O przekonaniach i przekonywaniu (5)

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl
pogon@amu.edu.pl

28 marca 2007

Plan na dziś:

- Argumenty dedukcyjne — przykłady
  1. O dowodach nie wprost
  2. O wnioskowaniach erotetycznych
  3. Smutna Ziuta
  4. Reguła Stalina
  5. Kapitalizm, recesja, bezrobocie i bieda
  6. Magdola w szpitalach (A, B, C)
  7. Pierzaste, Myszaste i Ogoniaste
  8. Uwaga na kapustę
- Dodatek: Wielkie Twierdzenie Apta.

Wracamy do omawiania **procesu** przekonywania.

Na początek przyjrzymy się wybranym przykładom argumentów dedukcyjnych.

Wyróżniona rola pełniona przez te argumenty polega na tym, iż oparte są one na wynikaniu logicznym.

Oznacza to, że jeśli przesłanki argumentu są prawdziwe, to wniosek (teza, konkluzja) tego argumentu nie może być fałszywy (fałszywa).

W precyzyjnej definicji wynikania logicznego eliminuje się oczywiście występującą w powyższym określeniu modalność.

Przypomnijmy, że definicja ta jest formułowana zawsze dla ściśle określonego języka.

Uwaga. Pojęcie wynikania logicznego nie ma bezpośredniego zastosowania do języków naturalnych (etnicznych). Mówiąc o wynikaniu (a także o innych zależnościach logicznych — np. o sprzeczności, wykluczaniu, itd.) dla zdań języków naturalnych odwołujemy się zawsze wybranych aspektów struktur składniowych rozważanych zdań oraz do ich przekładu na stosowny język formalny (dla którego **jest** określone pojęcie wynikania logicznego).

Uzasadnienia a wynikanie logiczne

Uzasadnianie przekonań związane jest z (obiektywną, niezależną od podmiotów poznających) relacją wynikania logicznego. Poprzedniki tej relacji nazywamy racjami, a jej następniki następstwami.

Racja $\longrightarrow$ Następstwo

Wynikanie logiczne

Na mocy definicji wynikania logicznego (znanej z kursu logiki), następstwo nie może być fałszywe przy prawdziwej racji.

Uzasadnienia a wynikanie logiczne

Poszczególne człony relacji wynikania logicznego mogą być znane bądź nieznane, a także prawdziwe lub fałszywe. W zależności od tego, mamy różne typy uzasadnień (a więc poszukiwań członu nieznanego).

Racja	Prawdziwa	Fałszywa
Znana	x_1	x_2
Nieznana	x_3	x_4

Następstwo	Prawdziwe	Fałszywe
Znane	y_1	y_2
Nieznane	y_3	y_4

Nie wszystkie układy (x_i, y_j) (gdzie $1 \leqslant i, j \leqslant 4$) są możliwe. Nadto, niektóre z możliwych nie są interesujące.

Uzasadnienia a wynikanie logiczne

Do najważniejszych (interesujących metodologię nauk) należą następujące z powyższych możliwości:

- dowodzenie
- wyjaśnianie
- sprawdzanie (konfirmacja i falsyfikacja).

Jak pamiętamy z pierwszych dwóch wykładów, w teorii argumentacji zajmujemy się wszelkimi związkami inferencyjnymi między przesłankami a tezą. Dowodzenie jest argumentacją, jak zobaczymy za chwilę. Nie ma powszechnej zgody, czy do przedmiotu zainteresowania teorii argumentacji włączać wyjaśnianie oraz sprawdzanie.

Uzasadnienia a wynikanie logiczne

W dowodzeniu dla znanej prawdziwej racji szukamy jej (nieznanych dotąd) prawdziwych następstw.

W wyjaśnianiu dla znanego prawdziwego następstwa szukamy jego (nieznanej dotąd) prawdziwej racji.

W przypadku sprawdzania, mamy jakieś zdanie, traktowane jako racja o nieznanej wartości logicznej i szukamy jej następstw. W przypadku znalezienia następstw fałszywych mamy do czynienia z falsyfikacją, a dla następstw prawdziwych — z konfirmacją.

Uzasadnienia a wynikanie logiczne

Procedury DEDUKCYJNE i INDUKCYJNE:

DEDUKCJA	WYNIKANIE LOGICZNE	REDUKCJA (INDUKCJA)
Przesłanka	RACJA	Wniosek
$\downarrow$	$\Downarrow$	$\uparrow$
Wniosek	NASTĘPSTWO	Przesłanka

Ważnym rodzajem dowodzenia jest dowód nie wprost.
Jest używany często w argumentacji (dyskusji, sporze), np. gdy chcemy wykazać, iż założenia czynione przez oponenta prowadzą do sprzeczności.

Uzasadnienia a wynikanie logiczne

Zaczynamy od tego, co lubicie najbardziej, tj. od matematyki i logiki matematycznej.

Typową (a właściwie: jedyną) formą uzasadniania twierdzeń w naukach formalnych (matematyce oraz logice matematycznej) jest DOWODZENIE, a więc procedura szukania prawdziwych następstw dla znanych i prawdziwych racji.

Uzasadnienia a wynikanie logiczne

Przykłady dowodów.

1. Liczb pierwszych jest nieskończenie wiele.

Przypuśćmy, że jest tylko skończenie wiele liczb pierwszych (tj. takich liczb n, które mają dokładnie dwa podzielniki: 1 oraz n): 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17,...,p

Zatem p jest (rzekomo) największą liczbą pierwszą.

Tworzymy iloczyn: $m = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot \ldots \cdot p$ (rzekomo) wszystkich liczb pierwszych.

Liczba $m + 1$ jest liczbą pierwszą, ponieważ nie dzieli się bez reszty przez żadną z liczb pierwszych 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17,...,p. Nadto, $m + 1$ jest większa od p.

Otrzymujemy sprzeczność: $m + 1$ jest liczbą pierwszą **większą** od (rzekomo) największej liczby pierwszej p. Zatem, musimy odrzucić przypuszczenie, iż liczb pierwszych jest skończenie wiele. W konsekwencji, liczb pierwszych jest nieskończenie wiele. Nie istnieje największa liczba pierwsza.

Uzasadnienia a wynikanie logiczne

2. Istnieją liczby niewymierne. Przypomnimy szkolny dowód, iż $\sqrt{2}$ nie jest liczbą wymierną, tj. nie jest równa ilorazowi $\frac{a}{b}$ dla żadnych liczb całkowitych a oraz b takich, że $b \neq 0$ oraz a i b są względnie pierwsze (tzn. nie mają wspólnego podzielnika różnego od którejkolwiek z nich i > 1). Przypuśćmy, a contrario, że **istnieją** takie a oraz b. Wtedy:

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

$$2 = \frac{a^2}{b^2}$$

$$2 \cdot b^2 = a^2$$

Ponieważ lewa strona tego równania jest liczbą parzystą, więc prawa też. Jeśli a^2 jest parzysta, to i a jest parzysta. Stąd $a = 2 \cdot c$ dla pewnego c i mamy:

$$2 \cdot b^2 = (2 \cdot c)^2$$

$$2 \cdot b^2 = 4 \cdot c^2$$

$$b^2 = 2 \cdot c^2$$

Uzasadnienia a wynikanie logiczne

Prawa strona tego równania jest liczbą parzystą, a więc także b^2 jest liczbą parzystą. Stąd, b jest liczbą parzystą i otrzymujemy sprzeczność z przypuszczeniem, iż a oraz b są względnie pierwsze: wszak pokazaliśmy przed chwilą, że obie są parzyste (a więc obie dzielą się bez reszty przez 2). Zatem musimy odrzucić uczynione przypuszczenie, że $\sqrt{2}$ jest liczbą wymierną. Ostatecznie, $\sqrt{2}$ nie jest liczbą wymierną.

Uwaga. Odkrycie liczb niewymiernych, dokonane przez Pitagorejczyków, było — można bez przesady użyć tego określenia — szokiem cywilizacyjnym. To tak, jakbyś ujrzała DUCHA: oto okazuje się, że w Kosmosie, który (wedle Pitagorejczyków) rządzony jest wyłącznie przez Liczby (wymierne) istnieją byty, niedostępne dotychczasowemu rozumieniu pojęcia liczby.

Argumenty dedukcyjne

Na kursie logiki poznali Państwo niektóre z metod dowodowych używanych w logice matematycznej:

- metoda aksjomatyczna;
- metoda założeniowa;
- dedukcja naturalna;
- rachunki sekwentów;
- metoda rezolucji;
- metoda tablic analitycznych (drzew semantycznych).

Podamy teraz kilka przykładów argumentacji dedukcyjnych. Ważną rolę będą pełnić: dowody nie wprost oraz wnioskowania erotetyczne (czyli związane z zadawaniem pytań).

Wnioskowania erotetyczne

Choć pytania nie są ani prawdziwe, ani fałszywe, używamy ich jednak w rozumowaniach, a więc np. w ustaleniach, czy zachodzi wynikanie logiczne między przesłankami a wnioskiem, czy dany tekst jest semantycznie niesprzeczny, itd.

Na wnioskowaniach erotetycznych bazuje każde śledztwo: naukowe, kryminalne, małżeńskie, itd.

Zasadą wnioskowania erotetycznego jest przechodzenie od pytań o prawdziwość bądź fałszywość zdań złożonych do pytań o wartość logiczną zdań coraz prostszych, aż do uzyskania odpowiedzi, których wartość logiczna jest oczywista.

Wnioskowania erotetyczne

Pytanie złożone postaci *Czy* $A \wedge B$*?* sprowadzić można do dwóch pytań prostszych: *Czy* A*?* oraz *Czy* B*?*

Pytanie złożone postaci *Czy* $A \vee B$*?* sprowadzić można do dwóch pytań prostszych: *Czy* A*?* bądź *Czy* B*?*

Pytanie złożone postaci *Czy* $\neg(A \rightarrow B)$*?* sprowadzić można do dwóch pytań prostszych: *Czy* A*?* oraz *Czy* $\neg B$*?*

Pytanie złożone postaci *Czy* $\neg(A \wedge B)$*?* sprowadzić można do dwóch pytań prostszych: *Czy* $\neg A$*?* bądź *Czy* $\neg B$*?*

Pytanie złożone postaci *Czy* $\neg\neg A$*?* sprowadzić można do prostszego: *Czy* A*?*,

itd., itp. (zob. np. www.logic.amu.edu.pl/pliki/dydaktyka/krp311.pdf — omówiono tam odnośne reguły).

Prawo Demokratycznego Upoważnienia Poprzez Aplauz

Dla przykładu, aby sprawdzić, czy formuła:

$$(\bigstar) \quad ((p \to q) \wedge (\neg p \to q)) \to q$$

jest tautologią Klasycznego Rachunku Zdań, rozważamy, czy można wykluczyć, iż jej negacja, tj.:

$$(\bigstar\bigstar) \quad \neg(((p \to q) \wedge (\neg p \to q)) \to q)$$

jest przy jakimkolwiek wartościowaniu zmiennych prawdziwa.

Jeśli przypuścimy, że $(\bigstar\bigstar)$ jest prawdziwa (przy jakimś wartościowaniu zmiennych), to musimy kolejno uznać, że (przy tymże wartościowaniu):

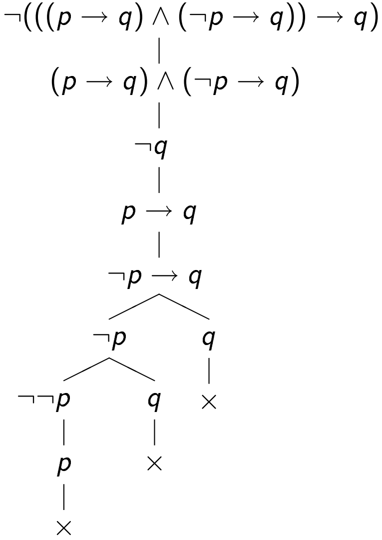
Prawo Demokratycznego Upoważnienia Poprzez Aplauz

- (1) formuła $((p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)) \rightarrow q$ jest fałszywa;
- (2.1) formuła $(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)$ jest prawdziwa, a jednocześnie (2.2) formuła q jest fałszywa;
- (3.1) formuła $p \rightarrow q$ jest prawdziwa oraz (3.2) formuła $\neg p \rightarrow q$ jest prawdziwa;
- (4) skoro $p \rightarrow q$ prawdziwa, to bądź: (4.1) p fałszywa, bądź (4.2) q prawdziwa;
- (5) warunki (2.2) oraz (4.2) są wzajem sprzeczne;
- (6) skoro $\neg p \rightarrow q$ prawdziwa, to bądź: (6.1) $\neg p$ fałszywa, bądź (6.2) q prawdziwa;

Prawo Demokratycznego Upoważnienia Poprzez Aplauz

- (7) warunki (2.2) oraz (6.2) są wzajem sprzeczne;
- (8) skoro $\neg p$ fałszywa (z (6.1)), to (8.1) p prawdziwa;
- (9) warunki (4.1) oraz (8.1) są wzajem sprzeczne;
- (10) przypuszczenie (1) musimy odrzucić;
- (11) nie ma wartościowania, przy którym formuła: $\neg(((p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)) \rightarrow q)$ byłaby prawdziwa;
- (12) zatem formuła $((p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)) \rightarrow q$ jest prawdziwa przy każdym wartościowaniu.

Powyższe rozumowanie reprezentowane jest przez drzewo:



Wnioskowania erotetyczne

W powyższym drzewie każda z gałęzi zawiera parę formuł wzajem sprzecznych (w takim przypadku gałąź zamykamy, kończąc ją znakiem $\times$). Każda gałąź zamknięta jest więc **wykluczeniem** jakiejś możliwości (wartościowania zmiennych).

Rozpatrzmy jeszcze jeden przykład; sprawdźmy, czy formuła:

$$(p \rightarrow q) \wedge (p \vee q)$$

jest prawdziwa przy jakimś wartościowaniu. Rozumujemy wtedy tak:

(1) jeśli $(p \rightarrow q) \wedge (p \vee q)$ prawdziwa, to (1.1) $p \rightarrow q$ prawdziwa oraz (1.2) $p \vee q$ prawdziwa;

(2) skoro $p \rightarrow q$ prawdziwa, to bądź: (2.1) p fałszywa, bądź (2.2) q prawdziwa;

(3) w przypadku (2.1) mamy, skoro $p \vee q$ prawdziwa, to bądź: (3.1.) p prawdziwa, bądź (3.2) q prawdziwa;

(4) w przypadku (2.2) mamy, skoro $p \vee q$ prawdziwa, to bądź: (4.1) p prawdziwa, bądź (4.2) q prawdziwa;

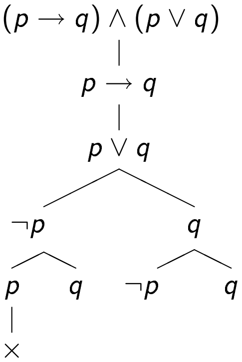
(5) przypadki (2.1) oraz (3.1) są wzajem sprzeczne;

(6) wszystkie (trzy) pozostałe powyższe przypadki są możliwe;

(7) formuła $(p \rightarrow q) \wedge (p \vee q)$ jest prawdziwa przy pewnych wartościowaniach zmiennych zdaniowych.

Wnioskowania erotetyczne

Rozumowanie to reprezentowane jest przez drzewo:



Wnioskowania erotetyczne

Ponieważ powyższe drzewo ma gałęzie, na których nie występuje para formuł wzajem sprzecznych, więc badana formuła jest prawdziwa przy pewnych wartościowaniach zmiennych zdaniowych. Wartościowania te „odczytać" można właśnie z tych gałęzi.

Na koniec, kilka przykładów z tzw. Życia.

Zachęcam do samodzielnego utworzenia odnośnych drzew dowodowych.

Smutna Ziuta

Przykład.

Rozmyślania Ziuty przerywa powrót Zenka:

ZIUTA MYŚLI:

Jeśli dziś była wypłata, to mój Zenek jest pijany.

WCHODZI ZENEK

Ale przecie — chwała Panu Najwyższemu — mój Zenuś dziś nie jest pijany.

ZIUTA KONKLUDUJE:

Tak więc — psiakość — nie było dziś wypłaty.

Czy konkluzja Ziuty **wynika logicznie** z jej przesłanek?

Smutna Ziuta

Gdyby wniosek mógł być fałszywy, przy prawdziwych przesłankach, to nie zachodziłoby wynikanie logiczne.

Pytamy: czy wniosek może być fałszywy, przy prawdziwych przesłankach? Lub: czy przesłanki oraz negacja wniosku mogą być jednocześnie prawdziwe?

Zdania proste we wnioskowaniu Ziuty:

- p — Dziś była wypłata.
- q — Dziś Zenek jest pijany.

Smutna Ziuta

Schemat wnioskowania Ziuty:

$$\frac{\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ \neg q \end{array}}{\neg p}$$

Pytamy zatem, czy prawdą są:

- $p \rightarrow q$
- $\neg q$
- $\neg\neg p$.

Smutna Ziuta

1. Gdyby $\neg q$ było prawdziwe, to q byłoby fałszywe.
2. Gdyby $\neg\neg p$ było prawdziwe, to $\neg p$ byłoby fałszywe.
3. Gdyby $\neg p$ było fałszywe, to p byłoby prawdziwe.
4. Gdyby p było prawdziwe, a q fałszywe, to $p \rightarrow q$ byłoby fałszywe.
5. Ale przypuściliśmy, że $p \rightarrow q$ jest prawdziwe: sprzeczność — $p \rightarrow q$ nie może być jednocześnie prawdziwe i fałszywe.

Zatem przypuszczenie, iż przesłanki we wnioskowaniu Ziuty mogą być prawdziwe, a jego wniosek fałszywy należy odrzucić — znaczy to, iż wniosek wynika tu logicznie z przesłanek: gdy przesłanki są prawdziwe, to i wniosek jest prawdziwy.

Reguła Stalina

Przykład.

Rozważmy następujące wnioskowanie oparte na *Regule Stalina*:

Jest człowiek, jest problem. Zatem: nie ma człowieka, nie ma problemu.

Pokażemy, że *Reguła Stalina* jest zawodna, a zatem także iż powyższe wnioskowanie nie jest dedukcyjne: wniosek może być fałszywy, a przesłanka prawdziwa.

Reguła Stalina

Zdania proste w powyższym wnioskowaniu:

- p — Jest człowiek.
- q — Jest problem.

Schemat powyższego wnioskowania:

$$\frac{p \rightarrow q}{\neg p \rightarrow \neg q}$$

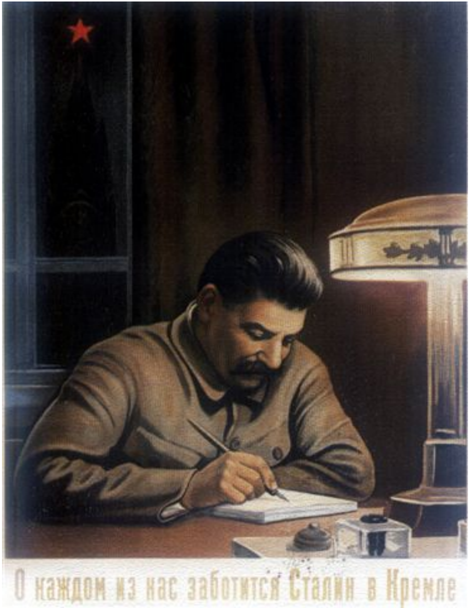
Pytamy, czy mogą być jednocześnie prawdziwe: przesłanka oraz negacja wniosku, tj.:

- $p \rightarrow q$
- $\neg(\neg p \rightarrow \neg q)$.

Reguła Stalina

1. Gdyby $\neg(\neg p \rightarrow \neg q)$ było prawdziwe, to $\neg p \rightarrow \neg q$ byłoby fałszywe.
2. Gdyby $\neg p \rightarrow \neg q$ było fałszywe, to $\neg p$ byłoby prawdziwe, a $\neg q$ byłoby fałszywe.
3. Gdyby $\neg p$ było prawdziwe, to p byłoby fałszywe.
4. Gdyby $\neg q$ było fałszywe, to q byłoby prawdziwe.
5. Dla p fałszywego oraz q prawdziwego przesłanka oraz zaprzeczenie wniosku są prawdziwe.
6. Inaczej mówiąc, dla p fałszywego oraz q prawdziwego przesłanka jest prawdziwa, a wniosek fałszywy.
7. Zatem: wniosek nie wynika logicznie z przesłanki.

Pokazaliśmy więc, że *Reguła Stalina* jest zawodna.


О каждом из нас заботится Сталин в Кремле

Kapitalizm, recesja, bezrobocie, bieda

Przykład.

Czy następujący tekst jest semantycznie niesprzeczny?

Jest kapitalizm lub nie ma bezrobocia. Jeśli jest recesja, to jest także bezrobocie. Nie ma jednak jednocześnie: biedy oraz braku recesji. Jest bieda, a nie ma kapitalizmu.

Gdyby ten tekst był semantycznie niesprzeczny (opisywał sytuację mogącą zajść), to prawdziwa byłaby koniunkcja zdań tego tekstu.

Przypuśćmy, że koniunkcja ta jest prawdziwa.

Kapitalizm, recesja, bezrobocie, bieda

Zdania proste w powyższym tekście to:

- p — Jest kapitalizm.
- q — Jest bezrobocie.
- r — Jest recesja.
- s — Jest bieda.

Schematy składniowe zdań badanego tekstu to:

- A_1: $p \vee \neg q$
- A_2: $r \rightarrow q$
- A_3: $\neg(s \wedge \neg r)$
- A_4: $s \wedge \neg p$.

Kapitalizm, recesja, bezrobocie, bieda

Koniunkcja $A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_4$ byłaby prawdziwa dokładnie wtedy, gdy każdy z jej członów byłby prawdziwy.

Zadajemy więc pytania:

- Czy A_1 jest prawdziwe?
- Czy A_2 jest prawdziwe?
- Czy A_3 jest prawdziwe?
- Czy A_4 jest prawdziwe?

Na te pytania łatwo odpowiedzieć korzystając z własności spójników prawdziwościowych:

Kapitalizm, recesja, bezrobocie, bieda

1. Gdyby $s \wedge \neg p$ było prawdziwe, to prawdziwe byłoby s i prawdziwe byłoby $\neg p$.
2. Zatem p byłoby fałszywe.
3. Gdyby $p \vee \neg q$ było prawdziwe, przy fałszywym p, to $\neg q$ musiałoby być prawdziwe.
4. Stąd, q musiałoby być fałszywe.
5. Gdyby $r \rightarrow q$ było prawdziwe, przy fałszywym q, to r musiałoby być fałszywe.
6. Gdyby $\neg(s \wedge \neg r)$ było prawdziwe, to $s \wedge \neg r$ byłoby fałszywe.
7. Ponieważ ustaliliśmy, że r fałszywe, więc $\neg r$ jest prawdziwe.
8. Ponieważ zarówno s, jak i $\neg r$ są prawdziwe, więc $s \wedge \neg r$ jest prawdziwe.
9. Sprzeczność: $s \wedge \neg r$ nie może być jednocześnie prawdziwe i fałszywe.

Kapitalizm, recesja, bezrobocie, bieda

Ponieważ przypuszczenie, iż koniunkcja $A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_4$ jest prawdziwa doprowadziło do sprzeczności, więc musimy przypuszczenie to odrzucić.

Zatem: badany tekst **jest semantycznie sprzeczny**, składające się nań zdania złożone nie mogą być jednocześnie prawdziwe.

Uwaga: w tej analizie dokonaliśmy pewnych uproszczeń — poprawne wnioskowanie erotetyczne prowadzone jest aż do uzyskania pytań o zdania proste i ich negacje.

Szpital A

A. Leżysz w szpitalu. Doktor stoi przy łóżku i mówi:
Jeśli pacjentka ma przerzuty nowotworowe, to zaatakowana jest wątroba. Pacjentka ma krew w moczu, chociaż nie ma wysokiej gorączki. Nie jest tak, aby jednocześnie była krew w moczu a nie było przerzutów nowotworowych. Pacjentka ma wysoką gorączkę, o ile zaatakowana jest wątroba.
Z powyższych rozważań **wynika logicznie** każde ze zdań:

1. Pacjentka właśnie umiera.
2. Pacjentka symuluje.
3. Jeśli usuniemy lewe płuco, to pacjentka wyzdrowieje.
4. Jeśli usuniemy prawe płuco, to pacjentka wyzdrowieje.
5. Jeśli usuniemy oba płuca, to pacjentka wyzdrowieje.

Jeśli lekarz zastosuje się do któregokolwiek z tych wniosków (zwłaszcza ostatniego), to przyjmiesz to z wdzięcznym uśmiechem, prawda?

Szpital A

Pokażemy, że tekst wygłoszony przez doktora jest semantycznie sprzeczny.
Zrobimy to metodą założeniową.
Znajdujemy zdania proste w tekście:

- p — Pacjentka ma przerzuty nowotworowe.
- q — Zaatakowana jest wątroba.
- r — Pacjentka ma krew w moczu.
- s — Pacjentka ma wysoką gorączkę.

Zdania złożone w tekście doktora mają następujące struktury składniowe:

- 1. $p \rightarrow q$
- 2. $r \wedge \neg s$
- 3. $\neg(r \wedge \neg p)$
- 4. $q \rightarrow s$.

Szpital A

Pokażemy, że formuły 1.–4. implikują sprzeczność. Zakładamy przy tym, że już wcześniej udowodniono pewne tezy KRZ. W naszym przypadku potrzebne będą tezy charakteryzujące implikację oraz negację implikacji (poprzez formuły, w których występuje tylko koniunkcja i negacja):

- $T1.\quad (r \rightarrow p) \leftrightarrow \neg(r \wedge \neg p)$
- $T2.\quad \neg(r \rightarrow s) \leftrightarrow (r \wedge \neg s)$.

Widać, że $T1$ oraz $T2$ są tautologiami KRZ:

- implikacja jest prawdziwa dokładnie wtedy, gdy nie jest tak, że jej poprzednik jest prawdziwy, a następnik fałszywy;
- implikacja jest fałszywa dokładnie wtedy, gdy jej poprzednik jest prawdziwy, a następnik fałszywy.

Szpital A

Budujemy dowód założeniowy:

1.	$p \rightarrow q$	założenie
2.	$r \wedge \neg s$	założenie
3.	$\neg(r \wedge \neg p)$	założenie
4.	$q \rightarrow s$	założenie
5.	$p \rightarrow s$	1,4, prawo sylogizmu hipotetycznego
6.	$r \rightarrow p$	3, T1
7.	$r \rightarrow s$	6,5 prawo sylogizmu hipotetycznego
8.	$\neg(r \rightarrow s)$	2, T2
9.	sprzeczność	7,8.

Tak więc, temu doktorowi już dziękujemy. Uciekamy ze szpitala.

Szpital B

B. Dobra. Udało Ci się uciec z tamtego szpitala. Trafiłaś do innego. Lekarz mówi:
Rozpoczął się nieodwracalny rozpad szpiku kostnego, jeśli pacjentka wymiotuje krwią i ma zaburzenia widzenia. W Pani przypadku nie ma jednak żadnych powodów do obaw! Przecież z tego, co właśnie powiedziałem wynika, że nie ma rozpadu szpiku kostnego, o ile pacjentka nie wymiotuje krwią lub nie ma zaburzeń widzenia.
Czy po usłyszeniu takiej diagnozy natychmiast opuścisz szpital na własną prośbę?
Pokażemy, że wnioskowanie lekarza ***nie*** jest dedukcyjne, tzn., że wniosek ***nie*** wynika logicznie z przesłanki. Zrobimy to skróconą metodą $0 - 1$.

Szpital B

Znajdujemy zdania proste w tekście lekarza:

- p — Pacjentka wymiotuje krwią.
- q — Pacjentka ma zaburzenia widzenia.
- r — Nastąpił rozpad szpiku kostnego.

Lekarz wnioskuje wedle następującej reguły:

$$\frac{(p \wedge q) \rightarrow r}{(\neg p \vee \neg q) \rightarrow \neg r}$$

Pokażemy, że jest to ***zawodna*** reguła wnioskowania.

Szpital B

Jak wiadomo z *Twierdzenia o dedukcji*, reguła:

$$\frac{(p \wedge q) \rightarrow r}{(\neg p \vee \neg q) \rightarrow \neg r}$$

jest niezawodna wtedy i tylko wtedy, gdy tautologią KRZ jest implikacja:

$$(*) \qquad ((p \wedge q) \rightarrow r) \rightarrow ((\neg p \vee \neg q) \rightarrow \neg r).$$

Pokażemy, że $(*)$ ***nie*** jest tautologią KRZ, a więc że tym samym badana reguła ***nie*** jest niezawodna.
Dla dowodu nie wprost przypuszczamy, że $(*)$ jest fałszywa przy jakimś wartościowaniu zmiennych zdaniowych. Wtedy:

Szpital B

1. $(p \wedge q) \rightarrow r$ jest prawdziwa.
2. $(\neg p \vee \neg q) \rightarrow \neg r$ jest fałszywa.
3. $(\neg p \vee \neg q)$ jest prawdziwa.
4. $\neg r$ jest fałszywa.
5. r jest prawdziwa.
6. Skoro $(p \wedge q) \rightarrow r$ jest prawdziwa, a r jest prawdziwa, to $p \wedge q$ może być: 6.1. prawdziwa lub 6.2. fałszywa.
7. Gdyby jednak $p \wedge q$ była prawdziwa, to zarówno p, jak i q byłaby prawdziwa, a wtedy $\neg p \vee \neg q$, jako alternatywa formuł fałszywych, sama byłaby fałszywa, a to jest sprzeczne z ustaleniem z punktu 3.
8. Zatem $p \wedge q$ jest fałszywa. Jest tak wtedy, gdy co najmniej jedna z formuł p oraz q jest fałszywa.

Szpital B

- Przypuszczenie, że formuła $(*)$ jest fałszywa przy jakimś wartościowaniu zostało więc potwierdzone. Jest ona mianowicie fałszywa np. gdy: r jest prawdziwa oraz co najmniej jedna z formuł p, q jest fałszywa.
- Zatem formuła $(*)$ ***nie*** jest tautologią KRZ.
- Stąd, badana reguła ***nie*** jest niezawodna.
- Ostatecznie, wnioskowanie lekarza ***nie*** jest dedukcyjne.

Cóż, pozostaje nam tylko doradzić: *Biegnij, Magda, biegnij.* Uciekaj z tego szpitala.

Szpital C

Szpital C. Teraz to już jesteś na intensywnej terapii. Trzeba Ci **natychmiast** podać lek zawierający jednocześnie alfaminę, betaminę oraz deltaminę. Pielęgniarce trzęsą się ręce i próbuje sobie przypomnieć:

Zaraz, jak to było... Ten stary łysy profesor coś tam o tym bredził, na tym wykładzie, podczas którego podrywałam Roberta... Każda alfamina jest też betaminą. Niektóre betaminy są deltaminami. Jeżeli lek jest betaminą lub deltaminą, to jest również alfaminą. Co prawda, nie ma leku, który jest alfaminą i betaminą, lecz nie jest deltaminą. Ale czy to wszystko oznacza, że jest lek, którego ona potrzebuje?! Jezus, Maria!!! Dla niej nie ma ratunku!

Ona rozmyśla, czas płynie. **Twój** czas właśnie się **kończy**... Bo przecież nie ma dla Ciebie ratunku, prawda?

Szpital C

Oznaczmy:

- A — zbiór alfamin;
- B — zbiór betamin;
- D — zbiór deltamin.

Aby Cię uratować, musimy pokazać, że zbiór $A \cap B \cap C$ jest niepusty. Załóżmy, że jest prawdą to, co pielęgniarka pamięta z wykładu (gdy, przypominamy, musiała dzielić uwagę na słuchanie starego łysola i podrywanie Roberta):

1. $A \subseteq B$, tj. $A - B = \emptyset$
2. $B \cap D \neq \emptyset$
3. $(B \cup D) \subseteq A$, tj. $(B \cup D) - A = \emptyset$
4. $(A \cap B) \cap D' = \emptyset$.

Pokażemy, że już z samych tylko założeń 2. oraz 3. wynika, że $A \cap B \cap D \neq \emptyset$. Nadto, pokażemy, że zgromadzona przez pielęgniarkę wiedza jest semantycznie niesprzeczna.

Szpital C

Ponieważ, na mocy 3., $B \cup D \subseteq A$, więc zarówno $B \subseteq A$, jak i $D \subseteq A$. Oznacza to, że $B \cap A = B$ oraz $D \cap A = D$. Stąd, $(B \cap A) \cap (D \cap A) = B \cap D$. Zatem $A \cap B \cap D = B \cap D$. Ponieważ, na mocy 2., $B \cap D \neq \emptyset$, więc także $A \cap B \cap D \neq \emptyset$. Jesteś uratowana. Teoretycznie, na razie. Inaczej mówiąc, Twoja rodzina może, w przypadku Twojego zgonu spowodowanego zaniechaniem podania Ci na czas stosownego leku, żądać od Narodowego Funduszu Zdrowia np. miliona PLN odszkodowania: wystarczy przedstawić powyższy dowód jako uzasadnienie. Mamy jednak nadzieję, że pielęgniarka szybko upora się z rozważanym problemem — logicznie banalnym, lecz decydującym o Twoim życiu. Z 1. mamy: $A \cap B = A$. Ponieważ $A \cap B = (A \cap B \cap D) \cup (A \cap B \cap D')$, więc, na mocy 4., $A \cap B = A \cap B \cap D$. Stąd $A = A \cap B \cap D$. Wyżej pokazaliśmy, że $B \cap A = B$, a zatem mamy $A = B$ (bo $A = A \cap B = B \cap A = B$). Z 4. oraz z równości $A = A \cap B$ mamy: $A - D = \emptyset$, czyli $A \subseteq D$. Stąd i z pokazanej wyżej inkluzji $D \subseteq A$ mamy: $A = D$. Oczywiście, wtedy także $B = D$.

Szpital C

Ostatecznie zatem $A = B = D = A \cap B \cap D \neq \emptyset$. Okazuje się, że jeśli stary łysol mówił prawdę, to:

- ***jest*** dla Ciebie ratunek, bo $A \cap B \cap D \neq \emptyset$;
- nadto, ***cokolwiek*** to śliczne dziewczę w pielęgniarskim czepku Ci zaaplikuje — alfaminę, betaminę, czy też deltaminę, to tym samym jednocześnie zaaplikuje Ci ***wszystkie*** te leki, bo $A = B = D = A \cap B \cap D$.

Robertowi życzymy, aby mógł być dumny ze swojej pielęgniareczki, która w porę zadziała, co dla Ciebie z kolei, młoda Humanistko, oznacza, że kwotę przeznaczoną na cudną sukienkę do trumienki możesz przehulać lub roztrwonić, z fantazją na jaką Cię stać. Albo zaoszczędzić. Kupić podręcznik logiki.

Pierzaste, Myszaste i Ogoniaste

Przykład.
Przypuśćmy, że ***fałszywe*** są zdania: *Nie wszystkie Pierzaste są Myszaste. Wśród Myszastych są Ogoniaste. Nie ma Ogoniastych.*
Co ***prawdziwie*** można wtedy powiedzieć o związkach między Ogoniastymi a Pierzastymi?

Są różne metody rozwiązania tego zadania. Wykorzystamy metodę diagramów Venna.
Oznaczmy:

- M — zbiór wszystkich Myszastych;
- P — zbiór wszystkich Pierzastych;
- O — zbiór wszystkich Ogoniastych.

Pierzaste, Myszaste i Ogoniaste

Wiemy, że ***fałszywe*** są zdania:

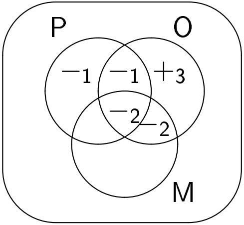
$$P - M \neq \emptyset$$
$$M \cap O \neq \emptyset$$
$$O = \emptyset$$

Zatem ***prawdziwe*** są zdania:

$$\begin{array}{ll} 1) & P - M = \emptyset \\ 2) & M \cap O = \emptyset \\ 3) & O \neq \emptyset \end{array}$$

Na diagramie Venna dla zbiorów P, O oraz M zaznaczamy, które obszary są ***puste*** (stawiając w takim obszarze znak „$-$”), a które ***niepuste*** (stawiając w takich obszarach znak „$+$”); indeksy wskazują, na podstawie którego z powyższych zdań umieszczono daną informację:

Pierzaste, Myszaste i Ogoniaste



Z rysunku możemy odczytać, co da się prawdziwie powiedzieć o zależnościach między zakresami nazw *Pierzaste* oraz *Ogoniaste*. Widać mianowicie, że:

- Żaden Pierzasty nie jest Ogoniasty.
- Są Ogoniaste, które nie są Pierzaste.

Pierzaste, Myszaste i Ogoniaste

Przykład.
Przypuśćmy, że ***fałszywe*** są zdania: *Pewien Myszasty jest Pierzasty. Nie wszystkie Myszaste są Ogoniaste. Myszastych nie ma.*
Co ***prawdziwie*** można wtedy powiedzieć o związkach między Pierzastymi a Ogoniastymi?

Oznaczmy, jak poprzednio:

- M — zbiór wszystkich Myszastych;
- P — zbiór wszystkich Pierzastych;
- O — zbiór wszystkich Ogoniastych.

Pierzaste, Myszaste i Ogoniaste

Wiemy, że ***fałszywe*** są zdania:

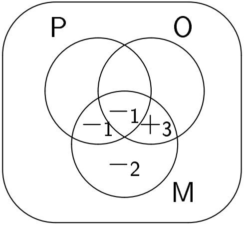
$P \cap M \neq \emptyset$
$M - O \neq \emptyset$
$M = \emptyset$

Zatem ***prawdziwe*** są zdania:

1) $P \cap M = \emptyset$
2) $M - O = \emptyset$
3) $M \neq \emptyset$

Pierzaste, Myszaste i Ogoniaste

Na diagramie Venna dla zbiorów *P*, *O* oraz *M* zaznaczamy, które obszary są ***puste***, a które ***niepuste***:



Z rysunku możemy odczytać, co da się prawdziwie powiedzieć o zależnościach między zakresami nazw *Pierzaste* oraz *Ogoniaste*. Widać mianowicie, że istnieją Ogoniaste, które nie są Pierzaste.

Uwaga na kapustę

Wnioskowanie:
Ktoś donosi na wszystkich. Są zatem tacy, którzy donoszą na siebie nawzajem.
jest prowadzone wedle reguły:

$$\frac{\exists x \forall y\ xPy}{\exists y \exists x\ (xPy \wedge yPx)}$$

Pokażemy, że jest ona niezawodna, a więc, że w każdej interpretacji, w której prawdziwa jest przesłanka, prawdziwy jest też wniosek. Zgodnie z regułami sztuki, przekonamy wszelkich niedowiarków o tym w ten sposób, iż wykluczymy możliwość, aby istniała interpretacja, w której prawdziwa jest przesłanka oraz zaprzeczenie wniosku. Istotnie, drzewo, w którego pniu jest przesłanka oraz zaprzeczony wniosek ma wszystkie gałęzie zamknięte:

$$\exists x \forall y\; xPy \quad {}^{1.\surd a}$$

$$\neg \exists y \exists x\, (xPy \wedge yPx) \quad {}^{3.\star a}$$

$$(1) \quad \forall y\; aPy \quad {}^{2.\star a}$$

$$(2) \quad aPa$$

$$(3) \quad \neg \exists x\, (xPa \wedge aPx) \quad {}^{4.\star a}$$

$$(4) \quad \neg (aPa \wedge aPa) \quad {}^{5.\neg\wedge}$$

$$\begin{array}{cc} (5_l) \quad \neg aPa & (5_p) \quad \neg aPa \\ \times_{2,5_l} & \times_{2,5_p} \end{array}$$

Wszystkie gałęzie zamknięte. Reguła niezawodna. Wniosek wynika logicznie z przesłanki.

Wielkie Twierdzenie Apta

Na koniec, przytoczmy za Profesorem Markiem Tokarzem (dla uciechy) Wielkie Twierdzenie Apta jako świadectwo tego, że nie zawsze trzeba obawiać się matematycznego żargonu:

WTA: Każda przeliczalnie zwarta przestrzeń Lindelöfa jest zwarta.

Brzmi tajemniczo (a więc mądrze), prawda? Ale, przestrzeń jest:

- przeliczalnie zwarta, gdy z każdego jej pokrycia (zbiorami otwartymi) można wybrać pokrycie przeliczalne;
- przestrzenią Lindelöfa, gdy z każdego jej przeliczalnego pokrycia (zbiorami otwartymi) można wybrać pokrycie skończone;
- zwarta, gdy z każdego jej pokrycia (zbiorami otwartymi) można wybrać pokrycie skończone.

Wielkie Twierdzenie Apta

Niech teraz A, B i C będą odpowiednimi (być może skomplikowanymi, to nieistotne) formułami takimi, iż właściwe są odczytania:

- $A \rightarrow C$: Z każdego pokrycia przestrzeni (zbiorami otwartymi) można wybrać pokrycie skończone.
- $A \rightarrow B$: Z każdego pokrycia przestrzeni (zbiorami otwartymi) można wybrać pokrycie przeliczalne.
- $B \rightarrow C$: Z każdego przeliczalnego pokrycia przestrzeni (zbiorami otwartymi) można wybrać pokrycie skończone.

Wtedy WTA sprowadza się do sprawdzenia prawdziwości formuły:

$$(\bigstar) \quad ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C),$$

a to potrafi uczynić nawet Pani Przedszkolanka, ponieważ $(\bigstar)$ jest tautologią Klasycznego Rachunku Zdań.