ U(x) \wedge \exists y\ V(y) \wedge \psi^U \wedge (\neg\psi)^V$
  (pamiętamy, że $U^C = A$, $V^C = B$ oraz $\mathfrak{A} \models^{\mathcal{L}} \psi$ i $\mathfrak{B} \models^{\mathcal{L}} \neg\psi$).

Uwaga: tu (i wcześniej) używamy predykatu identyczności $=$, którego nie należy mylić z (metajęzykowym) symbolem relacji identyczności $=$.
Na mocy (i)–(iii), G opisuje wykres częściowego izomorfizmu z σ_0-podstruktury generowanej przez U w σ_0-podstrukturę generowaną przez V.

Dowód I Twierdzenia Lindströma

Wybieramy nową stałą indywidualną c. Termy $c, f(c), f(f(c)), \ldots$ będziemy oznaczać $f^0c, f^1c, f^2c, \ldots$. Niech $\Psi = \{\chi\} \cup \{f^{n+1}c < f^nc : n \in \omega\}$.

Każdy skończony podzbiór zbioru Ψ ma model, a mianowicie model $\mathfrak{C}' = (\mathfrak{C}, c^{C'})$, gdzie $c^{C'}$ jest wystarczająco dużą liczbą naturalną. Na mocy zwartości logiki $\mathcal{L}$ istnieje model $(\mathfrak{D}, c^D)$ dla całego zbioru Ψ.

Zbiór D zawiera nieskończony ciąg $<^D$-zstępujący, a mianowicie: $\ldots (f^2c)^D <^D (f^1c)^D <^D c^D$. Potrzebujemy *przeliczalnego* modelu o tej własności. Nie możemy jednak skorzystać bezpośrednio z własności Löwenheima-Skolema, bo dotyczy ona tylko *pojedynczych* zdań, a zbiór Ψ jest *nieskończonym* zbiorem zdań.

Dowód I Twierdzenia Lindströma

Rozszerzamy teraz sygnaturę $\sigma^{+} \cup \{c\}$ o nowy jednoargumentowy predykat Q. Niech ϑ będzie $(\sigma^{+} \cup \{c, Q\})$-zdaniem:

$$Q(c) \wedge \forall x\, (Q(x) \rightarrow (f(x) < x \wedge Q(f(x))))$$

(widać, że Q jest podzbiorem pola $<$: Q zawiera c i każdy element Q ma bezpośredni poprzednik, który także należy do Q).

Niech $Q^{D} = \{(f^{n}c)^{D} : n \in \omega\}$. Wtedy $(\mathfrak{D}, c^{D}, Q^{D}) \models^{\mathcal{L}} \chi \wedge \vartheta$.

Ponieważ $\chi \wedge \vartheta$ jest spełnialna, więc na mocy własności Löwenheima-Skolema istnieje (co najwyżej) przeliczalny model $(\mathfrak{E}, c^{E}, Q^{E})$ dla $\chi \wedge \vartheta$.

Dowód I Twierdzenia Lindströma

Skoro w $\mathfrak{E}$ zachodzi (viii), to $U^E \neq \emptyset$ oraz $V^E \neq \emptyset$. Ponieważ σ jest relacyjna, więc U^E oraz V^E są uniwersami podstruktur. Niech:

- $\mathfrak{A}' = [U^E]^{\mathfrak{E}\restriction\sigma}$
- $\mathfrak{B}' = [V^E]^{\mathfrak{E}\restriction\sigma}$.

Pokażemy, że (co najwyżej) przeliczalne struktury $\mathfrak{A}'$ oraz $\mathfrak{B}'$ spełniają (3). Na mocy (viii) mamy: $\mathfrak{E} \models^{\mathcal{L}} \psi^U$ oraz $\mathfrak{E} \models^{\mathcal{L}} (\neg\psi)^V$, a stąd otrzymujemy (na mocy własności relatywizacji):
(4) $\quad \mathfrak{A}' \models^{\mathcal{L}} \psi, \qquad \mathfrak{B}' \models^{\mathcal{L}} \neg\psi.$

Z warunków (i)–(iii) wiemy, że każdy $p \in P^E$ odpowiada częściowemu izomorfizmowi z $\mathfrak{A}' \restriction \sigma_0$ w $\mathfrak{B}' \restriction \sigma_0$ (będziemy każdy taki częściowy izomorfizm oznaczać przez p).

Dowód I Twierdzenia Lindströma

Ponieważ $(\mathfrak{C}, c^E, Q^E) \models \vartheta$, więc dla każdej $n \in \omega$ element $e_n = (f^n c)^E$ należy do Q^E oraz elementy e_n tworzą ciąg zstępujący:

$$\ldots e_3 <^E e_2 <^E e_1 <^E e_0.$$

Niech $I = \{p : \text{ istnieje } n \text{ taka, że } I^E(e_n, p)\}$. Na mocy (v) otrzymujemy, że $I \neq \emptyset$. Na mocy (vi) oraz (vii) otrzymujemy, że I ma własność rozszerzania w przód i w tył.

Dostajemy zatem:

(5) $\quad I : \mathfrak{A}' \upharpoonright \sigma_0 \cong_p \mathfrak{B}' \upharpoonright \sigma_0.$

Teraz (4) i (5) dają łącznie (3). Tym samym, dowód I Twierdzenia Lindströma jest zakończony.

II Twierdzenie Lindströma

Zakładamy, że czytelnik ma podstawowe wiadomości dotyczące elementarnej teorii rekursji, a więc że zna np. pojęcie zbioru rekurencyjnego, zbioru rekurencyjnie przeliczalnego, funkcji rekurencyjnej, itp.

Powiemy, że logika $\mathcal{L}$ jest ***efektywna***, gdy dla każdej rekurencyjnej sygnatury σ zbiór $L(\sigma)$ jest rekurencyjny oraz dla każdego zdania $\psi \in L(\sigma)$ istnieje skończona $\sigma_0 \subseteq \sigma$ taka, że $\psi \in L(\sigma_0)$.

Niech logiki $\mathcal{L}$ i $\mathcal{L}'$ będą efektywne. Piszemy:

- (a) $\mathcal{L} \leqslant_{eff} \mathcal{L}'$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja rekurencyjna F taka, że dla każdego $\psi \in L(\sigma)$ mamy: $F(\psi) \in L'(\sigma)$ oraz $Mod^{\sigma}_{\mathcal{L}}(\psi) = Mod^{\sigma}_{\mathcal{L}'}(F(\psi))$.
- (b) $\mathcal{L} \sim_{eff} \mathcal{L}'$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{L} \leqslant_{eff} \mathcal{L}'$ oraz $\mathcal{L}' \leqslant_{eff} \mathcal{L}$. Jeśli $\mathcal{L} \sim_{eff} \mathcal{L}'$, to mówimy, że $\mathcal{L}$ i $\mathcal{L}'$ są ***efektywnie równoważne***.

II Twierdzenie Lindströma

Dla przykładu:

- $\mathcal{L}_{\omega\omega}$, logika drugiego rzędu $\mathcal{L}^2$, słaba logika drugiego rzędu $\mathcal{L}^{w2}$, logika $\mathcal{L}(Q_1)$ (czyli logika z kwantyfikatorem „istnieje nieprzeliczalnie wiele") są efektywne;
- $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ nie jest efektywna;
- $\mathcal{L}_{\omega\omega} \leqslant_{\mathit{eff}} \mathcal{L}^{w2}$;
- $\mathcal{L}^{w2} \leqslant_{\mathit{eff}} \mathcal{L}^2$.

II Twierdzenie Lindströma

Mówimy, że logika $\mathcal{L}$ jest ***efektywnie regularna***, gdy $\mathcal{L}$ jest efektywna oraz dla każdej rekurencyjnej sygnatury σ zachodzą następujące warunki:

- (i) istnieją funkcje rekurencyjne $\varphi \mapsto \neg\varphi$ oraz $(\varphi, \psi) \mapsto \varphi \vee \psi$ (i podobnie dla pozostałych spójników)
- (ii) dla każdego jednoargumentowego predykatu U istnieje funkcja rekurencyjna $\varphi \mapsto \varphi^U$
- (iii) istnieje funkcja rekurencyjna $\varphi \mapsto \varphi^r$ (przy tym sygnatura σ^r musi być rekurencyjna).

II Twierdzenie Lindströma

Niech logika $\mathcal{L}$ będzie efektywna. Mówimy, że zbiór zdań prawdziwych logiki $\mathcal{L}$ jest ***rekurencyjnie przeliczalny***, gdy dla każdej rekurencyjnej sygnatury σ zbiór $\{\varphi \in L(\sigma) : \emptyset \models^{\mathcal{L}} \varphi\}$ jest rekurencyjnie przeliczalny. Mówiąc, że ten ostatni zbiór jest rekurencyjnie przeliczalny mamy oczywiście na myśli to, że zbiór kodów jego elementów (uzyskanych przez jakąś funkcję rekurencyjną, czyli np. przez numerację Gödlowską) jest rekurencyjnie przeliczalny.

II Twierdzenie Lindströma.

Niech $\mathcal{L}$ będzie efektywnie regularna i $\mathcal{L}_{\omega\omega} \leqslant_{\mathit{eff}} \mathcal{L}$. Jeśli $\mathcal{L}$ ma własność Löwenheima-Skolema oraz zbiór zdań prawdziwych logiki $\mathcal{L}$ jest rekurencyjnie przeliczalny, to $\mathcal{L}_{\omega\omega} \sim_{\mathit{eff}} \mathcal{L}$.

Lemat 4

Lemat 4. Niech $\mathcal{L}$ będzie logiką regularną, $\mathcal{L}_{\omega\omega} \leqslant \mathcal{L}$. Niech $\mathcal{L}$ będzie zwarta i niech ma własność Löwenheima-Skolema. Niech wreszcie σ_0 będzie skończoną sygnaturą czysto relacyjną, c stałą indywidualną spoza σ_0 oraz ψ niech będzie σ_0-zdaniem logiki $\mathcal{L}$. Niech dla każdego $m \in \omega$ istnieją struktury $\mathfrak{A}_m$, $\mathfrak{B}_m$ takie, że:

(†) $\quad \mathfrak{A}_m \cong_m \mathfrak{B}_m, \quad \mathfrak{A}_m \models^{\mathcal{L}} \psi, \quad \mathfrak{B}_m \models^{\mathcal{L}} \neg\psi.$

Wtedy istnieje σ_1-zdanie χ_1, gdzie $\sigma_0 \cup \{<, c\} \subseteq \sigma_1$ oraz σ_1 jest skończona, takie, że:

- (a) Jeśli $\mathfrak{A} \models^{\mathcal{L}} \chi_1$, to $(A, <^A)$ jest częściowym porządkiem, a c^A elementem A o skończonej liczbie $<^A$-poprzedników.
- (b) Dla każdej $m \in \omega$ istnieje $\mathfrak{A}$ taka, że $\mathfrak{A} \models \chi_1$ oraz c^A ma co najmniej m $<^A$-poprzedników.

Lemat 5

Lemat 5. Niech $\mathcal{L}$ będzie logiką regularną, $\mathcal{L}_{\omega\omega} \leqslant \mathcal{L}$. Niech σ będzie skończoną sygnaturą czysto relacyjną. Jeśli dla $\psi \in L(\sigma)$ nie istnieje zdanie pierwszego rzędu o tych samych modelach, co ψ, to dla każdego $m \in \omega$ istnieją struktury $\mathfrak{A}_m, \mathfrak{B}_m \in Str_\sigma$ takie, że:

(‡) $\mathfrak{A}_m \cong_m \mathfrak{B}_m$, $\mathfrak{A}_m \models^{\mathcal{L}} \psi$ oraz $\mathfrak{B}_m \models^{\mathcal{L}} \neg\psi$.

Dowód lematu 4

W oznaczeniach dowodu I Twierdzenia Lindströma, niech $\sigma = \sigma_0$, $\sigma_1 = \sigma^+ \cup \{c\}$ oraz χ_1 niech będzie koniunkcją χ i zdania stwierdzającego, że c leży w polu $<$.
Najpierw udowodnimy (b). Niech dla danej $m \in \omega$ struktury $\mathfrak{A}_m$, $\mathfrak{B}_m$ spełniają (†) oraz niech $(I_n)_{n \leqslant m} : \mathfrak{A}_m \cong \mathfrak{B}_m$.

Definiujemy $\mathfrak{C}$ tak, jak w dowodzie I Twierdzenia Lindströma, z następującymi modyfikacjami:

- (i) $<^C$ jest naturalnym porządkiem na $\{0, 1, \ldots, m\}$
- (ii) $P^C = \bigcup\limits_{n \leqslant m} I_n$.

Niech $c^C = m$. Wtedy $(\mathfrak{C}, c^C)$ spełnia (b).

Dowód lematu 4

Dla dowodu (nie wprost) (a), przypuśćmy, że istnieje model $(\mathfrak{D}, c^D)$ dla χ_1, w którym c^D ma nieskończenie wiele $<^D$-poprzedników.

Tak jak w dowodzie I Twierdzenia Lindströma, z $(\mathfrak{D}, c^D)$ otrzymujemy dwie *izomorficzne* struktury $\mathfrak{A}'$ i $\mathfrak{B}'$ takie, że: $\mathfrak{A}' \models^{\mathcal{L}} \psi$ oraz $\mathfrak{B}' \models^{\mathcal{L}} \neg\psi$.

To daje sprzeczność (izomorficzne modele muszą spełniać dokładnie te same zdania), a więc przypuszczenie dowodu nie wprost trzeba odrzucić. Tym samym dowód (a) oraz całego lematu 4 jest zakończony.

Dowód lematu 5

Załóżmy, że ψ jest spełnialna. W przeciwnym przypadku, teza lematu spełniona jest trywialnie: $Mod_{\mathcal{L}}(\psi) = Mod_{\mathcal{L}_{\omega\omega}}(\exists v \neg v = v)$. Przeprowadzimy dowód nie wprost. Przypuśćmy, że dla pewnej $m \in \omega$ oraz wszystkich struktur $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in Str_{\sigma}$:

(1) jeśli $\mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$, to $\mathfrak{A} \models^{\mathcal{L}} \psi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{B} \models^{\mathcal{L}} \psi$.

Niech $\varphi_0, \ldots, \varphi_k$ będą wszystkimi nierównoważnymi logicznie zdaniami pierwszego rzędu o rzędzie kwantyfikatorowym $\leqslant m$. Pamiętamy, że jeśli σ będzie skończoną sygnaturą czysto relacyjną, to istnieje tylko skończenie wiele takich nierównoważnych logicznie formuł (dowodzimy tego faktu w KRP, przez indukcję po złożoności formuł). Wtedy:

(2) $\mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $0 \leqslant i \leqslant k$ mamy: $\mathfrak{A} \models \varphi_i$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{B} \models \varphi_i$.

Dowód lematu 5

Dla $\mathfrak{A} \in Str_\sigma$ niech $\varphi_\mathfrak{A}$ będzie koniunkcją wszystkich zdań ze zbioru:

$$\{\varphi_i : 0 \leqslant i \leqslant k \wedge \mathfrak{A} \models \varphi_i\} \cup \{\neg\varphi_i : 0 \leqslant i \leqslant k \wedge \mathfrak{A} \models \neg\varphi_i\}.$$

Na mocy (2) mamy wtedy, dla dowolnej $\mathfrak{B}$:

(3) $\mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{B} \models \varphi_\mathfrak{A}$.

Niech φ będzie alternatywą (skończenie wielu!) zdań $\varphi_\mathfrak{A}$, dla których zachodzi $\mathfrak{A} \models \psi$, czyli φ jest zdaniem:

(4) $\bigvee\{\varphi_\mathfrak{A} : \mathfrak{A} \in Str_\sigma$ oraz $\mathfrak{A} \models \psi\}$.

Pokażemy, że:

(5) $Mod_\mathcal{L}(\psi) = Mod_{\mathcal{L}_{\omega\omega}}(\varphi)$

i uzyskamy sprzeczność z przypuszczeniem dowodu nie wprost.

Dowód lematu 5

Jeśli $\mathfrak{B}$ jest modelem ψ, to $\varphi_{\mathfrak{B}}$ należy do alternatywy (4) (jest jednym z jej członów). Ponieważ $\mathfrak{B} \models \varphi_{\mathfrak{B}}$, więc $\mathfrak{B} \models \varphi$.

Jeśli, z drugiej strony, $\mathfrak{B} \models \varphi$, to (na mocy (4)) istnieje $\mathfrak{A}$ taka, że $\mathfrak{A} \models^{\mathcal{L}} \psi$ oraz $\mathfrak{B} \models \varphi_{\mathfrak{A}}$. Na mocy (3) mamy wtedy $\mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$, a na mocy (1) mamy $\mathfrak{B} \models^{\mathcal{L}} \psi$.

Mamy stąd sprzeczność, gdyż równoważność: $\mathfrak{B} \models^{\mathcal{L}} \psi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{B} \models \varphi$ oznacza, że $Mod_{\mathcal{L}}(\psi) = Mod_{\mathcal{L}_{\omega\omega}}(\varphi)$. Tak więc, przypuszczenie dowodu nie wprost musimy odrzucić, co kończy dowód lematu 5.

Twierdzenie Traktenbrota

W dowodzie II Twierdzenia Lindströma wykorzystujemy też:

Twierdzenie Traktenbrota.
Istnieje skończona sygnatura σ taka, że zbiór (numerów) wszystkich zdań (języka KRP o sygnaturze σ) prawdziwych we wszystkich strukturach skończonych należących do Str_σ nie jest rekurencyjnie przeliczalny.

Dowód Twierdzenia Traktenbrota znaleźć można w dodatkach zamieszczonych na stronie tych wykładów:

- Stephen Simpson: Theorems of Church and Trakhtenbrot,
- Jouko Väänänen: A Short Course on Finite Model Theory.

Dowód II Twierdzenia Lindströma

Niech $\mathcal{L}$ spełnia założenia twierdzenia. Pokażemy, że $\mathcal{L} \leqslant_{\mathit{eff}} \mathcal{L}_{\omega\omega}$ w dwóch krokach:

- $(*)$ Najpierw pokażemy, że spełniony jest następujący warunek:

  $(\bigstar)$ Dla każdej rekurencyjnej sygnatury σ oraz każdego $\psi \in L(\sigma)$ istnieje $\varphi \in L_{\omega\omega}(\sigma)$ takie, że $Mod_{\mathcal{L}}(\psi) = Mod(\varphi)$.

- $(**)$ Potem pokażemy, że przejście od ψ do ϕ jest efektywne.

Ponieważ $\mathcal{L}$ jest efektywna, więc wystarczy rozważać skończone sygnatury rekurencyjne. Ponieważ dla $\mathcal{L}$ istnieje efektywny odpowiednik własności zastępowania symboli funkcyjnych i stałych indywidualnych przez predykaty, możemy ograniczyć się do sygnatur σ czysto relacyjnych. Niech zatem σ będzie: rekurencyjna, skończona i relacyjna.

Dowód II Twierdzenia Lindströma

Poprowadzimy dowód kroku $(*)$ metodą nie wprost, korzystając z lematów 4 i 5 oraz z Twierdzenia Traktenbrota.
Przypuszczamy zatem, że $(\bigstar)$ nie zachodzi, czyli że $\psi \in L(\sigma)$ oraz że żadne zdanie pierwszego rzędu nie ma dokładnie tych samych modeli co ψ.
Na mocy lematu 5, dla każdej m istnieją $\mathfrak{A}_m, \mathfrak{B}_m \in Str_\sigma$ takie, że:

- $\mathfrak{A}_m \cong_m \mathfrak{B}_m$
- $\mathfrak{A}_m \models^{\mathcal{L}} \psi$
- $\mathfrak{B}_m \models^{\mathcal{L}} \neg\psi$.

Spełnione są więc założenia lematu 4. Istnieją zatem: sygnatura σ_1 oraz zdanie χ_1 z tezy tego lematu.

Dowód II Twierdzenia Lindströma

Rozszerzamy σ_1 przez dodanie jednoargumentowego predykatu W i rozważamy zdanie $\vartheta \in L(\sigma_1 \cup \{W\})$ o następującej postaci:
$\chi_1 \wedge \exists x\ W(x) \wedge \forall x\ (W(x) \rightarrow x < c)$.
Na mocy własności zdania χ_1 mamy wtedy:

- (a) Jeśli $\mathfrak{A} \in Str_{\sigma_1 \cup \{W\}}$ oraz $\mathfrak{A} \models^{\mathcal{L}} \vartheta$, to zbiór W^A jest niepusty i skończony.
- (b) Dla każdej $m \geqslant 1$ istnieje $\mathfrak{A}$ taka, że $\mathfrak{A} \models \vartheta$ oraz W^A ma dokładnie m elementów.

Tak więc, jeśli $\mathfrak{A}$ przebiega wszystkie modele zdania ϑ, to W^A przebiega wszystkie (niepuste) zbiory skończone (pamiętajmy, że wszystkie rozważane logiki mają własność izomorfizmu).
Z powyższych warunków (a) i (b) otrzymamy sprzeczność z przypuszczeniem dowodu nie wprost.

Dowód II Twierdzenia Lindströma

Na mocy twierdzenia Traktenbrota istnieje rekurencyjna i skończona sygnatura σ_2 taka, że zbiór wszystkich σ_2-zdań prawdziwych we wszystkich strukturach skończonych (tej sygnatury) nie jest zbiorem rekurencyjnie przeliczalnym.

Możemy założyć, że σ_2 jest czysto relacyjna i rozłączna z $\sigma_1 \cup \{W\}$.

Niech F będzie odwzorowaniem rekurencyjnym $\varphi \mapsto F(\varphi)$, ze zbioru $L(\sigma_2)$ w $L(\sigma_2)$ takim, że $Mod(\varphi) = Mod(F(\varphi))$. Wtedy dla wszystkich zdań $\varphi \in L(\sigma_2)$:

- $(\blacklozenge)$ φ jest prawdziwe we wszystkich strukturach skończonych (sygnatury σ_2) wtedy i tylko wtedy, gdy $\models^{\mathcal{L}} \vartheta \rightarrow (F(\varphi))^W$.

Aby udowodnić równoważność $(\blacklozenge)$, trzeba dowieść implikacji prostej oraz odwrotnej.

Dowód II Twierdzenia Lindströma

$\Rightarrow$ Niech φ będzie prawdziwe we wszystkich strukturach skończonych oraz $\mathfrak{A} \in Str_{\sigma_1 \cup \{W\} \cup \sigma_2}$ będzie taka, że $\mathfrak{A} \models^{\mathcal{L}} \vartheta$. Na mocy (a), W^A jest niepusty i skończony, a więc $[W^A]^{\mathfrak{A} \restriction \sigma_2} \models^{\mathcal{L}} \varphi$, a stąd $[W^A]^{\mathfrak{A} \restriction \sigma_2} \models^{\mathcal{L}} F(\varphi)$. Wtedy $\mathfrak{A} \restriction \sigma_2 \models^{\mathcal{L}} (F(\varphi))^W$.

$\Leftarrow$ Na mocy (b), dla każdej $m \geqslant 1$ istnieje $\mathfrak{A}$ taka, że $\mathfrak{A} \models \vartheta$ i W^A ma dokładnie m elementów. Stąd $\mathfrak{A} \models^{\mathcal{L}} (F(\varphi))^W$, czyli $\mathfrak{A} \models^{\mathcal{L}} \varphi^W$. W konsekwencji, $[W^A]^{\mathfrak{A} \restriction \sigma_2} \models \varphi$.

To kończy dowód ($\blacklozenge$), a tym samym dowód kroku ($*$).

Dowód II Twierdzenia Lindströma

Przechodzimy do dowodu kroku $(**)$. Niech $g^{\sigma}_{\mathcal{L}}$ będzie funkcją rekurencyjną, przypisującą numery (np. numery Gödlowskie) zdaniom logiki $\mathcal{L}$, czyli zdaniom ustalonej sygnatury rekurencyjnej σ.

Na mocy faktu, że zbiór zdań prawdziwych logiki $\mathcal{L}$ jest rekurencyjnie przeliczalny, dla każdej rekurencyjnej sygnatury σ istnieje dwuargumentowa relacja rekurencyjna, powiedzmy R, taka, że dla wszystkich zdań $\varphi \in L(\sigma)$:

- $\models^{\mathcal{L}} \varphi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\exists m \; R(m, g^{\sigma}_{\mathcal{L}}(\varphi))$.

Dowód II Twierdzenia Lindströma

Ustalmy wyliczenie $\langle \psi_n : n \in \omega \rangle$ wszystkich σ-zdań logiki $\mathcal{L}_{\omega\omega}$ takie, że przyporządkowanie $n \mapsto g^{\sigma}_{\mathcal{L}_{\omega\omega}}(\psi_n)$ jest rekurencyjne. Niech G będzie funkcją rekurencyjną taką, że dla σ-zdań logiki $\mathcal{L}$:

- $G(g^{\sigma}_{\mathcal{L}}(\varphi)) = ((\mu\langle m, n\rangle)R(m, g^{\sigma}_{\mathcal{L}}(\varphi \equiv_{\mathcal{L}} (\psi_n)^{\mathcal{L}})))_1$

(tu $\langle\rangle$ jest np. pierwotnie rekurencyjną funkcją kodującą (pary) Cantora, a $()_1$ jest pierwotnie rekurencyjną funkcją rzutu, na pierwszy argument pary; $\mu\, x\, [\ldots]$ jest efektywnym μ-operatorem, czytanym: „najmniejsze x takie, że $[\ldots]$"). Powyżej zaznaczyliśmy wyraźnie, że bierzemy spójnik równoważności z logiki $\mathcal{L}$ oraz, że rozważamy „przekład" formuły ψ_n na stosowne zdanie logiki $\mathcal{L}$.

Niech φ^* będzie formułą $\psi_{G(g^{\sigma}_{\mathcal{L}}(\varphi))}$. Wtedy rekurencyjne odwzorowanie $\varphi \mapsto \varphi^*$ poświadcza, że $\mathcal{L} \leqslant_{eff} \mathcal{L}_{\omega\omega}$. Dowód II Twierdzenia Lindströma został tym samym zakończony.

Inne twierdzenia limitacyjne

Oprócz powyższych twierdzeń Lindströma, znaleziono cały szereg innych jeszcze twierdzeń, charakteryzujących logiki abstrakcyjne maksymalne jeśli chodzi o wybrane (zestawy) własności, np.:

- własność Betha,
- własności interpolacyjne,
- własność Karp.

Twierdzenia te dotyczą zarówno logik z uogólnionymi kwantyfikatorami, jak i logik infinitarnych. Także logiki wyższych rzędów mogą być oczywiście traktowane jako logiki abstrakcyjne w omówionym wyżej sensie.

Wykorzystywana literatura

- Barwise, J. Feferman, S. (eds.) 1985. *Model-theoretic logics.* Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg Tokyo.
- Ebbinghaus, H.D., Flum, J., Thomas, W. 1996. *Mathematical logic.* Springer.
- Hinman, P.G. 2005. *Fundamentals of Mathematical Logic.* A K Peters, Wellesley.
- Lindström, P. 1969. On Extensions of Elementary Logic. *Theoria*, **35**, 1–11.
- Stegmüller, W., Varga von Kibéd, M. 1984. *Probleme und Resultate der Wissenschaftstheorie und Analytischen Philosophie, Band III: Strukturtypen der Logik. Teil C.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo.