METALOGIKA:
WYBRANE TWIERDZENIA METALOGICZNE

JERZY POGONOWSKI

www.logic.amu.edu.pl

1. Ważne twierdzenia metalogiczne

W tej części wykładów podamy wybrane przykłady ważnych twierdzeń metalogicznych, związanych przede wszystkim z klasyczną logiką pierwszego rzędu. Poświęcimy też nieco uwagi ***metodom*** dowodzenia tych twierdzeń.

Słuchacze elementarnego kursu logiki mieli być może okazję zdobyć informacje o niektórych twierdzeniach metalogicznych. Z pewnością wszyscy słyszeli o twierdzeniach o trafności i pełności, twierdzeniu o zwartości, twierdzeniu Löwenheima-Skolema, twierdzeniach Gödla.

Być może, ramy czasowe kursu pozwalały na omówienie innych jeszcze twierdzeń, np.:

- Twierdzenia Löwenheima-Skolema-Tarskiego.
- Twierdzenia o trafności i pełności.
- Twierdzenie o zwartości.
- Twierdzenie o dedukcji.
- Twierdzenie Herbranda.
- *Hauptsatz* Gentzena.
- Twierdzenie Skolema (o eliminacji kwantyfikatorów egzystencjalnych).
- Twierdzenie o neutralności logiki względem stałych pozalogicznych (Grzegorczyk).
- Twierdzenia o postaciach normalnych.
- Twierdzenie Churcha (o nierozstrzygalności klasycznej logiki kwantyfikatorów).
- Twierdzenie Gödla (o nierozstrzygalności arytmetyki liczb naturalnych).
- Twierdzenie Gödla (o niedowodliwości niesprzeczności arytmetyki).
- Twierdzenie Rossera.

- Twierdzenie Löba.
- Twierdzenie Tarskiego (o niedefiniowalności pojęcia prawdy arytmetycznej).
- Lemat interpolacyjny Craiga.
- Twierdzenie Betha.
- Twierdzenie Trachtenbrota.
- Twierdzenie o niewspółmożliwości (Tennant).
- Wybrane twierdzenia z teorii modeli.
- Wybrane twierdzenia z teorii rekursji.

W niniejszych wykładach nie będziemy przypominać wszystkich tych twierdzeń oraz ich dowodów. Ograniczmy się do analizy dowodów niektórych z podanych wyżej twierdzeń. W szczególności, przyjrzymy się różnym metodom dowodzenia twierdzenia o pełności. Interesować nas będzie, jakie środki matematyczne są wykorzystywane w tych dowodach. W konsekwencji, powinno to pozwolić na uświadomienie sobie, jakie założenia czynimy w metalogice oraz jakie musimy przyjmować w niej ograniczenia.

1.1. Dowody twierdzenia o pełności

W elementarnym kursie logiki dowodzi się twierdzenia o trafności oraz pełności KRP. Twierdzenie o trafności KRP głosi, że każda teza KRP jest tautologią KRP i jest stosunkowo łatwe w dowodzie. Trudniejsze do udowodnienia jest twierdzenie o pełności KRP, głoszące, że każda tautologia KRP jest tezą KRP.

Przyjrzymy się kilku metodom dowodu twierdzenia o pełności KRP, zwracając szczególną uwagę na środki matematyczne używane w dowodach.

Będziemy istotnie wykorzystywać artykuł Jana Zygmunta *A survey of the methods of proof of the Gödel-Malcev's completeness theorem*, zamieszczony w podanej w odnośnikach bibliograficznych monografii pod redakcją Stanisława Surmy, szczegółowo omawiający różne wersje tego twierdzenia oraz sposoby jego dowodu. Poniżej podajemy szkic dowodu, wykorzystujący metodę Henkina. Ograniczamy się przy tym jedynie do omówienia głównej konstrukcji, pomijając szczegółowe uzasadnienia. W rozważanym ujęciu buduje się pewien model z „materiału językowego", tj. ze stosownego zbioru stałych indywidualnych. Korzysta się z niektórych pojęć metalogicznych (teoria, teoria niesprzeczna, teoria zupełna), o których wspominamy krótko w punkcie 20.8. poniżej. W poprzednich wykładach wspominano już także o metodzie budowania modelu ilorazowego, wykorzystywanej poniżej.

TWIERDZENIE 20.4.2.1.

Każda tautologia KRP jest tezą systemu aksjomatycznego KRP.

DOWÓD (SZKIC).

Wprowadzamy, na potrzeby niniejszego dowodu, kilka użytecznych oznaczeń:

- S oznacza zbiór wszystkich formuł języka KRP o sygnaturze złożonej z jednego predykatu jednoargumentowego P, jednego predykatu dwuargumentowego Q oraz predykatu identyczności $\doteq$. Ograniczenie do takiej sygnatury nie powoduje utraty ogólności dowodu.

- Przez Sys oznaczamy rodzinę wszystkich *systemów dedukcyjnych* (wszystkich *teorii*) relacji konsekwencji $\vdash_{krp}$, tj. rodzinę tych wszystkich zbiorów formuł X, dla których zachodzi: $C_{krp}(X) = X$.

- Przez Con oznaczamy rodzinę wszystkich *niesprzecznych* zbiorów formuł, tj. takich zbiorów X, dla których $C_{krp}(X) \neq S$ (warunek ten jest równoważny warunkowi: nie istnieje formuła α taka, że $X \vdash_{krp} \alpha$ oraz $X \vdash_{krp} \neg\alpha$).

- Przez Com oznaczamy rodzinę wszystkich *zupełnych* zbiorów formuł, tj. takich zbiorów X, dla których: $X \vdash_{krp} \alpha$ lub $X \vdash_{krp} \neg\alpha$, dla dowolnej formuły α.

Do (schematów) aksjomatów podanych powyżej (w 20.1.1.) dodajemy aksjomaty dla predykatu identyczności $\doteq$, omówione w wykładzie dotyczącym tablic analitycznych dla KRP z identycznością (wykłady 18–19).

W dowodzie twierdzenia wykorzystuje się Lemat Lindenbauma (zob. punkt 20.8.) oraz twierdzenie o dedukcji nie wprost (twierdzenie 20.2.2.).

Dowód twierdzenia dzieli się w sposób naturalny na dwie części:

- I. Dowód, iż każdy niesprzeczny zbiór formuł języka KRP ma model.

- II. Dowód (nie wprost), że każda tautologia KRP jest tezą KRP, wykorzystujący część I.

I. KONSTRUKCJA MODELU.

Rozpoczynamy od języka L o sygnaturze wspomnianej wyżej. Niech

$$C = \{c_i : i \in \omega\}$$

będzie zbiorem stałych indywidualnych (ω jest tu zbiorem wszystkich skończonych liczb porządkowych). Przez $L(C)$ oznaczamy rozszerzenie języka L otrzymane poprzez dodanie do L wszystkich stałych indywidualnych ze zbioru C.

Niech Y będzie dowolnym niesprzecznym i zupełnym systemem dedukcyjnym w języku $L(C)$. Definiujemy relację $\sim$ na zbiorze C w sposób następujący:

$$c_i \sim c_j \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } c_i \doteq c_j \text{ należy do } Y.$$

Wykorzystując własności Y można pokazać, że $\sim$ jest relacją równoważności w C. Niech $c_i^{\sim}$ oznacza klasę równoważności elementu c_i względem tej relacji.

Budujemy strukturę relacyjną

$$\mathfrak{M}(Y, C) = \langle U, P, Q, \{s_i : i \in \omega\}, id \rangle$$

w sposób następujący:

- (i) $U = \{c_i^{\sim} : c_i \in C\}$
- (ii) $s_i = c_i^{\sim}$
- (iii) $c_i^{\sim} \in P$ wtedy i tylko wtedy, gdy $P(c_i) \in Y$
- (iv) $(c_i^{\sim}, c_j^{\sim}) \in Q$ wtedy i tylko wtedy, gdy $Q(c_i, c_j) \in Y$
- (v) $(c_i^{\sim}, c_j^{\sim}) \in id$ wtedy i tylko wtedy, gdy $c_i \doteq c_j \in Y$.

Z powyższego wynika, że id jest relacją identyczności w uniwersum U.

Powiemy, że zbiór zdań Y spełnia warunek (H) (warunek Henkina) w zbiorze stałych C, gdy dla każdego zdania egzystencjalnego $\exists x \ \alpha(x)$ z faktu, że $\exists x \ \alpha(x)$ jest elementem Y wynika, iż istnieje stała $c \in C$ taka, że $\alpha(x/c)$ jest elementem Y.

Dowodzi się teraz szeregu lematów, które posłużą do wykazania, że każdy niesprzeczny zbiór formuł ma model.

LEMAT 1.

Jeśli Y jest zbiorem zdań języka $L(C)$ takim, że:

- (1) Y jest teorią niesprzeczną i zupełną (tj. elementem rodziny $Sys \cap Con \cap Com$),
- (2) Y spełnia warunek (H) w zbiorze C,

to dla dowolnego zdania α:

- (3) $\mathfrak{M}(Y, C) \models \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \in Y$.

DOWÓD.

Załóżmy (1) i (2). Dowód (3) prowadzi się przez indukcję strukturalną po budowie formuły α.

Dla formuł atomowych równoważność (3) zachodzi na mocy definicji modelu $\mathfrak{M}(Y, C)$.

Załóżmy, że (3) zachodzi dla α_1 i α_2. Trzeba pokazać, że zachodzi wtedy także dla: $\neg\alpha_1$, $\alpha_1 \wedge \alpha_2$, $\alpha_1 \vee \alpha_2$, $\alpha_1 \rightarrow \alpha_2$, $\alpha_1 \equiv \alpha_2$, $\exists x \ \alpha_1(x)$ oraz $\forall x \ \alpha_1(x)$. Pokażemy to dla $\neg\alpha_1$, $\alpha_1 \wedge \alpha_2$ oraz $\exists x \ \alpha_1(x)$. Dowody w pozostałych przypadkach przebiegają podobnie.

Przy założeniu, że (3) zachodzi dla α_1, następujące warunki są równoważne:

- $\mathfrak{M}(Y, C) \models \neg\alpha_1$
- nie zachodzi $\mathfrak{M}(Y, C) \models \alpha_1$
- $\alpha_1 \notin Y$
- $\neg\alpha_1 \in Y$.

Z kolei, przy założeniu, że (3) zachodzi dla α_1 oraz α_2, następujące warunki są równoważne:

- $\mathfrak{M}(Y, C) \models \alpha_1 \wedge \alpha_2$
- $\mathfrak{M}(Y, C) \models \alpha_1$ oraz $\mathfrak{M}(Y, C) \models \alpha_2$
- $\alpha_1 \in Y$ oraz $\alpha_2 \in Y$
- $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \in Y$.

Załóżmy teraz, że $\exists x\ \alpha_1(x)$ jest zdaniem oraz że:

- (4) warunek (3) zachodzi dla dowolnej formuły o postaci $\alpha_1(c)$.

Załóżmy ponadto, że:

- (5) $\mathfrak{M}(Y, C) \models \exists x\ \alpha_1(x)$

oraz przypuśćmy, dla dowodu nie wprost, że:

- (6) $\exists x\ \alpha_1(x) \notin Y$.

Otrzymujemy wtedy kolejno:

- (7) $\forall x\ \neg\alpha_1(x) \in Y$, na mocy (1) i (6),
- (8) $\neg\alpha_1(c) \in Y$ dla wszystkich $c \in C$, na mocy (1) oraz (A14),
- (9) $\mathfrak{M}(Y, C) \models \neg\alpha_1(c)$ dla wszystkich $c \in C$, na mocy założenia indukcyjnego (4),
- (10) dla wszystkich $c \in C$: nie zachodzi $\mathfrak{M}(Y, C) \models \alpha_1(c)$, na mocy definicji relacji $\models$,
- (11) istnieje $c \in C$ i wartościowanie w takie, że $\mathfrak{M}(Y, C) \models_{w_x^c \sim} \alpha_1(x)$,
- (12) istnieje $c \in C$ taka, że $\mathfrak{M}(Y, C) \models \alpha_1(c)$, na mocy definicji relacji $\models$,
- (13) sprzeczność: (9), (12).

Tak więc, przypuszczenie (6) trzeba odrzucić i otrzymujemy:

- (14) $\exists x\ \alpha_1(x) \in Y$.

Załóżmy teraz, że zachodzi (14). Wtedy, na mocy (2), istnieje $c \in C$ taka, że:

- (15) $\mathfrak{M}(Y, C) \models \alpha_1(c)$.

Na mocy definicji relacji $\models$ otrzymujemy stąd:

- (16) $\mathfrak{M}(Y, C) \models \exists x\ \alpha_1(x)$.

Pokazaliśmy więc, że (3) zachodzi również dla formuł egzystencjalnie skwantyfikowanych. Ostatecznie, otrzymujemy z powyższego, że (3) zachodzi dla wszystkich formuł.

LEMAT 2.

Jeśli α oraz β są zdaniami, to z $X \cup \{\alpha\} \vdash_{krp} \beta$ wynika $X \vdash_{krp} \alpha \rightarrow \beta$.

DOWÓD.

Zobacz dowód twierdzenia o dedukcji wprost.

LEMAT 3.

Jeżeli:

- (1) stała indywidualna c nie występuje w formułach ze zbioru X,
- (2) $\alpha(x)$ powstaje z $\alpha(c)$ przez wstawienie zmiennej x w miejsce c w formule $\alpha(c)$ oraz x nie jest w $\alpha(x)$ na żadnym miejscu związana,
- (3) $X \vdash_{krp} \alpha(c)$,

to

- (4) $X \vdash_{krp} \alpha(x)$.

DOWÓD.

Jest to w istocie twierdzenie o tym, że KRP nie wyróżnia żadnej stałej indywiduowej.

Załóżmy, że $X \vdash_{krp} \alpha(c)$. Wtedy istnieje dowód $\langle \gamma_1, \ldots, \gamma_n \rangle$ formuły $\alpha(c)$ ze zbioru założeń X. Możemy założyć, że formuły tego ciągu nie zawierają zmiennej x. Spośród formuł $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ przynajmniej niektóre zawierają stałą c. Przez $\gamma_i(x)$ oznaczmy formułę powstałą poprzez zastąpienie wszystkich wystąpień stałej c w γ_i zmienną x.

Przez indukcję po i pokazuje się, że wszystkie zdania $\forall x\ \gamma_i(x)$ są konsekwencjami X. W szczególności więc, $\forall x\ \gamma_n(x)$ jest konsekwencją X. Ponieważ $\gamma_n(x)$ jest identyczna z $\alpha(x)$, otrzymujemy, iż $\forall x\ \alpha(x)$ jest konsekwencją X. Na mocy (A14*) i reguły odrywania, również $\alpha(x)$ jest konsekwencją X, czyli $X \vdash_{krp} \alpha(x)$.

LEMAT 4.

Jeżeli:

- (1) $X \in Con$
- (2) stała c nie występuje w elementach zbioru X,
- (3) $\exists x\ \alpha(x)$ jest elementem X,

to

- (4) $X \cup \{\alpha(x/c)\} \in Con$.

DOWÓD.

Załóżmy, że zachodzą (1)–(3) i przypuśćmy, dla dowodu nie wprost, że:

- (5) $X \cup \{\alpha(x/c)\} \notin Con$.

Otrzymujemy wtedy kolejno:

- (6) $X \cup \{\alpha(c)\} \vdash_{krp} \neg\alpha(c)$, na mocy definicji Con,
- (7) $X \vdash_{krp} \alpha(c) \rightarrow \neg\alpha(c)$, na mocy lematu 2,
- (8) $X \vdash_{krp} \neg\alpha(c)$, na mocy tezy $(\beta \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \neg\beta$,
- (9) $X \vdash_{krp} \neg\alpha(x)$, na mocy (2) oraz lematu 3,
- (10) $X \vdash_{krp} \forall x\, \neg\alpha(x)$, na mocy reguły generalizacji,
- (11) $X \vdash_{krp} \neg\exists x\, \alpha(x)$, na mocy prawa De Morgana,
- (12) sprzeczność: (3) i (11).

Tak więc, trzeba odrzucić przypuszczenie (5) i dowód lematu jest zakończony.

Do sformułowania następnego lematu potrzeba kilku pojęć pomocniczych. Dla każdej liczby naturalnej i niech C_i będzie nieskończonym ciągiem wzajemnie jednoznacznym $\langle c_j^i \rangle$, gdzie j przebiega wszystkie liczby naturalne. Każdy ciąg C_i jest zatem ciągiem bez powtórzeń. Niech $C = \bigcup_{i \in \omega} C_i$.

Określamy ciąg języków L_n. Za L_0 bierzemy L. Język L_n otrzymujemy z L_0 poprzez dodanie do niego zbioru stałych $\bigcup_{i=1}^{n} C_i$. Przez $S_{(n)}$ rozumiemy zbiór zdań języka L_n.

LEMAT 5.

Jeżeli:

- (1) $X \in Con$,
- (2) $X \subseteq S_{(n)}$,

to istnieje zbiór Y taki, że:

- (3) $X \subseteq Y$,
- (4) $Y \subseteq S_{(n+1)}$
- (5) $Y \in Con$,

- (6) Y spełnia względem X warunek (H) w zbiorze $\bigcup_{i=1}^{n+1} C_i$, tj. dla dowolnego zdania $\exists x\ \alpha(x) \in X$ istnieje stała $c \in \bigcup_{i=1}^{n+1} C_i$ taka, że $\alpha(c) \in Y$.

DOWÓD.

Niech $\langle \exists x_{k_j} \alpha_j(x_{k_j}) \rangle$ będzie ciągiem wszystkich zdań egzystencjalnych należących do zbioru X. Zdefiniujmy:

- (7) $Y = X \cup \{\alpha_j(c_j^{n+1}) : j \geqslant 1\}$.

Na mocy (1), definicji zbiorów C_i oraz lematu 4 otrzymujemy, że zachodzi warunek (5). Z kolei, (3), (4) oraz (6) są bezpośrednimi konsekwencjami (7).

LEMAT 6.

Jeżeli:

- (1) $X \subseteq S_{(0)}$,
- (2) $X \in Con$,

to istnieje zbiór Y taki, że:

- (3) Y jest zbiorem zdań języka $L(C)$,
- (4) $X \subseteq Y$,
- (5) $Y \in Sys \cap Con \cap Com$,
- (6) Y spełnia warunek (H) w C.

DOWÓD.

Załóżmy, że zachodzą (1) i (2). Zbudujemy ciąg zbiorów:

- (7) $X_0, X_0^+, X_1, X_1^+, X_2, X_2^+, \ldots$

zdefiniowanych warunkami:

- (7.1) $X_0 = X_0^+ = X$.
- (7.2) X_n, dla $n \geqslant 1$, jest niesprzecznym rozszerzeniem X_{n-1}^+, które istnieje na mocy lematu 5.
- (7.3) X_n^+, dla $n \geqslant 1$, jest niesprzeczną i zupełną teorią zawierającą X_n (istniejącą na mocy Lematu Lindenbauma, zob. punkt 20.8.); ponadto, zarówno X_n, jak i X_n^+ są zbiorami formuł języka L_n.

Zdefiniujmy:

- (8) $Y = \bigcup_{i\in\omega} (X_i \cup X_i^+)$.

Na mocy (7) oraz (8) mamy:

- (9) $Y = \bigcup_{i\in\omega} X_i^+$.

Z definicji (8) wynika, że:

- (10) Y spełnia warunki (3) oraz (4).

Z (9) oraz twierdzenia o sumie niesprzecznych teorii zupełnych (zob. punkt 20.8.) wynika, że:

- (11) Y spełnia warunek (5).

Trzeba jeszcze udowodnić (6). Załóżmy, że:

- (12) $\exists x\ \alpha(x) \in Y$

Na mocy (9) otrzymujemy stąd, że istnieje n taka, że:

- (13) $\exists x\ \alpha(x) \in X_{n-1}^+$.

Na mocy (13) oraz (7.2), istnieje $c \in C$ taka, że:

- (14) $\alpha(c) \in X_n$.

Z (8) oraz (14) wynika, że:

- (15) $\alpha(c) \in Y$.

Wreszcie, na mocy (12) oraz (15), otrzymujemy:

- (16) Y spełnia warunek (6).

Na mocy lematów 1 i 6 otrzymujemy:

KAŻDY NIESPRZECZNY ZBIÓR ZDAŃ MA MODEL.

II. KAŻDA TAUTOLOGIA KRP JEST TEZĄ KRP.

Załóżmy, że α jest tautologią KRP i przypuśćmy, że α nie jest tezą KRP. Pokażemy, że przypuszczenie to prowadzi do sprzeczności, a zatem trzeba je odrzucić.

Przypominamy: uniwersalne domknięcie formuły α to formuła powstająca z α poprzez poprzedzenie α kwantyfikatorami generalnymi wiążącymi wszystkie zmienne wolne w α. Uniwersalne domknięcie dowolnej formuły jest oczywiście zdaniem.

Jeśli α nie jest tezą, to również jej uniwersalne domknięcie $\overline{\alpha}$ nie jest tezą. Gdyby bowiem $\overline{\alpha}$ było tezą, to (na mocy (A14)) także α byłaby tezą, wbrew przypuszczeniu.

Skoro $\overline{\alpha}$ nie jest tezą, to ***nie zachodzi*** $\emptyset \vdash_{krp} \overline{\alpha}$. Ponieważ $\overline{\alpha}$ jest zdaniem, więc można skorzystać z twierdzenia o dedukcji nie wprost: ***nie zachodzi*** $\emptyset \vdash_{krp} \overline{\alpha}$ wtedy i tylko wtedy, gdy ***nie istnieje*** formuła β taka, że:

$$\{\neg\overline{\alpha}\} \vdash_{krp} \{\beta, \neg\beta\}.$$

Oznacza to, że zbiór $\{\neg\overline{\alpha}\}$ jest niesprzeczny. Na mocy części I dowodu, istnieje model $\mathfrak{M}$ tego zbioru, a zatem:

$$(\dagger) \quad \mathfrak{M} \models \neg\overline{\alpha}.$$

Z założenia, α jest tautologią. Również $\overline{\alpha}$ jest więc tautologią, ponieważ reguła generalizacji zachowuje własność bycia tautologią. Tak więc, $\overline{\alpha}$ jest prawdziwa w każdej strukturze relacyjnej (stosownej sygnatury). W szczególności, $\overline{\alpha}$ jest prawdziwa w każdej strukturze relacyjnej $\mathfrak{M}$, skonstruowanej na mocy części I dowodu:

$$(\ddagger) \quad \mathfrak{M} \models \overline{\alpha}.$$

Warunki $(\dagger)$ oraz $(\ddagger)$ są jednak wzajem sprzeczne, ze względu na definicję relacji $\models$. Tak więc, przypuszczenie, że α nie jest tezą należy odrzucić. Ostatecznie, każda tautologia KRP jest tezą KRP.

* * *

Powiemy teraz kilka słów o innych metodach dowodu twierdzenia o pełności KRP.

Konsekwencja: twierdzenie o zwartości

TWIERDZENIE 20.5.1.

Dla dowolnego zbioru formuł X oraz formuły α zachodzi następująca równoważność:

- $X \vdash_{krp} \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy $Y \vdash_{krp} \alpha$ dla pewnego skończonego zbioru formuł $Y \subseteq X$.

DOWÓD.

Dowód implikacji odwrotnej $\Leftarrow$ jest natychmiastowy: skoro $Y \vdash_{krp} \alpha$ dla pewnego skończonego zbioru formuł $Y \subseteq X$, to — ze względu na monotoniczność relacji $\vdash_{krp}$ — zachodzi także $X \vdash_{krp} \alpha$.

Dowód implikacji prostej $\Rightarrow$ również nie jest trudny. Skoro $X \vdash_{krp} \alpha$, to istnieje dowód α z X w KRP, a więc skończony ciąg formuł $\langle \gamma_1, \ldots, \gamma_n \rangle$ taki, że γ_n jest identyczna z α, a każdy element ciągu $\langle \gamma_1, \ldots, \gamma_n \rangle$ jest bądź aksjomatem opartym na którymś ze schematów (A1)–(A17), bądź wynikiem zastosowania reguły podstawiania lub reguły generalizacji do wyrazów wcześniejszych w tym ciągu. Niech teraz Y będzie zbiorem tych wyrazów ciągu $\langle \gamma_1, \ldots, \gamma_n \rangle$, które są elementami zbioru X. Zbiór Y jest oczywiście skończony. Jest także oczywiste, że można zbudować dowód w KRP formuły α w oparciu o zbiór Y, czyli że $Y \vdash_{krp} \alpha$.

W dowodzie powyższego twierdzenia odwołujemy się w istocie do finitystyczności operatora konsekwencji C_{krp}.

Konsekwencja: niesprzeczność KRP

Przypomnijmy: mówimy, że zbiór formuł X jest (syntaktycznie) ***niesprzeczny*** wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje formuła α taka, że $X \vdash_{krp} \alpha$ oraz $X \vdash_{krp} \neg\alpha$. W przeciwnym przypadku mówimy, że X jest (syntaktycznie) ***sprzeczny***.

TWIERDZENIE 20.6.1.

Zbiór wszystkich tez KRP jest niesprzeczny.

DOWÓD.

Przypuśćmy, dla dowodu nie wprost, że zbiór wszystkich tez KRP nie jest niesprzeczny. Istnieje wtedy formuła α taka, że zarówno α, jak i $\neg\alpha$ są konsekwencjami zbioru wszystkich tez KRP, czyli są tezami KRP.

Na mocy twierdzenia o pełności, zarówno α, jak i $\neg\alpha$ są tautologiami KRP, czyli są obie spełnione w każdej interpretacji. Niech $\mathfrak{M}$ będzie dowolną strukturą relacyjną, a w dowolnym wartościowaniem w $\mathfrak{M}$. Wtedy zachodziłoby zarówno $\mathfrak{M} \models_w \alpha$, jak i $\mathfrak{M} \models_w \neg\alpha$, co jest jednak sprzeczne z definicją relacji spełniania. Ostatecznie zatem nie istnieje formuła α o podanej wyżej własności, a więc zbiór wszystkich tez KRP jest (syntaktycznie) niesprzeczny.

Konsekwencja: twierdzenie Löwenheima-Skolema

Choć historycznie rzecz biorąc, twierdzenie Löwenheima-Skolema poprzedza twierdzenie o pełności, to obecnie zwykle to pierwsze wyprowadza się z tego drugiego.

2. Wybrane twierdzenia klasycznej teorii modeli

— dokonaj wyboru

3. Twierdzenia dotyczące (nie)rozstrzygalności oraz (nie)-zupełności

— przypomnienie: PA

3.1. Pojęcie obliczalności i jego matematyczne reprezentacje

— reprezentowalność funkcji rekurencyjnych w PA

3.2. Arytmetyzacja składni

— numeracja Gödlowska

3.3. Twierdzenia: Churcha, Gödla, Tarskiego, Rossera, Löba

— nierozstrzygalność KRP
— twierdzenia o niezupełności, nierozstrzygalności, itd. niektórych teorii pierwszego rzędu

4. Twierdzenie Herbranda i TA

Twierdzenie Herbranda oferuje swoistą „redukcję" KRP do KRZ, oczywiście w ściśle sprecyzowanym sensie.

Przypomnijmy niektóre potrzebne pojęcia (uniwersa Herbranda, modele Herbranda).

Jeśli S jest dowolnym zbiorem formuł języka KRP (ustalonej sygnatury), to przez ***uniwersum Herbranda*** dla S rozumiemy zbiór H_S określony indukcyjnie następująco:

- (i) jeśli stała indywiduowa a_k występuje w jakiejś formule ze zbioru S, to $a_k \in H_S$
- (ii) jeśli $t_1, \ldots, t_{n_j}$ są dowolnymi termami należącymi do H_S, to $f_j^{n_j}(t_1, \ldots, t_{n_j})$ także należy do H_S, dla dowolnego symbolu funkcyjnego $f_j^{n_j}$.

Jeśli w formułach z S nie występuje żadna stała indywiduowa, to warunek (i) definicji zbioru H_S zastępujemy warunkiem: $a_k \in H_S$ dla dowolnie wybranej stałej indywiduowej a_k.

Jeśli w formułach z S występuje co najmniej jeden symbol funkcyjny, to H_S jest zbiorem nieskończonym.

Uniwersum Herbranda dla danego zbioru formuł S jest zatem zbiorem wszystkich termów bez zmiennych utworzonych (z użyciem symboli funkcyjnych) ze stałych indywiduowych występujących w formułach zbioru S.

Interpretacją Herbranda dla zbioru formuł S nazywamy interpretację $\langle H_S, \Delta_S \rangle$ spełniającą następujące warunki:

- $\Delta_S(a_k) = a_k$ dla dowolnej stałej indywiduowej a_k należącej do H_S;

- $\Delta_S(f_j^{n_j}(t_1, \ldots, t_{n_j})) = f_j^{n_j}(t_1, \ldots, t_{n_j})$ dla dowolnych termów $t_1, \ldots, t_{n_j}$ należących do H_S.

Modelem Herbranda dla zbioru formuł S nazywamy każdą interpretację Herbranda dla S, w której prawdziwe są wszystkie formuły z S.

Zauważmy, że uniwersa Herbranda tworzone są z wyrażeń języka KRP. ***Alfabetem Herbranda*** dla zbioru formuł S nazywamy zbiór wszystkich stałych pozalogicznych występujących w formułach z S (jeśli w S nie występuje żadna stała indywiduowa, to dodajemy dowolną ustaloną stałą indywiduową). Niech V_S oznacza alfabet Herbranda dla S.

Ważną konsekwencją twierdzenia Herbranda jest możliwość wykazania niespełnialności zbioru formuł języka KRP w KRZ.

TWIERDZENIE 25.3.1. Niech $\Gamma = \{A_1, A_2, \ldots, A_n \ldots\}$ będzie zbiorem formuł w skolemowych postaciach normalnych nie zawierających wystąpień symbolu identyczności. Wtedy: Γ jest spełnialny wtedy i tylko wtedy, gdy Γ ma model Herbranda.

DOWÓD. Jeśli Γ ma model Herbranda, to Γ jest oczywiście spełnialny. Pozostaje udowodnić implikację w drugą stronę.

Przypuśćmy, że Γ jest spełnialny. Niech $\mathfrak{N}$ będzie dowolną strukturą sygnatury V_S taką, że $\mathfrak{N} \models \Gamma$. Niech $\mathfrak{M}'$ będzie interpretacją Herbranda. Zbudujemy interpretację $\mathfrak{M}$ sygnatury V_S taką, że $\mathfrak{M} \models \Gamma$.

Uniwersum dla $\mathfrak{M}$ jest uniwersum Herbranda H_Γ. Trzeba podać interpretację w $\mathfrak{M}$ symboli funkcyjnych oraz predykatów. Mówiąc intuicyjnie:

- $\mathfrak{M}$ interpretuje symbole funkcyjne tak, jak robi to $\mathfrak{M}'$ (co nie wymaga uściśleń, ponieważ mowa tu o interpretacjach Herbranda: $\mathfrak{M}$ jest interpretacją Herbranda sygnatury V_Γ, tak samo jak $\mathfrak{M}'$);
- $\mathfrak{M}$ interpretuje predykaty tak, jak robi to $\mathfrak{N}$ (co wymaga uściślenia, bo uniwersa struktur $\mathfrak{M}$ oraz $\mathfrak{N}$ mogą być różne).

Dla dowolnego n-argumentowego predykatu R w V_Γ oraz termów $t_1, \ldots, t_n$ należących do H_Γ musimy określić, która z poniższych (nawzajem się wykluczających oraz dopełniających) możliwości zachodzi:

- $R(t_1, \ldots, t_n)$
- $\neg R(t_1, \ldots, t_n)$.

Ponieważ każdy z powyższych termów t_i jest termem bez zmiennych, a $\mathfrak{N}$ jest strukturą sygnatury V_Γ, więc zachodzi dokładnie jedno z dwojga:

- $\mathfrak{N} \models R(t_1, \ldots, t_n)$
- $\mathfrak{N} \models \neg R(t_1, \ldots, t_n)$.

Definiujemy interpretację predykatu R w $\mathfrak{M}$ w ten sposób, aby zachodziła równoważność:

$$\mathfrak{M} \models R(t_1, \ldots, t_n) \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \mathfrak{N} \models R(t_1, \ldots, t_n).$$

Trzeba teraz pokazać, że $\mathfrak{M} \models \Gamma$. Dowód przeprowadzimy w trzech krokach:

- (1) pokażemy, że dla dowolnego zdania A języka sygnatury V_Γ, które nie zawiera ani kwantyfikatorów, ani znaku identyczności zachodzi: $\mathfrak{M} \models A$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{N} \models A$.
- (2) pokażemy, że z (1) wynika, że dla dowolnego zdania A języka sygnatury V_Γ w skolemowej postaci normalnej, które nie zawiera znaku identyczności zachodzi: jeśli $\mathfrak{N} \models A$, to $\mathfrak{M} \models A$.
- (3) pokażemy, że z (2) wynika $\mathfrak{M} \models \Gamma$.

DOWÓD (1).

Niech A będzie formułą bez kwantyfikatorów. Pokażemy, że $\mathfrak{M} \models A$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{N} \models A$ przez indukcję po złożoności A.

Jeśli A jest formułą atomową, to — ponieważ nie zawiera wystąpień predykatu identyczności — musi być postaci $R(t_1, \ldots, t_n)$ dla pewnego predykatu n-argumentowego R z alfabetu V_Γ oraz termów $t_1, \ldots, t_n$. Ponieważ A jest zdaniem, więc żaden z termów t_i nie może zawierac zmiennych. Oznacza to, że wszystkie termy t_i są elementami H_Γ. Z definicji $\mathfrak{M}$ otrzymujemy wtedy, że $\mathfrak{M} \models A$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{N} \models A$.

Przypuśćmy, że:

- $\mathfrak{M} \models A_1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{N} \models A_1$
- $\mathfrak{M} \models A_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{N} \models A_2$.

Wtedy oczywiście także:

- $\mathfrak{M} \models \neg A_1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{N} \models \neg A_1$
- $\mathfrak{M} \models A_1 \wedge A_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{N} \models A_1 \wedge A_2$.

(podobnie dla innych spójników zdaniowych). To kończy dowód (1).

DOWÓD (2).

Dowód przeprowadzimy przez indukcję względem liczby kwantyfikatorów w A. Jeśli A nie zawiera żadnych kwantyfikatorów, to na mocy (1) mamy: $\mathfrak{M} \models A$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{N} \models A$.

Przypuśćmy, że A jest postaci $\forall x_1 \ldots \forall x_n\ B$, gdzie B nie zawiera ani kwantyfikatorów, ani predykatu identyczności. Założenie indukcyjne głosi, że (2) zachodzi dla wszystkich formuł, które mają mniej niż n kwantyfikatorów. Niech $C(x_1)$ będzie formułą otrzymaną z $\forall x_1 \ldots \forall x_n\ B$ poprzez opuszczenie pierwszego kwantyfikatora. Niech t będzie termem bez zmiennych z języka o sygnaturze V_Γ (oznacza to, że t jest elementem H_Γ). Mamy:

- jeśli $\mathfrak{N} \models C(x_1)$, to $\mathfrak{N} \models C(t/x_1)$ (z definicji relacji $\models$),
- jeśli $\mathfrak{N} \models C(t/x_1)$, to $\mathfrak{M} \models C(t/x_1)$ (z założenia indukcyjnego).

Tak więc, jeśli $\mathfrak{N} \models C(x_1)$, to $\mathfrak{M} \models C(t/x_1)$. Term t był dowolnie wybranym elementem zbioru H_Γ. Mamy zatem: jeśli $\mathfrak{N} \models A$, to $\mathfrak{M} \models C(t/x_1)$ dla wszystkich $t \in H_\Gamma$. Ponieważ H_Γ jest uniwersum struktury $\mathfrak{M}$, więc z definicji relacji $\models$ otrzymujemy: $\mathfrak{M} \models \forall x_1 C(x_1)$. Ponieważ A jest identyczne z $\forall x_1 C(x_1)$, dowód (2) został zakończony.

DOWÓD (3).

Dla każdego $A_i \in \Gamma$ mamy:

- $\mathfrak{N} \models A_i$
- A_i jest w skolemowej postaci normalnej
- A_i nie zawiera predykatu identyczności.

Spełnione są zatem wszystkie założenia (2). Tak więc, $\mathfrak{N} \models \Gamma$. To kończy dowód (3), a zarazem całego twierdzenia 25.3.1.

Z powyższego twierdzenia wynika w szczególności, że:

- (†) Jeśli A jest formułą w skolemowej postaci normalnej bez predykatu identyczności, to: A jest spełnialna wtedy i tylko wtedy, gdy A ma model Herbranda.

Dlaczego w twierdzeniu 25.3.1. istotne było założenie, że Γ nie zawiera wystąpień znaku identyczności? Poniższy przykład stanowi odpowiedź na to pytanie.

PRZYKŁAD 25.3.1. (Hedman 2004: 115).

Rozważmy zdanie A postaci $\forall x\ ((f(x) \neq x) \wedge (f(f(x)) = x))$. Słownikiem Herbranda dla A jest zbiór $\{c, f\}$, gdzie c jest dowolną stałą indywiduową.

Uniwersum Herbranda dla A jest zbiorem nieskończonym: $H_A = \{c, f(c), f(f(c)), f(f(f(c))), \ldots\}$.

W każdej interpretacji Herbranda elementy c oraz $f(f(c))$ są oczywiście różne. Ponieważ konsekwencją A jest zdanie $\forall x\ f(f(x)) = x$, więc w szczególności $c = f(f(c))$ także jest konsekwencją A. Zdanie A nie może zatem posiadać żadnego modelu Herbranda. Łatwo jednak zobaczyć, że zbiór $\{A\}$ jest spełnialny: modelem dla A jest np. zbiór wszystkich liczb całkowitych (bez zera), w którym symbol funkcyjny f interpretujemy tak, aby $f(x) = -x$.

Jak radzić sobie w przypadku, gdy rozważany zbiór formuł zawiera wystąpienia znaku identyczności? Oto stosowna procedura.

Przypuśćmy, że A jest formułą w skolemowej postaci normalnej i że w A występuje predykat identyczności. Wtedy $(\dagger)$ nie zachodzi dla A. Zdefiniujemy formułę A^* taką, że:

- $(\dagger)$ zachodzi dla A^*
- $(\ddagger)$ A jest spełnialna wtedy i tylko wtedy, gdy A^* jest spełnialna.

Niech E będzie dwuargumentowym predykatem nie występującym w V_A. Poszukiwana formuła A^* jest koniunkcją formuł A_1, A_2, A_3 oraz A_4, zdefiniowanych następująco:

- A_1 jest formułą powstającą z A poprzez zastąpienie każdej równości termów $t_1 = t_2$ występującej w A przez formułę $E(t_1, t_2)$.
- A_2 jest koniunkcją warunków stwierdzających, że E denotuje relację równoważności (tj. zwrotną, przechodnią i symetryczną).
- Dla każdego n-argumentowego predykatu R z V_A niech A_R będzie formułą:

  $$\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n (\bigwedge_{i=1}^{n} (E(x_i, y_i \wedge R(x_1, \ldots, x_n))) \to R(y_1, \ldots, y_n)).$$

  Niech A_3 będzie koniunkcją wszystkich formuł A_R.
- Dla każdego n-argumentowego symbolu funkcyjnego f z V_A niech A_f będzie formułą:

  $$\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n (\bigwedge_{i=1}^{n} E(x_i, y_i) \to E(f(x_1, \ldots, x_n), f(y_1, \ldots, y_n))).$$

  Niech A_4 będzie koniunkcją wszystkich formuł A_f.

Niech A^* będzie skolemową postacią normalną koniunkcji formuł A_1, A_2, A_3 oraz A_4. Z konstrukcji A^* widać, że nie zawiera ona predykatu identyczności. Tak więc, $(\dagger)$ zachodzi dla A^*. Niech wykazanie, że zachodzi także $(\ddagger)$ będzie ćwiczeniem dla czytelniczek. Wskazówka: należy oczywiście rozważyć model ilorazowy.

Rozważmy jeszcze raz formułę A postaci $\forall x\ ((f(x) \neq x) \wedge (f(f(x)) = x))$ z przykładu 8.3.1.1. i zastosujmy do niej powyżej opisaną procedurę. Ponieważ formuła A^* spełnia warunek $(\dagger)$, więc A^* posiada model Herbranda o uniwersum $H_A = \{c, f(c), f(f(c)), f(f(f(c))), \ldots\}$. Możemy interpretować E w tym modelu jako relację równoważności o dwóch klasach: w jednej są termy zawierające parzystą liczbę wystąpień symbolu f, a w drugiej pozostałe termy. Wynika stąd również, że formuła

A ma model dwuelementowy o uniwersum np. postaci $\{a, b\}$, w którym symbol funkcyjny f interpretujemy tak, aby: $f(a) = b$ oraz $f(b) = a$.

Teraz możemy opisać procedurę pozwalającą ustalać, czy dowolna formuła języka KRP jest niespełnialna.

Niech A będzie dowolną formułą języka KRP w skolemowej postaci normalnej, nie zawierającą predykatu identyczności. Tak więc, A jest postaci $\forall x_1 \ldots \forall x_n\ B(x_1, \ldots, x_n)$, gdzie B nie zawiera ani kwantyfikatorów, ani predykatu identyczności. Przypominamy, że H_A jest uniwersum Herbranda dla A. Zdefiniujmy zbiór:

$$E(A) = \{B(t_1, \ldots, t_n)\ :\ t_1, \ldots, t_n \in H_A\}.$$

Zbiór $E(A)$ otrzymujemy zatem przez podstawienia wszelkich możliwych termów z H_A za zmienne w B, na wszelkie możliwe sposoby. Niech $\{A_1, A_2, \ldots\}$ będzie wyliczeniem wszystkich elementów zbioru $E(A)$. Pokażemy, że A jest spełnialna wtedy i tylko wtedy, gdy $E(A)$ jest spełnialny.

LEMAT 25.3.2. Niech A będzie dowolną formułą języka KRP w skolemowej postaci normalnej, nie zawierającą predykatu identyczności. Wtedy: A jest spełnialna wtedy i tylko wtedy, gdy $E(A)$ jest spełnialny.

DOWÓD.

Dowód implikacji z lewa na prawo jest dość prosty. Jeśli $\mathfrak{M}$ jest modelem dla A, to:

$$\mathfrak{M} \models \forall x_1 \ldots \forall x_n\ B(x_1, \ldots, x_n).$$

W szczególności, $\mathfrak{M} \models B(t_1, \ldots, t_n)$ dla wszystkich $t_1, \ldots, t_n \in H_A$. Oznacza to, że $\mathfrak{M} \models A_i$ dla wszystkich i, a więc $\mathfrak{M} \models E(A)$.

Dla dowodu implikacji w drugą stronę załóżmy, że $E(A)$ jest spełnialny. Wtedy, na mocy twierdzenia 8.3.1., $E(A)$ ma model Herbranda $\mathfrak{M}$. Alfabet Herbranda dla $E(A)$ jest taki sam jak alfabet Herbranda dla A. Tak więc, uniwersum $\mathfrak{M}$ jest równe H_A. Dla wszystkich $t_1, \ldots, t_n \in H_A$, mamy $\mathfrak{M} \models B(t_1, \ldots, t_n)$, ponieważ $B(t_1, \ldots, t_n) \in E(A)$. Z definicji relacji $\models$ otrzymujemy, że $\mathfrak{M} \models \forall x_1 \ldots \forall x_n\ B(x_1, \ldots, x_n)$. Oznacza to, że $\mathfrak{M} \models A$, czyli że A jest spełnialna.

Z powyższego wynika, że A ***nie*** jest spełnialna wtedy i tylko wtedy, gdy $E(A)$ ***nie*** jest spełnialny. Ponieważ $E(A)$ zawiera jedynie zdania bez kwantyfikatorów, więc możemy uważać $E(A)$ za zbiór formuł języka KRZ (po stosownych podstawieniach zmiennych zdaniowych za formuły atomowe). Ponieważ A jest w skolemowej postaci normalnej, więc każda formuła w $E(A)$ jest w koniunkcyjnej postaci normalnej. W rozdziale II udowodniono, że zbiór S formuł języka KRZ jest niespełnialny wtedy i tylko wtedy, gdy $\Box \in \mathcal{R}(S)$ (zob. też Lemat 25.4.2. poniżej). Wiemy zatem, że $E(A)$ jest niespełnialny wtedy i tylko wtedy, gdy $\Box \in \mathcal{R}(E(A))$. Z TWIERDZENIA O ZWARTOŚCI dla KRZ (również udowodnionego w rozdziale II) wynika, że $E(A)$ jest niespełnialny wtedy i tylko wtedy, gdy pewien skończony podzbiór $\{A_1, \ldots, A_m\}$ zbioru $E(A)$ jest niespełnialny. Tak więc, jeśli A jest niespełnialna, to $\Box \in \mathcal{R}(\{A_1, \ldots, A_m\})$ dla pewnego m. Zauważmy, że $\Box \in \mathcal{R}(\{A_1, \ldots, A_m\})$ jest zbiorem ***skończonym***.

Procedura powyższa dostarcza metody ustalania, że A jest niespełnialna. Sprawdzamy, czy dla pewnego m zachodzi $\Box \in \mathcal{R}(\{A_1, \ldots, A_m\})$. Jeśli odpowiedź jest twierdząca, to A jest niespełnialna. W przeciwnym przypadku sprawdzamy, czy $\Box \in \mathcal{R}(\{A_1, \ldots, A_m, A_{m+1}\})$, itd. Jeśli A ***jest*** niespełnialna, to ta procedura poda tę odpowiedź po skończonej liczbie kroków. Jeśli natomiast A ***jest*** spełnialna, to omawiana procedura nie zakończy się.

Zauważmy, że nie ma żadnego ograniczenia (z góry) liczby kroków, w której powyższa procedura ewentualnie się zakończy.

TRZEBA DODAĆ O UNIFIKACJI ORAZ REZOLUCJI

5. Formalizm Gentzena

Podajemy formalizm Gentzena dla KRZ oraz KRP, wzorując się na przedstawieniu w monografiach W.A. Pogorzelskiego.

KLASYCZNY RACHUNEK ZDAŃ:

INFORMACJE O

RACHUNKU SEKWENTÓW GENTZENA

Ważną metodą dowodową jest RACHUNEK SEKWENTÓW. W tym miejscu ograniczymy się jedynie do podania paru informacji o tym rachunku. Różne jego wersje znajdują istotne zastosowania np. w automatycznym przetwarzaniu informacji.

1. Reguły

Określimy relację $\Vdash$ między zbiorami formuł języka KRZ. Zachodzenie zależności $X \Vdash Y$ związane ma być z następującą intuicją: ze zbioru przesłanek X wyprowadzalna jest alternatywa elementów zbioru Y. Nie ograniczamy się do skończonych zbiorów formuł. Wyrażenia postaci $X \Vdash Y$ nazywamy ***sekwentami***.

Relację $\Vdash$ definiujemy indukcyjnie:

1. $X \Vdash^0 Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X \cap Y \neq \emptyset$
2. $X \Vdash^{n+1} Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X \Vdash^n Y$ lub istnieją zbiory formuł X_1, Y_1 oraz formuły α, β takie, że zachodzi jeden z warunków:

$(+\to)$ $X = X_1 \cup \{\alpha \to \beta\}$ i $X_1 \cup \{\beta\} \Vdash^n Y$ i $X_1 \Vdash^n \{\alpha\} \cup Y$
$(\to +)$ $Y = Y_1 \cup \{\alpha \to \beta\}$ i $X \cup \{\alpha\} \Vdash^n \{\beta\} \cup Y_1$
$(+\neg)$ $X = X_1 \cup \{\neg\alpha\}$ i $X_1 \Vdash^n \{\alpha\} \cup Y$
$(\neg+)$ $Y = Y_1 \cup \{\neg\alpha\}$ i $X \cup \{\alpha\} \Vdash^n Y_1$
$(+\wedge)$ $X = X_1 \cup \{\alpha \wedge \beta\}$ i $X_1 \cup \{\alpha, \beta\} \Vdash^n Y$
$(\wedge+)$ $Y = Y_1 \cup \{\alpha \wedge \beta\}$ i $X \Vdash^n \{\alpha\} \cup Y_1$ oraz $X \Vdash^n \{\beta\} \cup Y_1$
$(+\vee)$ $X = X_1 \cup \{\alpha \vee \beta\}$ i $X_1 \cup \{\alpha\} \Vdash^n Y$ oraz $X_1 \cup \{\beta\} \Vdash^n Y$
$(\vee+)$ $Y = Y_1 \cup \{\alpha \vee \beta\}$ i $X \Vdash^n \{\alpha, \beta\} \cup Y_1$
$(+\equiv)$ $X = X_1 \cup \{\alpha \equiv \beta\}$ i $X_1 \cup \{\alpha, \beta\} \Vdash^n Y$ oraz $X_1 \Vdash^n \{\alpha, \beta\} \cup Y$
$(\equiv +)$ $Y = Y_1 \cup \{\alpha \equiv \beta\}$ i $X \cup \{\alpha\} \Vdash^n \{\beta\} \cup Y_1$ oraz $X \cup \{\beta\} \Vdash^n \{\alpha\} \cup Y_1$.

3. $X \Vdash Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X \Vdash^n Y$ dla pewnego $n \geqslant 0$.

Powszechnie stosowaną umową notacyjną w rachunku sekwentów jest pisanie X, Y zamiast $X \cup Y$ oraz pisanie $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ zamiast skończonych zbiorów formuł $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. Dla przykładu, sekwent $X \cup \{\alpha \to \beta, \alpha\}$ zapisujemy w postaci: $X, \alpha \to \beta, \alpha$.

Zwykle posługujemy się następującymi diagramami, reprezentującymi warunki określające relację $\Vdash$ (kreskę poziomą w tych diagramach odczytujemy [metajęzykowo] jako: „jeśli ..., to ...”):

$$(0) \quad \frac{X \cap Y \neq \emptyset}{X \Vdash Y}$$

$(+\rightarrow)$	$\dfrac{X,\beta\Vdash Y;\ \ X\Vdash\alpha,Y}{X,\alpha\rightarrow\beta\Vdash Y}$	$(\rightarrow+)$	$\dfrac{X,\alpha\Vdash\beta,Y}{X\Vdash\alpha\rightarrow\beta,Y}$
$(+\neg)$	$\dfrac{X\Vdash\alpha,Y}{X,\neg\alpha\Vdash Y}$	$(\neg+)$	$\dfrac{X,\alpha\Vdash Y}{X\Vdash\neg\alpha,Y}$
$(+\wedge)$	$\dfrac{X,\alpha,\beta\Vdash Y}{X,\alpha\wedge\beta\Vdash Y}$	$(\wedge+)$	$\dfrac{X\Vdash\alpha,Y;\ \ X\Vdash\beta,Y}{X\Vdash\alpha\wedge\beta,Y}$
$(+\vee)$	$\dfrac{X,\alpha\Vdash Y;\ \ X,\beta\Vdash Y}{X,\alpha\vee\beta\Vdash Y}$	$(\vee+)$	$\dfrac{X\Vdash\alpha,\beta,Y}{X\Vdash\alpha\vee\beta,Y}$
$(+\equiv)$	$\dfrac{X,\alpha,\beta\Vdash Y;\ \ X\Vdash\alpha,\beta,Y}{X,\alpha\equiv\beta\Vdash Y}$	$(\equiv+)$	$\dfrac{X,\alpha\Vdash\beta,Y;\ \ X,\beta\Vdash\alpha,Y}{X\Vdash\alpha\equiv\beta,Y}$

Znak ; jest tu separatorem. Zauważmy, że poszczególne reguły dotyczą wprowadzania lub eliminacji stałych logicznych (tu: spójników zdaniowych).

2. Niektóre własności relacji $\Vdash$

1. Relacja $\Vdash$ jest monotoniczna, tj. dla dowolnych X, Y, X_1, Y_1:

- jeśli $X \Vdash Y$, to $X, X_1 \Vdash Y, Y_1$.

2. Jeśli $X \Vdash Y$, to istnieją skończone zbiory X_1 oraz Y_1 takie, że: $X_1 \Vdash Y_1$.

3. Wszystkie reguły wymienione w tabeli w punkcie 1 są ***odwracalne***:

$(+\rightarrow)^*$	$\dfrac{X,\alpha\rightarrow\beta \Vdash Y}{X,\beta \Vdash Y;\ \ X \Vdash \alpha,Y}$	$(\rightarrow +)^*$	$\dfrac{X \Vdash \alpha\rightarrow\beta,Y}{X,\alpha \Vdash \beta,Y}$
$(+\neg)^*$	$\dfrac{X,\neg\alpha \Vdash Y}{X \Vdash \alpha,Y}$	$(\neg+)^*$	$\dfrac{X \Vdash \neg\alpha,Y}{X,\alpha \Vdash Y}$
$(+\wedge)^*$	$\dfrac{X,\alpha\wedge\beta \Vdash Y}{X,\alpha,\beta \Vdash Y}$	$(\wedge+)^*$	$\dfrac{X \Vdash \alpha\wedge\beta,Y}{X \Vdash \alpha,Y;\ \ X \Vdash \beta,Y}$
$(+\vee)^*$	$\dfrac{X,\alpha\vee\beta \Vdash Y}{X,\alpha \Vdash Y;\ \ X,\beta \Vdash Y}$	$(\vee+)^*$	$\dfrac{X \Vdash \alpha\vee\beta,Y}{X \Vdash \alpha,\beta,Y}$
$(+\equiv)^*$	$\dfrac{X,\alpha\equiv\beta \Vdash Y}{X,\alpha,\beta \Vdash Y;\ \ X \Vdash \alpha,\beta,Y}$	$(\equiv +)^*$	$\dfrac{X \Vdash \alpha\equiv\beta,Y}{X,\alpha \Vdash \beta,Y;\ \ X,\beta \Vdash \alpha,Y}$

4. Dowodzi się następującego ***twierdzenia o cięciu***:

Dla dowolnych X_1, X_2, Y_1 i Y_2 oraz formuły α:

jeśli $X_1, \alpha \Vdash Y_1$ i $X_2 \Vdash \alpha, Y_2$, to $X_1, X_2 \Vdash Y_1, Y_2$.

Tezę tego twierdzenia zapisać można również tak:

$$\frac{X_1, \alpha \Vdash Y_1;\quad X_2 \Vdash \alpha, Y_2}{X_1, X_2 \Vdash Y_1, Y_2}.$$

3. Operacja konsekwencji

Zdefiniujemy operację C_{gen} ***konsekwencji w sensie Gentzena***:

$$C_{gen}(X) = \{\alpha \in F_{KRZ} : X \Vdash \alpha\}.$$

Tak określona operacja C_{gen} ma własności (C1)–(C4) podane na wykładach 5–7, czyli jest operacją konsekwencji (w sensie Tarskiego).

Ponadto, dla dowolnego zbioru formuł X zbiór $C_{gen}(X)$ jest domknięty na odrywanie:

$$\text{jeśli } \alpha, \alpha \to \beta \in C_{gen}(X), \text{ to } \beta \in C_{gen}(X).$$

Relacja $\Vdash$ jest domknięta na podstawianie, w następującym sensie:

$$\text{jeśli } X \Vdash Y, \text{ to } h^e[X] \Vdash h^e[Y], \text{ dla dowolnego } e : Var_{KRZ} \to F_{KRZ}.$$

4. Przykłady dowodów

Zwykle dowody w rachunku sekwentów Gentzena zapisuje się jako ciągi „ułamków", w których „licznikach" występują założenia reguł, a w „mianownikach" stosowne tezy (tychże reguł).

Postąpimy tu nieco inaczej. Będziemy mianowicie reprezentować dowody przez drzewa. Bezpośrednie następniki danego wierzchołka to założenia reguły, dla której ów wierzchołek jest tezą (wnioskiem tej reguły). Liście drzewa dowodowego są zawsze postaci $X \Vdash Y$, gdzie $X \cap Y \neq \emptyset$. Dla sekwentów nie będących liśćmi podajemy (z prawej strony, w górnej frakcji) informację o zastosowanej regule.

Sekwenty postaci $\emptyset \Vdash X$ nazywamy ***tezami*** systemu Gentzena.

Udowodnimy dla przykładu, że aksjomaty systemu podanego na wykładach 5–7 są tezami systemu Gentzena.

1. Dowód formuły: $(\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$.

$$\emptyset \Vdash (\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))\ ^{(\to +)}$$

$$\alpha \to \beta \Vdash (\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)\ ^{(\to +)}$$

$$\alpha \to \beta, \beta \to \gamma \Vdash \alpha \to \gamma\ ^{(\to +)}$$

$$\alpha, \alpha \to \beta, \beta \to \gamma \Vdash \gamma\ ^{(+ \to)}$$

$$\alpha, \beta, \beta \to \gamma \Vdash \gamma\ ^{(+ \to)} \qquad \alpha, \beta \to \gamma \Vdash \alpha, \gamma$$

$$\alpha, \beta, \gamma \Vdash \gamma \qquad \alpha, \beta \Vdash \beta, \gamma$$

2. Dowód formuły: $\alpha \to (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta)$.

$$
\begin{array}{c}
\emptyset \Vdash \alpha \to (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta)\ ^{(\to +)} \\
| \\
\alpha \to (\alpha \to \beta) \Vdash \alpha \to \beta\ ^{(\to +)} \\
| \\
\alpha, \alpha \to (\alpha \to \beta) \Vdash \beta\ ^{(+\to)} \\
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c} \alpha, \alpha \to \beta \Vdash \beta\ ^{(+\to)} \\ \begin{array}{cc} \alpha, \beta \Vdash \beta & \alpha \Vdash \alpha, \beta \end{array} \end{array} & \alpha \Vdash \alpha, \beta
\end{array}
\end{array}
$$

3. Dowód formuły: $\alpha \to (\beta \to \alpha)$.

$$
\begin{array}{c}
\emptyset \Vdash \alpha \to (\beta \to \alpha)\ ^{(\to +)} \\
| \\
\alpha \Vdash \beta \to \alpha\ ^{(\to +)} \\
| \\
\alpha, \beta \Vdash \alpha
\end{array}
$$

4. Dowód formuły: $(\alpha \wedge \beta) \to \alpha$.

$$
\begin{array}{c}
\emptyset \Vdash (\alpha \wedge \beta) \to \alpha\ ^{(\to +)} \\
| \\
\alpha \wedge \beta \Vdash \alpha\ ^{(+\wedge)} \\
| \\
\alpha, \beta \Vdash \alpha
\end{array}
$$

5. Dowód formuły: $(\alpha \wedge \beta) \to \beta$.

$$
\begin{array}{c}
\emptyset \Vdash (\alpha \wedge \beta) \to \beta\ ^{(\to +)} \\
| \\
\alpha \wedge \beta \Vdash \alpha\ ^{(+\wedge)} \\
| \\
\alpha, \beta \Vdash \beta
\end{array}
$$

6. Dowód formuły: $(\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \gamma) \to (\alpha \to (\beta \wedge \gamma)))$.

$$\emptyset \Vdash (\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \gamma) \to (\alpha \to (\beta \wedge \gamma)))\ ^{(\to+)}$$
$$\alpha \to \beta \Vdash (\alpha \to \gamma) \to (\alpha \to (\beta \wedge \gamma))\ ^{(\to+)}$$
$$\alpha \to \beta, \alpha \to \gamma \Vdash \alpha \to (\beta \wedge \gamma)\ ^{(\to+)}$$
$$\alpha, \alpha \to \beta, \alpha \to \gamma \Vdash \beta \wedge \gamma\ ^{(\wedge+)}$$
$$\alpha, \alpha \to \beta, \beta \to \gamma \Vdash\ ^{(+\to)} \qquad \alpha, \alpha \to \beta, \alpha \to \gamma \Vdash \gamma\ ^{(+\to)}$$
$$\alpha, \beta, \alpha \to \gamma \Vdash \beta \qquad \alpha, \alpha \to \gamma \Vdash \alpha, \beta \qquad \alpha, \alpha \to \beta, \gamma \Vdash \gamma \qquad \alpha, \alpha \to \beta \Vdash \alpha, \gamma$$

7. Dowód formuły: $\alpha \to (\alpha \vee \beta)$.

$$\emptyset \Vdash \alpha \to (\alpha \vee \beta)\ ^{(\to+)}$$
$$\alpha \Vdash \alpha \vee \beta\ ^{(\vee+)}$$
$$\alpha \Vdash \alpha, \beta$$

8. Dowód formuły: $\alpha \to (\beta \vee \alpha)$.

$$\emptyset \Vdash \alpha \to (\beta \vee \alpha)\ ^{(\to+)}$$
$$\alpha \Vdash \beta \vee \alpha\ ^{(\vee+)}$$
$$\alpha \Vdash \beta, \alpha$$

9. Dowód formuły: $(\alpha \to \gamma) \to ((\beta \to \gamma) \to ((\alpha \vee \beta) \to \gamma))$.

$$\emptyset \Vdash (\alpha \to \gamma) \to ((\beta \to \gamma) \to ((\alpha \vee \beta) \to \gamma))\ ^{(\to+)}$$
$$\alpha \to \gamma \Vdash (\beta \to \gamma) \to ((\alpha \vee \beta) \to \gamma)\ ^{(\to+)}$$
$$\alpha \to \gamma, \beta \to \gamma \Vdash (\alpha \vee \beta) \to \gamma\ ^{(\to+)}$$
$$\alpha \vee \beta, \alpha \to \gamma, \beta \to \gamma \Vdash \gamma\ ^{(+\vee)}$$
$$\alpha, \alpha \to \gamma, \beta \to \gamma \Vdash \gamma \qquad \beta, \beta \to \gamma, \alpha \to \gamma \Vdash \gamma$$

10. Dowód formuły: $(\alpha \equiv \beta) \to (\alpha \to \beta)$.

$$\begin{array}{c}
\emptyset \Vdash (\alpha \equiv \beta) \to (\alpha \to \beta)\ ^{(\to +)} \\
| \\
\alpha \equiv \beta \Vdash \alpha \to \beta\ ^{(\to +)} \\
| \\
\alpha, \alpha \equiv \beta \Vdash \beta\ ^{(+\equiv)} \\
\diagup \qquad \diagdown \\
\begin{array}{cc} \alpha, \alpha, \beta \Vdash \beta & \quad \alpha \Vdash \alpha, \beta, \beta \end{array}
\end{array}$$

11. Dowód formuły: $(\alpha \equiv \beta) \to (\beta \to \alpha)$.

$$\begin{array}{c}
\emptyset \Vdash (\alpha \equiv \beta) \to (\beta \to \alpha)\ ^{(\to +)} \\
| \\
\alpha \equiv \beta \Vdash \beta \to \alpha\ ^{(\to +)} \\
| \\
\beta, \alpha \equiv \beta \Vdash \alpha\ ^{(+\equiv)} \\
\diagup \qquad \diagdown \\
\begin{array}{cc} \beta, \alpha, \beta \Vdash \alpha & \quad \beta \Vdash \alpha, \beta, \alpha \end{array}
\end{array}$$

12. Dowód formuły: $(\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \alpha) \to (\alpha \equiv \beta))$.

$$\begin{array}{c}
\emptyset \Vdash (\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \alpha) \to (\alpha \equiv \beta))\ ^{(\to +)} \\
| \\
\alpha \to \beta \Vdash (\beta \to \alpha) \to (\alpha \equiv \beta)\ ^{(\to +)} \\
| \\
\alpha \to \beta, \beta \to \alpha \Vdash \alpha \equiv \beta\ ^{(\equiv +)} \\
\diagup \qquad \diagdown \\
\begin{array}{cc} \alpha, \alpha \to \beta, \beta \to \alpha \Vdash \beta & \quad \beta, \alpha \to \beta, \beta \to \alpha \Vdash \alpha \end{array}
\end{array}$$

13. Dowód formuły: $(\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)$.

$$\begin{array}{c}
\emptyset \Vdash (\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)\ ^{(\to +)} \\
| \\
\neg\beta \to \neg\alpha \Vdash \alpha \to \beta\ ^{(\to +)} \\
| \\
\alpha, \neg\beta \to \neg\alpha \Vdash \beta\ ^{(\to +)} \\
\diagup \qquad \diagdown \\
\begin{array}{cc} \alpha, \neg\alpha \Vdash \beta\ ^{(+\neg)} & \quad \alpha \Vdash \beta, \neg\beta\ ^{(\neg +)} \\
| & | \\
\alpha \Vdash \alpha, \beta & \quad \alpha, \beta \Vdash \beta \end{array}
\end{array}$$

5. Związki z innymi operacjami konsekwencji

Można pokazać, że dla dowolnego zbioru formuł X języka KRZ:

$$C_{gen}(X) = C_{krz}(X).$$

Oznacza to, że konsekwencja w sensie Gentzena jest identyczna z każdą z pozostałych podanych w tych wykładach operacji konsekwencji:

$$C_{gen}(X) = C_{krz}(X) = C_{jas}(X) = C_{rez}(X) = C_{tab}(X) = C_{\mathfrak{B}_2}(X).$$

Oznacza to także, że konsekwencja w sensie Gentzena jest ***trafna*** oraz ***pełna***.

Wykorzystywana literatura

Gentzen, G. 1935. Untersuchungen über das logische Schliessen. *Mathematische Zeitschrift* **39**, 176–210, 405–431.

Rasiowa, H., Sikorski, R. 1963. *The Mathematics of Metamathematics.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Pogorzelski, W.A. 1981. *Klasyczny rachunek kwantyfikatorów. Zarys teorii.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Smullyan, R. 1968. *First-Order Logic.* Springer Verlag, Berlin.

Klasyczny Rachunek Predykatów:

Informacja o Rachunku Sekwentów w KRP

Ostatnią z omawianych operacji konsekwencji w KRP jest konsekwencja ***Gentzenowska***. Ograniczymy się jedynie do podstawowych definicji, pomijając dowody twierdzeń. Znajomość tego materiału nie będzie wymagana na egzaminie.

Omawianie rachunków sekwentów staje się coraz częstsze we współczesnej dydaktyce logiki (w Polsce), zastępując bardziej popularne wcześniej metody: aksjomatyczną i założeniową. Wiąże się to prawdopodobnie po części z ważnymi zastosowaniami rachunków sekwentów we współczesnej informatyce teoretycznej. Podobnie rzecz się ma z metodą tablic analitycznych.

W poniższym, bardzo skrótowym, przedstawieniu kilku intuicji dotyczących rachunków sekwentów w KRP opieramy się na pracach Lyndona i Pogorzelskiego, wspomnianych w odnośnikach bibliograficznych.

26.1. Konsekwencja Gentzenowska

Popularne są dwa rachunki sekwentów, pochodzące od Gentzena. Tu omówimy tylko jeden z nich, tzw. wnioskowania naturalne Gentzena.

W obu formalizmach zakłada się, że wszystkie zmienne indywidualne są dwóch rodzajów:

- zmienne wolne (zmienne realne)
- zmienne związane (zmienne pozorne).

Niech $\mathcal{R} = \{u_1, u_2, \ldots\}$ będzie zbiorem zmiennych wolnych, a $\mathcal{P} = \{x_1, x_2, \ldots\}$ zbiorem zmiennych związanych. Dokonując podstawień w formułach, możemy zatem zawsze wstawiać do formuł zmienne ze zbioru $\mathcal{R}$.

Formuły w systemie Gentzena (nazywane *formułami Gentzenowskimi*) mają więc zmienne wolne w zbiorze $\mathcal{R}$, a zmienne związane w zbiorze $\mathcal{P}$.

26.1.1. Wnioskowania naturalne Gentzena

Każdą parę uporządkowaną (X, Y), gdzie X i Y są skończonymi zbiorami formuł, nazywamy ***sekwentem***. Używa się także terminu: ***sekwencja***.

Jeśli (X, Y) jest sekwentem, to używa się np. zapisu $X \Vdash Y$. Zamiast $X_1 \cup X_2 \Vdash Y_1 \cup Y_2$ pisze się zwykle $X_1, X_2 \Vdash Y_1, Y_2$. W szczególności, zamiast np. $X \cup \{\alpha\} \Vdash Y \cup \{\beta\}$ pisze się $X, \alpha \Vdash Y, \beta$ (i analogicznie dla $(\{\alpha\} \cup X \Vdash \{\beta\} \cup Y)$, itp.).

Najpierw pewne intuicje dotyczące rozważanego systemu. Niech $X = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ i $Y = \{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_m\}$. Mówimy, że sekwent $X \Vdash Y$ jest ***tautologią Gentzenowską*** wtedy i tylko wtedy, gdy tautologią KRP jest:

$$(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \ \rightarrow \ (\beta_1 \vee \beta_2 \vee \ldots \vee \beta_m).$$

Tak więc, zamierzonym znaczeniem sekwentu $X \Vdash Y$ jest, iż z koniunkcji przesłanek ze zbioru X wynika logicznie co najmniej jeden wniosek ze zbioru Y.

Zdefiniujemy teraz w sposób ścisły relację $\Vdash$, dla dowolnych skończonych zbiorów X, Y formuł Gentzenowskich. Definicja jest indukcyjna.

- 1. $X \Vdash^0 Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X \cap Y \neq \emptyset$
- 2. $X \Vdash^{n+1} Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

  (A) $X \Vdash^n Y$,

  lub (B) istnieją zbiory formuł X_1, Y_1 oraz formuły α, β takie, że zachodzi jeden z warunków:

$(+\to)$ $X = X_1 \cup \{\alpha \to \beta\}$ i $X_1 \cup \{\beta\} \Vdash^n Y$ i $X_1 \Vdash^n \{\alpha\} \cup Y$
$(\to+)$ $Y = Y_1 \cup \{\alpha \to \beta\}$ i $X \cup \{\alpha\} \Vdash^n \{\beta\} \cup Y_1$
$(+\neg)$ $X = X_1 \cup \{\neg\alpha\}$ i $X_1 \Vdash^n \{\alpha\} \cup Y$
$(\neg+)$ $Y = Y_1 \cup \{\neg\alpha\}$ i $X \cup \{\alpha\} \Vdash^n Y_1$
$(+\wedge)$ $X = X_1 \cup \{\alpha \wedge \beta\}$ i $X_1 \cup \{\alpha, \beta\} \Vdash^n Y$
$(\wedge+)$ $Y = Y_1 \cup \{\alpha \wedge \beta\}$ i $X \Vdash^n \{\alpha\} \cup Y_1$ oraz $X \Vdash^n \{\beta\} \cup Y_1$
$(+\vee)$ $X = X_1 \cup \{\alpha \vee \beta\}$ i $X_1 \cup \{\alpha\} \Vdash^n Y$ oraz $X_1 \cup \{\beta\} \Vdash^n Y$
$(\vee+)$ $Y = Y_1 \cup \{\alpha \vee \beta\}$ i $X \Vdash^n \{\alpha, \beta\} \cup Y_1$
$(+\equiv)$ $X = X_1 \cup \{\alpha \equiv \beta\}$ i $X_1 \cup \{\alpha, \beta\} \Vdash^n Y$ oraz $X_1 \Vdash^n \{\alpha, \beta\} \cup Y$
$(\equiv+)$ $Y = Y_1 \cup \{\alpha \equiv \beta\}$ i $X \cup \{\alpha\} \Vdash^n \{\beta\} \cup Y_1$ oraz $X \cup \{\beta\} \Vdash^n \{\alpha\} \cup Y_1$,

lub (C): istnieją liczba naturalna k, term t (z ewentualnymi zmiennymi jedynie z $\mathcal{R}$), formuła α, w której x_k jest zmienną z $\mathcal{P}$ oraz zbiory X_1, Y_1 formuł bez zmiennych z $\mathcal{P}$ takie, że:

$(+\forall)$ $X = X_1 \cup \{\forall x_k \alpha\}$ i $\{S(t, x_k, \alpha)\} \Vdash^n Y$ lub
$(\forall+)$ $Y = Y_1 \cup \{\forall x_k \alpha\}$ i przy pewnym m, zmienna u_m nie występuje jako wolna ani w α, ani w formułach z $X \cup Y_1$ oraz $X \Vdash^n \{S(u_m, x_k, \alpha)\} \cup Y_1$ lub
$(+\exists)$ $X = X_1 \cup \{\exists x_k \alpha\}$ i przy pewnym m, zmienna u_m nie występuje jako wolna ani w α, ani w formułach z $X_1 \cup Y$ oraz $X_1 \cup \{S(u_m, x_k, \alpha)\} \Vdash^n Y$ lub
$(\exists+)$ $Y = Y_1 \cup \{\exists x_k \alpha\}$ i $X \Vdash^n \{S(t, x_k, \alpha)\} \cup Y_1$.

- $X \Vdash Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X \Vdash^n Y$ dla pewnego $n \geqslant 0$.

Określona w ten sposób relacja $\Vdash$ ma własności przysługujące ogólnym relacjom konsekwencji. Zachodzą dla niej także twierdzenia o trafności i pełności.

Reguły wnioskowania będziemy zapisywali w postaci „ułamków”, w których nad kreską zapisujemy sekwenty, będące przesłankami, a pod kreską wniosek. Gdy mamy więcej niż jedną przesłankę, to oddzielamy je separatorem w postaci średnika: ; .

Reguły dotyczące spójników zdaniowych są oczywiście takie same, jak w rachunku sekwentów dla KRZ. Przypomnijmy je tutaj:

$$(0) \quad \frac{X \cap Y \neq \emptyset}{X \Vdash Y}.$$

$(+\rightarrow)$	$\dfrac{X,\beta \Vdash Y;\ \ X \Vdash \alpha,Y}{X,\alpha\rightarrow\beta \Vdash Y}$	$(\rightarrow +)$	$\dfrac{X,\alpha \Vdash \beta,Y}{X \Vdash \alpha\rightarrow\beta,Y}$
$(+\neg)$	$\dfrac{X \Vdash \alpha,Y}{X,\neg\alpha \Vdash Y}$	$(\neg +)$	$\dfrac{X,\alpha \Vdash Y}{X \Vdash \neg\alpha,Y}$
$(+\wedge)$	$\dfrac{X,\alpha,\beta \Vdash Y}{X,\alpha\wedge\beta \Vdash Y}$	$(\wedge +)$	$\dfrac{X \Vdash \alpha,Y;\ \ X \Vdash \beta,Y}{X \Vdash \alpha\wedge\beta,Y}$
$(+\vee)$	$\dfrac{X,\alpha \Vdash Y;\ \ X,\beta \Vdash Y}{X,\alpha\vee\beta \Vdash Y}$	$(\vee +)$	$\dfrac{X \Vdash \alpha,\beta,Y}{X \Vdash \alpha\vee\beta,Y}$
$(+\equiv)$	$\dfrac{X,\alpha,\beta \Vdash Y;\ \ X \Vdash \alpha,\beta,Y}{X,\alpha\equiv\beta \Vdash Y}$	$(\equiv +)$	$\dfrac{X,\alpha \Vdash \beta,Y;\ \ X,\beta \Vdash \alpha,Y}{X \Vdash \alpha\equiv\beta,Y}$

Znak ; jest tu separatorem, jak już powiedziano. Zauważmy, że poszczególne reguły dotyczą wprowadzania lub eliminacji stałych logicznych (tu: spójników zdaniowych).

Dochodzą jeszcze cztery reguły dotyczące kwantyfikatorów:

$(+\forall)$	$\dfrac{X,S(t,x_k,\alpha) \Vdash Y}{X,\forall x_k\alpha \Vdash Y}$	$(\forall +)$	$\dfrac{X \Vdash S(u_m,x_k,\alpha),Y}{X \Vdash \forall x_k\alpha,Y}$
$(+\exists)$	$\dfrac{X,S(u_m,x_k,\alpha) \Vdash Y}{X,\exists x_k\alpha \Vdash Y}$	$(\exists +)$	$\dfrac{X \Vdash S(t,x_k,\alpha),Y}{X \Vdash \exists x_k\alpha,Y}$

Reguły $(\forall+)$ oraz $(+\exists)$ są obwarowane dodatkowymi zastrzeżeniami. Mogą one mianowicie być stosowane, o ile:

- $(\forall+)$ zmienna u_m nie jest zmienną wolną w α ani w żadnej z formuł występujących w X lub w Y,
- $(+\exists)$ zmienna u_m nie jest zmienną wolną w żadnej z formuł występujących w X lub w Y.

Operację $\mathbf{G}_{krp}$ ***konsekwencji Gentzenowskiej*** w KRP określamy następująco dla dowolnego zbioru formuł Gentzena X:

$$\mathbf{G}_{krp}(X) = \{\alpha : \alpha \text{ jest formułą Gentzena oraz } Y \Vdash \alpha \text{ dla pewnego skończonego zbioru } Y \subseteq X\}.$$

Tak określona operacja $\mathbf{G}_{krp}$ ma własności (C1)–(C4) z definicji ogólnej operacji konsekwencji.

26.1.2. Przykłady dowodów

Zbiór $\mathbf{G}_{krp}(\emptyset)$, czyli ogół wszystkich $\Vdash$-konsekwencji zbioru pustego, to zbiór wszystkich ***tez*** systemu Gentzena dla KRP. Jeśli więc, stosując podane wyżej reguły, otrzymamy sekwent $\emptyset \Vdash \alpha$, to α jest tezą systemu Gentzena. Zamiast $\emptyset \Vdash X$ piszemy $\Vdash X$, a zamiast $\emptyset \Vdash \alpha$ piszemy $\Vdash \alpha$.

Oto cztery proste przykłady dowodów w rozważanym systemie, zaczerpnięte z monografii W.A. Pogorzelskiego. W ostatniej z prawej kolumnie podawany jest symbol reguły, na mocy której formuła z rozważanego wiersza została otrzymana jako wniosek z formuły z wiersza poprzedzającego.

DOWÓD SEKWENTU: $\Vdash \forall x_k\alpha \rightarrow S(t, x_k, \alpha)$.

$$\begin{array}{ll}
S(t, x_k, \alpha) \Vdash S(t, x_k, \alpha) & \\
\hline
\forall x_k\alpha \Vdash S(t, x_k\alpha) & (+\forall) \\
\hline
\Vdash \forall x_k\alpha \rightarrow S(t, x_k, \alpha) & (\rightarrow +).
\end{array}$$

DOWÓD SEKWENTU: $\Vdash \forall x_k(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\forall x_k\alpha \rightarrow \forall x_k\beta)$. Zakładamy, że u nie jest zmienną wolną ani w α, ani w β.

$$\begin{array}{ll}
S(u, x_k, \alpha), S(u, x_k, \alpha \rightarrow \beta) \Vdash S(u, x_k, \beta) & \\
\hline
\forall x_k\alpha, S(u, x_k, \alpha \rightarrow \beta) \Vdash S(u, x_k, \beta) & (+\forall) \\
\hline
\forall x_k\alpha, \forall x_k(\alpha \rightarrow \beta) \Vdash S(u, x_k, \beta) & (+\forall) \\
\hline
\forall x_k\alpha, \forall x_k(\alpha \rightarrow \beta) \Vdash \forall x_k\beta & (\forall+) \\
\hline
\forall x_k(\alpha \rightarrow \beta) \Vdash \forall x_k\alpha \rightarrow \forall x_k\beta & (\rightarrow +) \\
\hline
\Vdash \forall x_k(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\forall x_k\alpha \rightarrow \forall x_k\beta) & (\rightarrow +).
\end{array}$$

DOWÓD SEKWENTU: $\Vdash \alpha \rightarrow \forall x_k\alpha$.

$$\dfrac{\dfrac{\alpha \Vdash S(u, x_k, \alpha)}{\alpha \Vdash \forall x_k \alpha}\ (\forall +)}{\Vdash \alpha \to \forall x_k \alpha}\ (\to +).$$

DOWÓD SEKWENTU: $\Vdash \exists x_k \alpha \equiv \neg \forall x_k \neg \alpha$. Zakładamy, że u nie jest zmienną wolną w α.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{S(u, x_k, \alpha), \neg S(u, x_k, \alpha) \Vdash \emptyset}{S(u, x_k, \alpha), \forall x_k \neg \alpha \Vdash \emptyset}\ (+\forall)}{S(u, x_k, \alpha) \Vdash \neg \forall x_k \neg \alpha}\ (\neg +)}{\exists x_k \alpha \Vdash \neg \forall x_k \neg \alpha}\ (+\exists) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Vdash S(u, x_k, \alpha), \neg S(u, x_k, \alpha)}{\Vdash \exists x_k \alpha, \neg S(u, x_k, \alpha)}\ (\exists +)}{\Vdash \exists x_k \alpha, \forall x_k \neg \alpha}\ (\forall +)}{\neg \forall x_k \neg \alpha \Vdash \exists x_k \alpha}\ (+\neg)}{\Vdash \exists x_k \alpha \equiv \neg \forall x_k \neg \alpha\ (\exists +).}$$

26.2. Równoważność wszystkich omawianych konsekwencji w KRP

Dla każdej z operacji konsekwencji:

- wyznaczonej przez tablice analityczne,
- aksjomatycznej,
- założeniowej,
- rezolucyjnej,
- Gentzenowskiej,

zachodzą twierdzenia o trafności i pełności. A zatem, zbiory tez w każdym z wymienionych ujęć są takie same. Nie jest to żadnym zaskoczeniem, gdyż w przypadku każdej z wymienionych metod dowodowych cel był ten sam: syntaktyczne scharakteryzowanie zbioru wszystkich tautologii KRP.

Zachodzą zatem następujące równości, dla dowolnego zbioru formuł X języka KRP:

$$C_{tab}(X) = C_{krp}(X) = C_{sb}(X) = C_{rez}(X).$$

Pewne zabiegi językowe oraz nieznaczna modyfikacja konsekwencji Gentzenowskiej pozwalają przyrównać do powyższych także zbiór $\mathbf{G}_{krp}(X)$.

Poszczególne z wymienionych metod dowodowych różnią się m.in. jeśli chodzi o walory aplikacyjne. Dla przykładu, metoda aksjomatyczna ma zalety, gdy chcemy prowadzić rozważania metalogiczne, jest natomiast dość uciążliwa w przeprowadzaniu codziennych, porannych lub wieczornych, dowodów. Różne odmiany metody tablic analitycznych okazały się wielce użyteczne w automatycznym dowodzeniu twierdzeń. metoda założeniowa (dedukcja naturalna) oraz rachunki sekwentów są bodaj najbardziej przyjazne, gdy chodzi o praktyczne przeprowadzanie dowodów.

Uwagi końcowe

Wykłady 27–30 będą poświęcone w roku akademickim 2007–2008 powtórce całego materiału oraz przygotowaniu do egzaminu. W następnym roku akademickim, za przyzwoleniem Losu, na wykładach 27–30 omawiane będą: matematyczne reprezentacje pojęcia obliczalności, elementy metalogiki, teoria modeli oraz logiki modalne.

Powyższe notatki nie są pomyślane jako standardowy podręcznik logiki. Mają być jedynie prezentacją kilku metod dowodowych. Notatki te są obecnie poprawiane i rozszerzane. Celem jest przygotowanie, w miarę nowoczesnego podręcznika logiki, na który mają złożyć się m.in. teksty wykładów, zamieszczane na stronach internetowych Zakładu Logiki Stosowanej UAM.

* * *

Jak wiadomo, LOGIKA zajmuje się pojęciami: DOWODU oraz WYNIKANIA LOGICZNEGO. Związki między tymi pojęciami ustalają twierdzenia metalogiczne: TWIERDZENIE O TRAFNOŚCI oraz TWIERDZENIE O PEŁNOŚCI. Pewne TWIERDZENIA LIMITACYJNE określają samoograniczenia stosowalności metod KRP. Tak więc, KLASYCZNY RACHUNEK LOGICZNY jest dyscypliną o dobrze rozwiniętej metodologii. Należy jednak pamiętać, że LOGIKA nie jest dyscypliną zamkniętą. Nowe inspiracje dla niej znajdujemy na kilku obszarach. Wymieńmy trzy z nich:

- PRAKTYKA BADAWCZA MATEMATYKI. Pojęcie DOWODU rozważane w logice jest tylko idealizacją (normatywną względem *Przeszłości*?) praktyki matematycznej. Przy tym, to owa praktyka matematyków jest fundamentalna dla tworzenia pojęć logicznych (a nie na odwrót). Tak więc, rozwój logiki może być inspirowany przez badania matematyczne. W ten sposób powstały np. logiki wyższych rzędów, logiki infinitarne, logiki z uogólnionymi kwantyfikatorami, logiki intuicjonistyczne, itd.
- TEORETYCZNE PODSTAWY INFORMATYKI. Z oczywistych powodów badania informatyczne muszą być wspomagane badaniami logicznymi. Źródeł informatyki teoretycznej poszukiwać należy przecież w rozważaniach logicznych. Rozwój informatyki inspiruje z kolei nowe badania logiczne. W ten sposób powstały np. logiki algorytmiczne, nowe interpretacje dla logik modalnych, itd.
- PRAGMATYKA LOGICZNA. Pojęcie NIEZAWODNEJ REGUŁY WNIOSKOWANIA zostało wyabstrahowane (w cywilizacji Zachodu) z rozumowań przeprowadzanych w językach etnicznych. W tej postaci, w jakiej stosowane jest ono obecnie (odwołującej się do czysto FORMALNYCH, składniowych, własności komunikatów oraz do znaczenia ustalonego zestawu STAŁYCH LOGICZNYCH) jest ono adekwatne do opisu tworzenia i przekształcania WIEDZY w aparaturze pojęciowej poszczególnych nauk. Jest problemem otwartym, czy ***obecnie*** znane systemy logiczne potrafią trafnie reprezentować wszelkie rozumowania przeprowadzane w językach etnicznych, którym chcielibyśmy nadać walor — jakoś pragmatycznie rozumianej — prawomocności. Stąd kolejna inspiracja dla badań logicznych.

* * *

Przypomnijmy, że jednym ze skromnych celów niniejszych notatek jest to, aby uświadomić ewentualnym czytelniczkom różnice między:

- ***Wynikaniem logicznym*** a ***uzasadnianiem*** oraz ***uznawaniem*** zdań. Pierwsze z tych pojęć ma, w dzisiejszym rozumieniu, charakter obiektywny; drugie i trzecie mogą odwoływać się do różnych czynników, także natury pragmatycznej. Uzasadnianie może mieć postać precyzyjnego dowodu, ale może też odwoływać się do zabawnych reguł LOGIKI UZNANIOWEJ.
- ***Dowodzeniem*** a procedurami czysto ***algorytmicznymi***. Pierwsza z tych aktywności ma charakter ***twórczy***, drugie są działaniami wedle określonego przepisu.

Jeśli lektura niniejszych notatek nie przeszkodzi w osiągnięciu tych celów, to pozwolimy sobie uznać, że nasza praca miała SENS.

Literatura wykorzystywana w wykładzie 26

Lyndon, R.C. 1978. *O logice matematycznej*. PWN, Warszawa.

Ławrow, I.A., Maksimowa, L.L. 2004. *Zadania z teorii mnogości, logiki matematycznej i teorii algorytmów*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Pogorzelski, W.A. 1981. *Klasyczny rachunek predykatów*. PWN, Warszawa.

Pogorzelski, W.A. 1992. *Elementarny słownik logiki formalnej*. Uniwersytet Warszawski, Filia w Białymstoku, Białystok.

Smullyan, R. 1968. *First Order Logic*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York.

6. Metalogika a teoria mnogości

— informacje o zdaniach niezależnych w ZF

Dodatek: Wielkie Twierdzenia Metalogiczne w Interpretacjach Popularnych

Pokażemy na koniec kilka przykładów, ilustrujących jak formułować można niektóre twierdzenia metalogiczne w wersjach „popularnych”, przeznaczonych dla czytelników, którzy z jakiegoś powodu nie chcą ponosić trudu (doznawać przyjemności?)

nauczenia się skomplikowanego formalizmu matematycznego. Nie będą jednak owe interpretacje podawane w wersjach „gazetowych". Odwołamy się do prac mistrza w popularyzacji logiki, a mianowicie Raymonda Smullyana.

Trochę bibliografii

Oto niektóre książki z zagadkami logicznymi Raymonda Smullyana:

- *Jaki jest tytuł tej książki? Tajemnica Drakuli, zabawy i łamigłówki logiczne.* Warszawa 1993. Przełożył: Bohdan Chwedeńczuk. Trzy wydania polskie.
- *Dama czy tygrys oraz inne zagadki logiczne.* Warszawa 1995, 2004. Przełożył: Bohdan Chwedeńczuk.
- *Szatan, Cantor i nieskończoność oraz inne łamigłówki.* Warszawa 1998. Przełożyli z angielskiego: Anna i Krzysztof Wójtowicz.
- *Przedrzeźniać Przedrzeźniacza. Oraz Inne Zagadki Logiczne Łącznie z Zadziwiającą Przygodą w Krainie Logiki Kombinatorycznej.* Warszawa 2007. Przekład z języka angielskiego: Jerzy Pogonowski.
- *Forever Undecided. A Puzzle Guide to Gödel.* Oxford University Press, 1988. Z angielskiego przełożył Jerzy Pogonowski. Ukazało się w 2007 jako: *Na zawsze nierozstrzygnięte. Zagadkowy Przewodnik po Twierdzeniach Gödla.*

Przykład pierwszy: minijęzyk Smullyana

Dla oswojenia się z rozumowaniami przekątniowymi, które odgrywają istotną rolę np. w dowodzie Twierdzenia Gödla o niezupełności Arytmetyki Peana pobawimy się pewnym małym systemem logicznym, skonstruowanym przez Raymonda Smullyana (zob. rozdział 15 w *Szatan, Cantor i nieskończoność oraz inne łamigłówki.*).

Minijęzyk Smullyana

Rozważmy język o czterech symbolach: $\clubsuit, \spadesuit, \diamondsuit, \heartsuit$.

Wyrażeniem tego języka jest dowolny skończony ciąg tych symboli.

Zbudujemy miniaturowy ***system*** S, w którym można ***dowodzić*** pewnych wyrażeń tego języka.

Nie będzie przy tym istotne, na czym polega owa ***dowodliwość***.

Interesować nas będzie jedynie jej związek z określoną dla tego języka ***prawdziwością*** jego wyrażeń.

Wyrażenia, które nie są prawdziwe w S nazwiemy ***fałszywymi*** w S.

Nie będzie istotne, ***czym*** jest prawdziwość. Ważne będą jedynie wzajemne związki dowodliwości i prawdziwości.

Przypiszemy wyrażeniom tego języka następującą interpretację:

- $\spadesuit X$ — stwierdza, że wyrażenie X jest dowodliwe w S;
- $\clubsuit X$ — stwierdza, że wyrażenie XX jest dowodliwe w S;
- $\heartsuit X$ — stwierdza, że wyrażenie X nie jest dowodliwe w S;
- $\diamondsuit X$ — stwierdza, że wyrażenie XX nie jest dowodliwe w S.

Powiemy, że:

- $\spadesuit X$ jest prawdziwe w S, gdy X jest dowodliwe w S;
- $\clubsuit X$ jest prawdziwe w S, gdy XX jest dowodliwe w S;
- $\heartsuit X$ jest prawdziwe w S, gdy X nie jest dowodliwe w S;
- $\diamondsuit X$ jest prawdziwe w S, gdy XX nie jest dowodliwe w S.

Widać, że ważną cechą systemu S jest jego ***samozwrotność*** — można w nim udowodnić różne zdania, stwierdzające, co w tym systemie jest, a co nie jest dowodliwe.

Jedyne założenie, które czynimy o systemie S to założenie jego ***poprawności***: wszystkie zdania dowodliwe w S są prawdziwe w S.

Konsekwencjami tego założenia są:

- W_1 Jeśli $\spadesuit X$ jest dowodliwe w S, to X jest dowodliwe w S.
- W_2 Jeśli $\heartsuit X$ jest dowodliwe w S, to X nie jest dowodliwe w S.
- W_3 Jeśli $\clubsuit X$ jest dowodliwe w S, to XX jest dowodliwe w S.
- W_4 Jeśli $\diamondsuit X$ jest dowodliwe w S, to XX nie jest dowodliwe w S.

Twierdzenie Gödla dla S

Istnieje wyrażenie prawdziwe w S, które nie jest dowodliwe w S.
DOWÓD. Takim wyrażeniem jest $\diamondsuit\diamondsuit$.

Stwierdza ono, że podwojenie wyrażenia $\diamondsuit$ nie jest dowodliwe.

Podwojeniem $\diamondsuit$ jest $\diamondsuit\diamondsuit$.

Zatem $\diamondsuit\diamondsuit$ jest prawdziwe w S wtedy i tylko wtedy, gdy nie jest dowodliwe w S.

Oznacza to, że $\diamondsuit\diamondsuit$ jest:

- prawdziwe w S i niedowodliwe w S; albo
- fałszywe w S i dowodliwe w S.

Drugi człon tej alternatywy jest wykluczony ze względu na poprawność S: tylko zdania prawdziwe są dowodliwe.

Zatem zachodzi pierwszy człon tej alternatywy.

UWAGA. Jest chyba dla wszystkich oczywiste, że nasza ***zamierzona*** interpretacja mini-języka Smullyana jest jedną z wielu ***możliwych*** interpretacji.

To, co jest istotne, to:

- W_0 możliwość interpretowania ***ciągów*** symboli;
- warunki W_1—W_4.

Można więc myśleć o innych jeszcze interpretacjach, spełniających te warunki. Dla przykładu, symbol $\spadesuit$ możemy interpretować jako:

- ***drukowalny*** (przez jakąś maszynę);
- ***poznawalny*** (przez jakiś podmiot);
- ***akceptowalny*** (np. przez Watykan).

Anything goes, jeśli tylko spełnione są warunki W_0—W_4.

Nierozstrzygalność systemu S

Operacja sprzężenia.

- Sprzężeniem $\spadesuit X$ jest $\heartsuit X$.
- Sprzężeniem $\heartsuit X$ jest $\spadesuit X$.
- Sprzężeniem $\clubsuit X$ jest $\diamondsuit X$.
- Sprzężeniem $\diamondsuit X$ jest $\clubsuit X$.

Sprzężenie X oznaczamy przez $\overline{X}$. Dla dowolnej pary wyrażeń sprzężonych, jedno z nich jest prawdziwe w S, a drugie jest fałszywe w S.

Wyrażenie nazywamy ***obalalnym*** w S, gdy jego sprzężenie jest dowodliwe w S. Zatem:

- $\heartsuit X$ obalane w S wtedy i tylko wtedy, gdy $\spadesuit X$ dowodliwe w S.
- $\spadesuit X$ obalane w S wtedy i tylko wtedy, gdy $\heartsuit X$ dowodliwe w S.
- $\clubsuit X$ obalane w S wtedy i tylko wtedy, gdy $\diamondsuit X$ dowodliwe w S.
- $\diamondsuit X$ obalane w S wtedy i tylko wtedy, gdy $\clubsuit X$ dowodliwe w S.

Wyrażenie, które nie jest ani dowodliwe w S, ani obalalne w S nazwiemy ***nierozstrzygalnym*** w S.

Pokazaliśmy, że $\diamondsuit\diamondsuit$ jest prawdziwe i niedowodliwe w S.

Z prawdziwości $\diamondsuit\diamondsuit$ wynika, że wyrażenie z nim sprzężone, czyli $\clubsuit\diamondsuit$ jest fałszywe w S.

Stąd, na mocy poprawności S, wyrażenie $\clubsuit\diamondsuit$ jest także niedowodliwe w S.

Stąd i z definicji $\clubsuit$, mamy, iż $\diamondsuit\diamondsuit$ jest niedowodliwe w S.

Oznacza to, iż wyrażenie $\diamondsuit\diamondsuit$ jest ***nierozstrzygalne*** w S.

UWAGA. Można przeprowadzić powyższą argumentację wcale nie odwołując się do pojęcia prawdy.

Istotnie, nierozstrzygalność wyrażenia $\diamondsuit\diamondsuit$ udowodnić można bezpośrednio z warunków W_1—W_4.

(1) Przypuśćmy, że $\diamondsuit\diamondsuit$ jest dowodliwe.

Podstawiając za X w W_4 wyrażenie $\diamondsuit$ otrzymujemy, że podwojenie $\diamondsuit$ jest niedowodliwe, co znaczy, że $\diamondsuit\diamondsuit$ jest niedowodliwe. ***Sprzeczność***.

Zatem $\diamondsuit\diamondsuit$ nie jest dowodliwe.

(2) Gdyby dowodliwe było sprzężenie wyrażenia $\diamondsuit\diamondsuit$, czyli wyrażenie $\clubsuit\diamondsuit$, to na mocy warunku W_3 (podstawiamy $\diamondsuit$ za X) wyrażenie $\diamondsuit\diamondsuit$ byłoby dowodliwe.

Pokazaliśmy już jednak, że $\diamondsuit\diamondsuit$ nie jest dowodliwe.

Wynika stąd, że $\clubsuit\diamondsuit$ również nie jest dowodliwe.

Ostatecznie, wyrażenie $\diamondsuit\diamondsuit$ nie jest rozstrzygalne w S.

Ciekawe wyrażenia systemu S

- $\heartsuit\diamondsuit$ stwierdza o sobie, że jest obalalne.
- $\diamondsuit\clubsuit$ stwierdza o sobie, że nie jest obalalne.
- $\clubsuit\clubsuit$ stwierdza o sobie, że jest dowodliwe.
- Dla dowolnego wyrażenia E istnieje wyrażenie X, które stwierdza, że EX jest dowodliwe (tj. X jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy EX jest dowodliwe).

  DOWÓD. $X = \heartsuit E\heartsuit$.
- Dla dowolnego wyrażenia E istnieje wyrażenie X, które stwierdza, że EX nie jest dowodliwe.

  DOWÓD. $X = \diamondsuit E\diamondsuit$.
- Dla dowolnego wyrażenia E istnieje wyrażenie X, które stwierdza, że $E\overline{X}$ jest dowodliwe.

  Dla dowolnego wyrażenia E istnieje wyrażenie X, które stwierdza, że $E\overline{X}$ nie jest dowodliwe.
- Istnieją wyrażenia X i Y takie, że:

- X stwierdza, że Y jest dowodliwe.
- Y stwierdza, że X nie jest dowodliwe.

Co najmniej jedno z wyrażeń X, Y musi być prawdziwe, ale nie ma metody ustalenia, które.

- Istnieją wyrażenia X i Y takie, że:
  - X stwierdza, że Y jest obalalne.
  - Y stwierdza, że X nie jest obalalne.

  Co najmniej jedno z wyrażeń X, Y musi być fałszywe, ale nieobalalne.

- Istnieją wyrażenia X i Y takie, że:
  - X stwierdza, że Y jest dowodliwe.
  - Y stwierdza, że X jest obalalne. Jedno z nich jest prawdziwe, ale niedowodliwe, a drugie fałszywe, ale nieobalalne.

- Istnieją wyrażenia X i Y takie, że:
  - X stwierdza, że Y nie jest dowodliwe.
  - Y stwierdza, że X nie jest obalalne.

- Istnieją wyrażenia X, Y i Z takie, że:
  - X stwierdza, że Y jest obalalne.
  - Y stwierdza, że Z jest nieobalalne.
  - Z stwierdza, że X jest dowodliwe.

  Nadto, zachodzi jedna z trzech możliwości:
  - X jest prawdziwe, ale nie jest dowodliwe.
  - Y jest fałszywe, ale nie jest obalalne.
  - Z jest fałszywe, ale nie jest obalalne.

Systemy regularne

Powiemy, że system S, spełniający warunki W_1—W_4 jest *regularny*, jeśli spełnione są także warunki:

- Jeśli X jest dowodliwe w S, to $\spadesuit X$ jest dowodliwe w S.
- Jeśli XX jest dowodliwe w S, to $\clubsuit X$ jest dowodliwe w S.

Z tej definicji oraz z warunków W_1 i W_3 wynika, że jeśli S jest systemem regularnym, to:

- $\spadesuit X$ jest dowodliwe wtedy i tylko wtedy, gdy X jest dowodliwe.
- $\clubsuit X$ jest dowodliwe wtedy i tylko wtedy, gdy XX jest dowodliwe.

Wyrażenia ***pozytywne*** to wyrażenia postaci $\spadesuit X$ lub $\clubsuit X$.
Wyrażenia ***negatywne*** to wyrażenia postaci $\heartsuit X$ lub $\diamondsuit X$.

- System S jest regularny wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie prawdziwe wyrażenia pozytywne S są dowodliwe w S.
- Jeśli system S jest regularny, to każde fałszywe wyrażenie negatywne jest obalalne w S.
- Jeśli S jest regularny, to dla dowolnego wyrażenia X oraz dowolnego ciągu E symboli $\spadesuit$: wyrażenie EX jest dowodliwe wtedy i tylko wtedy, gdy X jest dowodliwe.
- W systemie regularnym $\clubsuit X$ jest dowodliwe wtedy i tylko wtedy, gdy $\spadesuit XX$ jest dowodliwe.
- Jeśli E jest dowolnym ciągiem symboli $\spadesuit$, to wyrażenie $\diamondsuit E\diamondsuit$ jest prawdziwe i niedowodliwe we *wszystkich* systemach regularnych. Zatem istnieje *nieskończenie* wiele wyrażeń prawdziwych i niedowodliwych we wszystkich systemach regularnych.

Przykład drugi: systemy przekonań

Pokazujemy kilka twierdzeń z naszego tłumaczenia książki Raymonda Smullyana *Forever Undecided. A Puzzle Guide to Gödel.*, które ukazało się w 2007 roku nakładem *Książki i Wiedzy*, pod tytułem *Na Zawsze Nierozstrzygnięte. Zagadkowy Przewodnik Po Twierdzeniach Gödla.*

Obok zagadek o Rycerzach (mówiących zawsze prawdę) oraz Łotrach (mówiących zawsze fałsz), książka zawiera zagadki logiczne, w których w formie popularnej przedstawia się *logikę epistemiczną* oraz *logikę dowodliwości*.

Kilka książek o logice dowodliwości:

- Boolos, G. 1993. *The Logic of Provability.* Cambridge University Press.
- Smullyan, R. 1992. *Gödel's Incompleteness Theorems.* Oxford University Press.

Książki polskie:

- Jacek Hawranek: *Aspekty algebraiczne systemu modalnego Gödla–Löba.* Wydawnictwo Uniwersytetu Wrocławskiego, Wrocław, 1994.
- Andrzej Indrzejczak: *Hybrydowe systemy dedukcyjne w logikach modalnych.* Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź, 2006.

- Jerzy Perzanowski: *Logiki modalne a filozofia.* Uniwersytet Jagielloński, Rozprawy Habilitacyjne nr 156, Kraków, 1989.
- Kazimierz Świrydowicz: *Podstawy logiki modalnej.* Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań, 2004.

Pokażemy w tym dodatku:

- **Systemy przekonań.** Kto jest ***prostaczkiem logicznym***?
- **Poziomy samoświadomości.** Kto jest ***szczęściarzem epistemicznym***?
- **II Twierdzenie Gödla.**

  Czy możesz wiedzieć, że twój system przekonań jest niesprzeczny, bez popadnięcia przy tym w sprzeczność?
- **Twierdzenie Löba i samospełniające się przekonania.**

  Kiedy *wishful thinking* ma wartość?
- **I Twierdzenie Gödla i Twierdzenie Rossera (o niezupełności).**

  Czy łatwy jest los *Besserwissera*?
- **Twierdzenie Tarskiego.**

  Czy *dictum*: ***Doctrina multiplex, veritas una!*** jest mrzonką?

Systemy przekonań

Notacja. Operatory doksastyczne i epistemiczne to np.:

- $\boldsymbol{B}$ — zdanie $\boldsymbol{B}p$ czytamy: *(rozważany podmiot) wierzy, że* p;
- $\boldsymbol{K}$ — zdanie $\boldsymbol{K}p$ czytamy *(rozważany podmiot) wie, że* p.

(gdzie p jest dowolnym zdaniem języka logiki epistemicznej). Zwykle zakłada się, że $\boldsymbol{K}p \equiv (p \wedge \boldsymbol{B}p)$.

Systemy epistemiczne są interesujące same przez się — w opisie systemów przekonań, w szczególności: racjonalnych świadomych przekonań. Mają one także interesującą i ważną interpretację metalogiczną:

$\boldsymbol{B}p$ można interpretować jako *zdanie* p *jest dowodliwe w arytmetyce PA*.

Uwaga. Angielski termin reasoner oddaję przez polski neologizm myślak.

Przypuśćmy, że jesteś racjonalną, samoświadomą Istotą. Jak to przypuszczenie przełożyć na język logiki epistemicznej? Oto propozycja. Nazwiemy ***szczęściarzem epistemicznym*** każdą osobę S, której system przekonań spełnia warunki:

- (1a) S wierzy we wszystkie tautologie klasycznego rachunku zdań;
- (1b) system przekonań S jest domknięty na regułę *modus ponens*:
  jeśli S wierzy w p oraz wierzy w $p \rightarrow q$, to wierzy także w q;

- (2) dla dowolnych p oraz q, S wierzy w $(\boldsymbol{B}p \wedge \boldsymbol{B}(p \rightarrow q)) \rightarrow \boldsymbol{B}q$;
- (3) dla dowolnego p, jeśli S wierzy w p, to wierzy w $\boldsymbol{B}p$;
- (4) dla dowolnego p, S wierzy w $\boldsymbol{B}p \rightarrow \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}p$.

Uwaga: rozważamy tylko osoby, które albo zawsze mówią prawdę, albo zawsze mówią fałsz.

Poziomy samoświadomości

Każdą osobę, która spełnia jedynie warunki (1a) i (1b) nazwiemy prostaczkiem logicznym. Zatem, jeśli S jest prostaczkiem logicznym, to jego/jej system przekonań zawiera klasyczną logikę zdaniową, ale S może być tego nieświadom(a).

Powiemy, że osoba S jest:

- ***normalna***, gdy jeśli wierzy w p, to wierzy też w $\boldsymbol{B}p$;
- ***regularna***, gdy jeśli wierzy w $p \rightarrow q$, to wierzy też w $\boldsymbol{B}p \rightarrow \boldsymbol{B}q$;
- ***sprzeczna***, gdy do jej systemu przekonań należy jakaś para zdań wzajem sprzecznych, lub — co na jedno wychodzi — *fałsz logiczny*, który oznaczamy przez $\bot$.

Uwaga. Może bardziej właściwe byłoby mówienie o własnościach *systemów przekonań*, a nie osób.

Można udowodnić, że: $(*)$ dowolny szczęściarz epistemiczny S *wie*, że jeśli uwierzy w jakieś zdanie p oraz w jego negację $\neg p$, to stanie się sprzeczny.

O szczęściarzach epistemicznych można udowodnić wiele innych ciekawych rzeczy. Nie wszystkie z nich będą nam dalej potrzebne. Dodajmy może jedynie, że:

- każdy szczęściarz epistemiczny jest normalny, a nawet *wie*, że jest normalny;
- każdy szczęściarz epistemiczny jest regularny i o tym także *wie*;
- wreszcie, każdy szczęściarz epistemiczny jest przekonany o tym, że jest szczęściarzem epistemicznym; a zatem to jego przekonanie jest trafne i, w konsekwencji, każdy szczęściarz epistemiczny wie, że jest szczęściarzem epistemicznym.

Można rozważać pięć typów myślaków, o wstępujących poziomach samoświadomości:

- Typ 1: prostaczek logiczny.
- Typ 1*: prostaczek logiczny, który, jeśli uwierzył w $p \rightarrow q$, to uwierzy, że jeśli uwierzył w p, to uwierzy w q.
- Typ 2: prostaczek logiczny, który wierzy we wszystkie zdania postaci $(\boldsymbol{B}p \wedge \boldsymbol{B}(p \rightarrow q)) \rightarrow \boldsymbol{B}q$.

- Typ 3: myślak typu 2, który, jeśli wierzy w p, to wierzy w $\boldsymbol{B}p$.
- Typ 4: szczęściarz epistemiczny, tj. normalny i regularny prostaczek logiczny, który wierzy we wszystkie zdania postaci $\boldsymbol{B}p \rightarrow \boldsymbol{BB}p$, czyli wierzy, że jest normalny.

Uwaga. Terminy: ***prostaczek logiczny*** oraz ***szczęściarz epistemiczny*** nie występują w *Forever Undecided*; wprowadzamy je na użytek tej prezentacji.

Z podanych definicji wynika, że:

- Każdy prostaczek logiczny jest myślakiem typu 1^*.
- Każdy myślak typu 1^* jest regularnym prostaczkiem logicznym (i *vice versa*).
- Każdy myślak typu 2 wie, że jest typu 1^*.
- Myślaki typu 3 to dokładnie normalne myślaki typu 2.
- Dla $1 \leqslant n < 4$: każdy myślak typu n jest też myślakiem typu $n + 1$.
- $1 < n \leqslant 4$: każdy myślak typu n wierzy, że jest myślakiem typu $n - 1$.

Uwaga. Ponieważ każdy szczęściarz epistemiczny ***wie***, że jest szczęściarzem epistemicznym, więc stanowi on zwieńczenie hierarchii samoświadomych myślaków. Inaczej mówiąc, gdybyśmy chcieli zdefiniować myślaka typu 5 jako takiego, który jest typu 4 i wierzy, iż jest typu 4, to otrzymalibyśmy jedynie myślaka typu 4.

II Twierdzenie Gödla

Za chwilę dowiesz się czegoś naprawdę frapującego o swoim systemie przekonań. Udowodnimy mianowicie:

Twierdzenie 1.

Przypuśćmy, że normalny prostaczek logiczny S wierzy w zdanie postaci $p \equiv \neg\boldsymbol{B}p$. Wtedy:

- (a) Jeśli S kiedykolwiek uwierzy w p, to stanie się sprzeczny.
- (b) Jeśli S jest szczęściarzem epistemicznym, to wie, iż jeśli kiedykolwiek uwierzy w p, to stanie się sprzeczny — tj. uwierzy w $\boldsymbol{B}p \rightarrow \boldsymbol{B} \perp$.
- (c) Jeśli S jest szczęściarzem epistemicznym i wierzy, że nie może być sprzeczny, to stanie się sprzeczny.

Dowód Twierdzenia 1.

(a) Przypuśćmy, że S wierzy w p.

Będąc normalnym, uwierzy w $\boldsymbol{B}p$.

Nadto, ponieważ wierzy w p oraz wierzy w $p \equiv \neg\boldsymbol{B}p$, więc musi uwierzyć w $\neg\boldsymbol{B}p$ (bo jest prostaczkiem logicznym).

A więc uwierzy jednocześnie w $\boldsymbol{B}p$ oraz w $\neg\boldsymbol{B}p$, a stąd stanie się sprzeczny.

(b) Przypuśćmy, że S jest szczęściarzem epistemicznym. Ponieważ jest wtedy prostaczkiem logicznym i wierzy w $p \equiv \neg \boldsymbol{B}p$, więc musi także wierzyć w $p \rightarrow \neg \boldsymbol{B}p$.

Nadto, S jest regularny, a stąd uwierzy w $\boldsymbol{B}p \rightarrow \boldsymbol{B}\neg\boldsymbol{B}p$. Wierzy też w $\boldsymbol{B}p \rightarrow \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}p$ (ponieważ wie, że jest normalny).

Zatem S uwierzy w $\boldsymbol{B}p \rightarrow (\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}p \wedge \boldsymbol{B}\neg\boldsymbol{B}p)$, które jest logiczną konsekwencją ostatnich dwóch zdań.

Wierzy również w $(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}p \wedge \boldsymbol{B}\neg\boldsymbol{B}p) \rightarrow \boldsymbol{B} \perp$ (na mocy $(*)$, ponieważ dla dowolnego zdania X, S wierzy w $(\boldsymbol{B}X \wedge \boldsymbol{B}\neg X) \rightarrow \boldsymbol{B} \perp$, a więc wierzy w jego szczególny przypadek, gdzie X jest zdaniem $\boldsymbol{B}p$).

Gdy S już uwierzy jednocześnie w $\boldsymbol{B}p \rightarrow (\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}p \wedge \boldsymbol{B}\neg\boldsymbol{B}p)$ oraz w $(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}p \wedge \boldsymbol{B}\neg\boldsymbol{B}p) \rightarrow \boldsymbol{B} \perp$, będzie musiał uwierzyć w $\boldsymbol{B}p \rightarrow \boldsymbol{B} \perp$ (ponieważ jest prostaczkiem logicznym).

(c) Ponieważ S wierzy w $\boldsymbol{B}p \rightarrow \boldsymbol{B} \perp$ (jak właśnie udowodniliśmy), więc wierzy także w $\neg\boldsymbol{B} \perp \rightarrow \neg\boldsymbol{B}p$.

Załóżmy teraz, że S wierzy w $\neg\boldsymbol{B} \perp$ (wierzy, że nie może być sprzeczny).

Ponieważ wierzy też w $\neg\boldsymbol{B} \perp \rightarrow \neg\boldsymbol{B}p$ (jak właśnie widzieliśmy), więc uwierzy w $\neg\boldsymbol{B}p$.

A ponieważ wierzy również w $p \equiv \neg\boldsymbol{B}p$,

więc uwierzy w p, a stąd stanie się sprzeczny, na mocy (a).

Udowodniliśmy przed chwilą nie byle co, bo modalną (epistemiczną) wersję **II Twierdzenia Gödla** (o niedowodliwości niesprzeczności arytmetyki w samej arytmetyce).

Oczywiście był to dowód w postaci wielce uproszczonej — precyzyjny dowód wymagałby, powiedzmy, jednosemestralnego wykładu wstępnego.

W tej prezentacji korzystaliśmy z rozdziału 12 tłumaczenia książki Raymonda Smullyana *Forever Undecided*.

Poddajemy ocenie audytorium, czy ten sposób popularyzacji wiedzy (meta)logicznej można uznać za dydaktycznie przydatny.

Przykład teologiczny.

Przypuśćmy, że jesteś studentką teologii i że Twój Ulubiony Profesor teologii mówi do Ciebie:

Bóg istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy nigdy nie uwierzysz, że Bóg istnieje.

Jeśli wierzysz profesorowi, to wierzysz w zdanie $g \equiv \neg\boldsymbol{B}g$, gdzie g jest zdaniem stwierdzającym, że Bóg istnieje.

Wtedy, zgodnie z Twierdzeniem 1, nie możesz wierzyć w swoją własną niesprzeczność bez popadnięcia w sprzeczność.

Oczywiście, możesz wierzyć we własną niesprzeczność, bez popadnięcia przy tym w sprzeczność — wystarczy, że przestaniesz ufać Twojemu Ulubionemu Profesorowi.

Coś za coś.

Przy modalnej interpretacji *dowodliwości* nie mamy jednak takiej możliwości ucieczki, jak w powyższym przykładzie.

Wiadomo, że formuła $god(\overline{n})$, stwierdzająca swoją własną niedowodliwość w PA, jest prawdziwa, lecz dowodu w PA nie posiada.

Można pokazać, że twierdzeniem stosownego systemu modalnego (w którym reprezentujemy dowodliwość w PA) jest:

$$god(\overline{n}) \equiv \neg \boldsymbol{B} god(\overline{n}).$$

Samospełniające się przekonania

Pokażemy teraz, co wystarcza, aby każda z obecnych tu Uroczych Pań została — powiedzmy — **Miss World 2007**.

Będzie to przykład *samospełniającego się przekonania*.

Przypuśćmy, że:

- jesteś szczęściarą epistemiczną;
- osoby, które rozważamy albo zawsze mówią fałsz, albo zawsze mówią prawdę (i Ty wiesz, że tak jest);
- wierzysz swojemu chłopakowi, który prawdziwie (!) mówi:

  (†) *Jeśli uwierzysz, że zostaniesz Miss World 2007, to zostaniesz Miss World 2007.*
- wierzysz też mnie (JP), który mówi:

  (‡) *Jeśli wierzysz, że ja zawsze mówię prawdę, to zostaniesz Miss World 2007.*

Twierdzenie 2. Przy powyższych założeniach *zostaniesz* **Miss World 2007**. Cieszysz się?

Dla skrótu, przyjmijmy oznaczenia:

- k zastępuje zdanie stwierdzające, iż ja (JP) zawsze mówię prawdę;
- α zastępuje zdanie stwierdzające, że zostaniesz Miss World 2007.

Dowód składa się z dwóch części.

1. W pierwszej pokazujemy, że nasze założenia implikują $\boldsymbol{B}\alpha$. Jest to dowód założeniowy, dostępny dla każdej szczęściary epistemicznej.

Mamy udowodnić formułę:

$$(\bigstar) \qquad ((\boldsymbol{B}\alpha \to \alpha) \wedge (k \equiv (\boldsymbol{B}k \to \alpha))) \to \boldsymbol{B}\alpha.$$

Uwaga. Zdanie k stwierdza, iż JP zawsze mówi prawdę; a więc prawdą jest, że JP wypowiada (‡) dokładnie wtedy, gdy prawdziwe jest $k \equiv$ (‡), czyli dokładnie wtedy, gdy prawdziwe jest $k \equiv (\boldsymbol{B}k \to \alpha)$.

1.	$(\boldsymbol{B}\alpha \rightarrow \alpha) \wedge (k \equiv (\boldsymbol{B}k \rightarrow \alpha))$	założenie
2.	$\boldsymbol{B}\alpha \rightarrow \alpha$	OK: 1
3.	$k \equiv (\boldsymbol{B}k \rightarrow \alpha)$	OK: 1
4.	$k \rightarrow (\boldsymbol{B}k \rightarrow \alpha)$	OR: 3
5.	$(\boldsymbol{B}k \rightarrow \alpha) \rightarrow k$	OR: 3
6.1.	k	założenie dodatkowe
6.2.	$\boldsymbol{B}k \rightarrow \alpha$	MP: 4, 6.1.
6.3.	$\boldsymbol{B}k$	6.1. i warunek **(3)**
6.4.	α	MP: 6.2., 6.3.
7.	$k \rightarrow \alpha$	6.1.$\rightarrow$6.4.
8.	$\boldsymbol{B}(k \rightarrow \alpha)$	7 i warunek **(3)**
9.	$\boldsymbol{B}k \rightarrow \boldsymbol{B}\alpha$	8 i warunki **(1a)** i **(2)**
10.	$\boldsymbol{B}k \rightarrow \alpha$	2, 9 i warunki **(1b)**, **(1a)** (prawo sylog. hipotet.)
11.	k	MP: 5, 10
12.	$\boldsymbol{B}k$	11 i warunek **(3)**
13.	α	MP: 10, 12
14.	$\boldsymbol{B}\alpha$	13 i warunek **(3)**.

2. Ponieważ proroctwo $(\dagger)$ Twojego chłopaka (tj. zdanie $\boldsymbol{B}\alpha \rightarrow \alpha$) jest z założenia prawdziwe, a powyższy dowód formuły $(\bigstar)$ pokazuje, iż nasze założenia implikują $\boldsymbol{B}\alpha$, więc na mocy reguły odrywania otrzymujemy α, czyli tezę.

Zostaniesz Miss World 2007!!!

Cieszysz się???

Uwaga. Powyższy dowód był przykładem dowodu wprost. Aby pokazać, że zostaniesz Miss World 2007 nie musieliśmy odwoływać się do absurdu. Cieszysz się?

Ciekawostka prowincjonalna. 16 maja 2005 roku odbyły się demokratyczne wybory Dyrektora Instytutu Językoznawstwa UAM.

Dwa tygodnie wcześniej, na Seminarium Zakładu Logiki Stosowanej UAM, odczyt *Kto będzie Dyrektorem Instytutu Językoznawstwa UAM?* wygłosiła Pani Dr Alice Ann Hunter (*Department of Independent Logic*, **King David University**, Negev Desert).

Korzystając z twierdzeń logiki epistemicznej (z Twierdzenia Löba), Dr Hunter trafnie przewidziała wynik wyborów. Jak się domyślasz, dowód był podobny do podanego wyżej dowodu, że zostaniesz Miss World 2007.

Tekst odczytu dostępny na stronie:

www.logic.amu.edu.pl

I Twierdzenie Gödla

Myślak jest nazywany **stabilnym**, jeśli dla każdego zdania p, jeśli wierzy on w $\boldsymbol{B}p$, to wierzy też w p.

Powiemy, że system przekonań myślaka jest **niezupełny**, jeśli istnieje co najmniej jedno zdanie p takie, że myślak nigdy nie uwierzy w p ani też nigdy nie uwierzy w $\neg p$ (pozostanie na zawsze niezdecydowany, czy p jest prawdziwe, czy fałszywe).

Systemy przekonań, które nie są niezupełne, nazywamy *zupełnymi*. Osoby, które władają takimi systemami przekonań, są dość uciążliwe w kontaktach społecznych —

każda taka osoba jest *Besserwisserem*, kimś kto na każdy pogląd ma wyrobione zdanie, pozbawiony jest wątpliwości.

Gdy zajmujemy się *systemami twierdzeń* raczej niż *zespołami przekonań*, to *systemami typu 1* nazwiemy te, które spełniają warunki $1a$ i $1b$ podane wyżej.

Normalny prostaczek logiczny przybywa na Wyspę Rycerzy i Łotrów i wierzy w reguły wyspy. (To, czy reguły wyspy rzeczywiście obowiązują, czy nie, jest bez znaczenia.)

Spotyka tubylca, który mówi:

„Nigdy nie uwierzysz, że jestem rycerzem."

Udowodnimy, że zachodzi wtedy:

Twierdzenie 3.

Jeśli myślak jest jednocześnie niesprzeczny i stabilny, to jego system przekonań jest niezupełny. Dokładniej mówiąc, znajdziemy zdanie p takie, że zachodzą następujące dwa warunki:

- (a) Jeśli myślak jest niesprzeczny, to nigdy nie uwierzy w p.
- (b) Jeśli myślak jest jednocześnie niesprzeczny i stabilny, to nigdy nie uwierzy w $\neg p$.

Zdanie p o które chodzi jest po prostu zdaniem k — zdaniem stwierdzającym, że tubylec jest rycerzem.

Tubylec wygłosił $\neg \boldsymbol{B}k$, a więc myślak uwierzy w $k \equiv \neg \boldsymbol{B}k$.

(a) Przypuśćmy, że myślak wierzy w k. Wtedy, będąc normalnym, uwierzy w $\boldsymbol{B}k$. Uwierzy też w $\neg \boldsymbol{B}k$ (ponieważ wierzy w k oraz wierzy w $k \equiv \neg \boldsymbol{B}k$ i jest prostaczkiem logicznym), a stąd stanie się sprzeczny. Zatem, jeśli jest niesprzeczny, to nigdy nie uwierzy w k.

(b) Przypuśćmy, że myślak jest prostaczkiem logicznym i wierzy w $k \equiv \neg \boldsymbol{B}k$, wtedy wierzy też w $\neg k \equiv \boldsymbol{B}k$. Przypuśćmy teraz, że kiedykolwiek uwierzy on w $\neg k$. Wtedy uwierzy w $\boldsymbol{B}k$. Jeśli jest stabilny, to uwierzy w k i stąd stanie się sprzeczny (ponieważ wierzy w $\neg k$). Zatem, jeśli jest jednocześnie stabilny i niesprzeczny, to nigdy nie uwierzy w $\neg k$.

Podsumowując, jeśli jest on jednocześnie stabilny i niesprzeczny, to nigdy nie uwierzy że tubylec jest rycerzem i nigdy nie uwierzy, że tubylec jest łotrem.

To samo rozumowanie, którego użyto w rozwiązaniu powyższego problemu, gdy zastosować je do systemów matematycznych raczej niż do myślaków, ustanawia następującą postać ***Pierwszego Twierdzenia Gödla o Niezupełności***:

Twierdzenie 4. Dowolny niesprzeczny, normalny, stabilny system Gödlowski musi być niezupełny. Dokładniej, jeśli S jest normalnym systemem typu 1, a p jest zdaniem takim, że $p \equiv \neg \boldsymbol{B}p$ jest dowodliwe w S, to jeśli S jest niesprzeczny, to p nie jest dowodliwe w S, a jeśli S jest dodatkowo stabilny, to $\neg p$ również nie jest dowodliwe w S.

Zdanie p nazywamy **nierozstrzygalnym** w systemie S, jeśli ani p ani jego negacja $\neg p$ nie jest dowodliwe w S. Zatem Pierwsze Twierdzenie Gödla o Niezupełności mówi nam, że dla dowolnego niesprzecznego, normalnego, stabilnego systemu

Gödlowskiego S, musi zawsze istnieć co najmniej jedno zdanie p, które, choć *wyrażalne* w języku S, nie jest *rozstrzygalne* w S — nie można w S udowodnić ani tego zdania, ani jego negacji.

Dla dowolnej własności P liczb, zdanie stwierdzające, że istnieje co najmniej jedna liczba n mająca własność P zapisujemy: $\exists n P(n)$.

Przypuśćmy, że mamy system matematyczny i własność P taką, że zdanie $\exists n P(n)$ jest dowodliwe w systemie, a jednak dla każdego poszczególnego n zdanie $\neg P(n)$ jest dowodliwe — to jest, wszystkie z nieskończenie wielu zdań $\neg P(0)$, $\neg P(1)$, $\neg P(2)$,. . .,$\neg P(n)$,. . . są dowodliwe.

Oznacza to, z jednej strony, że w systemie można udowodnić zdanie stwierdzające, że jakaś liczba ma własność P, a jednak o każdej *poszczególnej* liczbie n można udowodnić, że liczba ta owej własności nie posiada!

Systemy takie nazywane są *ω-sprzecznymi*.

Pojęcie ω-sprzeczności zostało kiedyś zabawnie scharakteryzowane przez matematyka Paula Halmosa, który zdefiniował ω-sprzeczną matkę jako taką, która mówi swojemu dziecku: „Jest coś, co możesz robić, ale nie możesz robić tego, nie możesz robić tamtego, nie możesz robić owego, . . . ” Dziecko pyta: „Ale, mamusiu, czy jest *cokolwiek* co mógłbym robić?” Matka odpowiada: „O tak, ale nie jest to to, ani tamto, ani owo, . . . ”

System jest nazywany ω-niesprzecznym, jeśli nie jest on ω-sprzeczny. Tak więc dla systemu ω-niesprzecznego, jeśli $\exists n P(n)$ jest dowodliwe, to istnieje co najmniej jedna liczba n taka, że zdanie $\neg P(n)$ *nie jest* dowodliwe.

Sprzeczny system typu 1 jest również ω-sprzeczny, ponieważ w sprzecznym systemie typu 1 wszystkie zdania są dowodliwe.

We wszystkich dotąd rozważanych problemach, *kolejność* w której myślak wierzył w różnorakie zdania nie odgrywała roli. W pozostałych problemach w tej części, kolejność ta odgrywa rolę pierwszorzędną.

Myślak przybywa na Wyspę Rycerzy i Łotrów pewnego dnia, który nazwiemy dniem numer 0. Następny dzień jest dniem numer 1, następny dniem numer 2, i tak dalej.

Dla każdej liczby naturalnej n mamy więc dzień numer n (n-ty dzień) i zakładamy, że myślak jest nieśmiertelny i ma przed sobą nieskończenie wiele dni.

Dla każdej liczby naturalnej n i dowolnego zdania p niech $\boldsymbol{B}_n p$ będzie zdaniem stwierdzającym, że myślak uwierzył w p w jakimś momencie n-tego dnia.

Zdanie $\boldsymbol{B}p$ jest, jak zwykle, zdaniem stwierdzającym, że myślak uwierzy w p tego lub innego dnia, lub, co na jedno wychodzi, zdaniem $\exists n \boldsymbol{B}_n p$ (istnieje n takie, że myślak uwierzy w p n-tego dnia).

Nazwiemy myślaka *ω-sprzecznym*, jeśli istnieje co najmniej jedno zdanie p takie, że myślak (kiedyś) wierzy w $\boldsymbol{B}p$, a jednak dla każdego n wierzy on (kiedyś) w $\neg \boldsymbol{B}_n p$.

Myślaka nazywamy *ω-niesprzecznym*, jeśli nie jest on ω-sprzeczny.

Rozważmy teraz myślaka, który spełnia następujące trzy warunki.

- **Warunek $\mathbf{C}_1$.** Jest on typu prostaczkiem logicznym.
- **Warunek $\mathbf{C}_2$.** Dla dowolnej liczby naturalnej n i dowolnego zdania p: (a) jeśli myślak wierzy w p n-tego dnia, to (prędzej czy później) uwierzy w $\boldsymbol{B}_n p$; (b)

jeśli nie wierzy on w p n-tego dnia, to (prędzej czy później) uwierzy w $\neg \boldsymbol{B}_n p$. (Oddajemy w ten sposób, że myślak śledzi to, w jakie zdania wierzył, a w jakie nie wierzył we wszystkich dniach poprzednich.)

- **Warunek C$_3$.** Dla dowolnych n oraz p myślak wierzy w zdanie $\boldsymbol{B}_n p \rightarrow \boldsymbol{B} p$ (które, oczywiście, jest zdaniem prawdziwym).

Następujący problem jest bardzo zbliżony do oryginalnego sformułowania Gödla jego Pierwszego Twierdzenia o Niezupełności.

Myślak spełniający powyższe trzy warunki przybywa na Wyspę Rycerzy i Łotrów i wierzy w reguły wyspy. Spotyka tubylca, który mówi mu:

„Nigdy nie uwierzysz, że jestem rycerzem."

Udowodnimy, że zachodzi wtedy:

Twierdzenie 5.

- (a) Jeśli myślak jest (prosto) niesprzeczny, to nigdy nie uwierzy, że tubylec jest rycerzem.
- (b) Jeśli myślak jest ω-niesprzeczny, to nigdy nie uwierzy, że tubylec jest łotrem.

Zatem jeśli myślak jest ω-niesprzeczny (a stąd także prosto niesprzeczny), to pozostanie na zawsze niezdecydowany co do tego, czy tubylec jest rycerzem, czy też łotrem.

Najłatwiejszym sposobem rozwiązania obecnego problemu będzie pokazanie, że dowolny myślak spełniający warunki C_1, C_2 oraz C_3 musi być normalny, a jeśli jest ω-niesprzeczny, to musi być też stabilny.

(a) Pokazujemy, że jest on normalny.

Przypuśćmy, że wierzy on w p.

Wtedy dla pewnego n, wierzy on n-tego dnia w p.

Wtedy, na mocy punktu (a) z warunku 2, uwierzy w $\boldsymbol{B}_n p$.

Wierzy także w $\boldsymbol{B}_n p \rightarrow \boldsymbol{B} p$ (na mocy warunku 3), a więc będąc typu 1 (warunek 1) uwierzy w $\boldsymbol{B} p$.

Zatem jest normalny.

(b) Przypuśćmy teraz, że jest on ω-niesprzeczny.

Pokażemy, że jest stabilny.

Przypuśćmy, że wierzy on w $\boldsymbol{B} p$.

Jeśli nigdy nie uwierzy w p, to dla każdej liczby n, nie wierzy on w p n-tego dnia, a stąd na mocy punktu (b) z warunku 2, dla każdego n wierzy on w $\neg \boldsymbol{B}_n p$.

Ale ponieważ wierzy on w $\boldsymbol{B} p$, więc stanie się wtedy ω-sprzeczny.

Zatem, jeśli jest on ω-niesprzeczny i wierzy w $\boldsymbol{B} p$, to musi wierzyć w p tego lub innego dnia.

Dowodzi to, że jeśli jest on ω-niesprzeczny, to musi być stabilny (zakładając, że spełnia on warunki C$_1$, C$_2$, C$_3$ — lub nawet tylko (b) z warunku C$_2$).

Zatem, na mocy Twierdzenia 4, pozostanie on na zawsze niezdecydowany.

Twierdzenie Rossera

Dla dowolnych zdań p oraz q, powiemy, że myślak ***uwierzył w*** p **wcześniej niż** ***(zanim) uwierzył w*** q, jeśli jest taki dzień, w którym wierzy on w p, a jeszcze nie uwierzył w q. Jeśli myślak *nigdy* nie uwierzy w q, ale uwierzył w p (tego lub innego dnia), to uznajemy, iż *prawdziwe* jest, że uwierzył w p wcześniej, niż uwierzył w q. (Innymi słowy, nie musi on wcale kiedykolwiek uwierzyć w q, aby uwierzyć w p wcześniej niż uwierzyć w q.) Niech $\boldsymbol{B}p < \boldsymbol{B}q$ będzie zdaniem stwierdzającym, że myślak uwierzył w p wcześniej niż uwierzył w q. Jeśli $\boldsymbol{B}p < \boldsymbol{B}q$ jest prawdziwe, to oczywiście $\boldsymbol{B}q < \boldsymbol{B}p$ jest fałszywe.

Zdefiniujemy myślaka *Rosserowskiego* jako prostaczka logicznego, dla którego zachodzi następujący warunek:

Warunek R. Dla dowolnych zdań p oraz q, jeśli myślak uwierzył w p pewnego dnia, w którym jeszcze nie uwierzył w q, to (wcześniej czy później) uwierzy on w $\boldsymbol{B}p < \boldsymbol{B}q$ oraz w $\neg(\boldsymbol{B}q < \boldsymbol{B}p)$.

Myślak Rosserowski przybywa na Wyspę Rycerzy i Łotrów i wierzy w reguły wyspy. Spotyka tubylca, który mówi mu:

„Nigdy nie uwierzysz wcześniej, że jestem rycerzem, niż uwierzysz, że jestem łotrem.”

(Oddając to symbolicznie, tubylec wygłasza zdanie $\neg(\boldsymbol{B}k < \boldsymbol{B}\neg k)$.)

Udowodnimy:

Twierdzenie 6.

Jeśli myślak jest *po prostu* niesprzeczny, to musi na zawsze pozostać niezdecydowany, czy tubylec jest rycerzem, czy łotrem.

Ponieważ tubylec stwierdził $\neg(\boldsymbol{B}k < \boldsymbol{B}\neg k)$, więc myślak uwierzy w $k \equiv \neg(\boldsymbol{B}k < \boldsymbol{B}\neg k)$. Przypuśćmy, że myślak jest (prosto) niesprzeczny. Mamy pokazać, że nigdy nie uwierzy w k i nigdy nie uwierzy w $\neg k$.

(a) Przypuśćmy, że kiedyś uwierzył w k. Ponieważ jest niesprzeczny, więc nigdy nie uwierzy w $\neg k$, a stąd uwierzy w k wcześniej niż uwierzy w $\neg k$. Stąd, uwierzy w $\boldsymbol{B}k < \boldsymbol{B}\neg k$ (na mocy warunku R). Ale wierzy też w $k \equiv \neg(\boldsymbol{B}k < \boldsymbol{B}\neg k)$, a więc uwierzy w $\neg k$, a wierząc już w k stanie się sprzeczny! Tak więc, jeśli jest niesprzeczny, to nigdy nie uwierzy w k.

(b) Przypuśćmy, że kiedyś uwierzył w $\neg k$. Będąc niesprzecznym, nigdy nie uwierzy w k, a stąd uwierzy w $\neg k$ wcześniej niż uwierzy w k, a stąd na mocy warunku R uwierzy w $\neg(\boldsymbol{B}k < \boldsymbol{B}\neg k)$. Ale wierzy on w $k \equiv \neg(\boldsymbol{B}k < \boldsymbol{B}\neg k)$, a więc uwierzy wtedy w k i stanie się sprzeczny. A zatem, jeśli jest niesprzeczny, to nie może także uwierzyć w $\neg k$.

Dowodliwe zdania systemów matematycznych są dowodliwe na różnych etapach.

Moglibyśmy myśleć o systemie matematycznym jako o komputerze zaprogramowanym tak, aby dowodzić różnorakich zdań *kolejno*.

Powiemy, że p jest ***dowodliwe*** **wcześniej** ***(zanim) niż*** q (w danym systemie matematycznym), jeśli p zostało udowodnione na pewnym etapie, na którym q jeszcze nie zostało udowodnione (q może być lub też nie być udowodnione na jakimś późniejszym etapie).

Dla dowolnych zdań p oraz q wyrażalnych w systemie, zdanie $\boldsymbol{B}p < \boldsymbol{B}q$ (p jest dowodliwe wcześniej niż q) również jest wyrażalne w systemach typu tych rozpatrywanych przez Gödla, a Rosser pokazał, że jeśli p *jest* dowodliwe wcześniej niż q, to zdania $\boldsymbol{B}p < \boldsymbol{B}q$ oraz $\neg(\boldsymbol{B}q < \boldsymbol{B}p)$ są oba dowodliwe w systemie.

Rosser znalazł także zdanie p takie, że $p \equiv \neg(\boldsymbol{B}p < \boldsymbol{B}\neg p)$ jest dowodliwe w systemie. (Takie zdanie p odpowiada tubylcowi z pierwszego rozważanego w tej części problemu, który mówi: „Nigdy nie uwierzysz wcześniej, że jestem rycerzem, niż uwierzysz, że jestem łotrem.")

Wtedy, na mocy rozumowania z rozwiązania wspomnianego problemu, jeśli p jest dowodliwe, to system jest sprzeczny, a jeśli $\neg p$ jest dowodliwe, to system także jest sprzeczny.

A zatem, jeśli system jest niesprzeczny, to zdanie p jest nierozstrzygalne w systemie.

Zdanie Gödlowskie może zostać sparafrazowane jako:

„Nie jestem dowodliwe na żadnym etapie."

Bardziej wyszukane zdanie Rossera może zostać sparafrazowane jako:

„Nie mogę być dowiedzione na żadnym etapie, chyba że moja negacja została już wcześniej udowodniona."

Zdanie Gödla, chociaż prostsze, wymaga założenia ω-niesprzeczności dla przeprowadzenia rozumowania. Zdanie Rossera, chociaż bardziej skomplikowane, dostarcza szukanego rezultatu przy słabszym założeniu prostej niesprzeczności.

0.1 Twierdzenie Tarskiego

Przypuśćmy, że mamy myślaka — nazwijmy go Paul — który jest zawsze *ścisły* w swoich przekonaniach (nigdy nie wierzy w zdania fałszywe). Nie musi on być prostaczkiem logicznym, ani normalnym, nie jest też konieczne, aby rzeczywiście odwiedzał Wyspę Rycerzy i Łotrów. Wszystko, co musimy o nim wiedzieć to to, że jest ścisły.

Pewnego dnia tubylec mówi o nim:

„Paul nigdy nie uwierzy, że jestem rycerzem."

Wtedy logicznie wynika stąd:

Twierdzenie 7. System przekonań Paula jest niezupełny.

Jeśli Paul kiedykolwiek uwierzy, że tubylec jest rycerzem, to sfalsyfikuje to tym samym to, co powiedział tubylec, czyniąc tubylca łotrem, a tym samym czyniąc Paula nieścisłym z powodu jego wiary, że tubylec jest rycerzem.

Ale powiedziano nam, że Paul jest ścisły, a więc nigdy nie uwierzy on, że tubylec jest rycerzem.

Stąd, to co powiedział tubylec jest prawdziwe, a więc tubylec rzeczywiście jest rycerzem.

Wtedy, ponieważ Paul jest ścisły, nigdy nie będzie żywił fałszywego przekonania, że tubylec jest łotrem.

A zatem Paul nigdy nie dowie się, czy tubylec jest rycerzem, czy łotrem.

Komentarz. Treść matematyczna powyższej zagadki jest następująca.

W systemach rozważanych przez Gödla mamy nie tylko pewne zdania nazywane zdaniami *dowodliwymi*, lecz również obszerniejszą klasę zdań nazywanych zdaniami *prawdziwymi* systemu.

W klasie zdań prawdziwych systemu obowiązują reguły tabliczek prawdziwościowych dla spójników logicznych.

Nadto, dla każdego zdania p systemu, zdanie $\boldsymbol{B}p$ jest *prawdziwym* zdaniem systemu wtedy i tylko wtedy, gdy p jest zdaniem *dowodliwym* systemu.

Gödel znalazł godne uwagi zdanie g takie, że zdanie $g \equiv \neg \boldsymbol{B}g$ było zdaniem *prawdziwym* systemu (było ono nawet faktycznie dowodliwe w systemie, ale ten mocniejszy fakt nie jest potrzebny dla obecnego rozumowania).

Gdyby g było fałszywe, to $\boldsymbol{B}g$ byłoby prawdziwe, a stąd g byłoby dowodliwe, a stąd prawdziwe, i mielibyśmy sprzeczność.

Zatem g jest prawdziwe, a stąd $\neg \boldsymbol{B}g$ jest prawdziwe, czyli g nie jest dowodliwe w systemie.

Tak więc, g jest prawdziwe, ale niedowodliwe w systemie.

Ponieważ g jest prawdziwe, więc $\neg g$ jest fałszywe, a stąd także niedowodliwe w systemie (ponieważ wszystkie dowodliwe zdania są prawdziwe).

A zatem g jest *nierozstrzygalne* w systemie.

Cytat końcowy:

> Dawniejsza opozycja filozoficzna wobec logiki modalnej była osadzona w przybliżeniu w trzech różnych (i nieporównywalnych) przekonaniach. Po pierwsze, są tacy, którzy są przekonani, że wszystko, co jest prawdziwe jest koniecznie prawdziwe, a stąd nie ma żadnej różnicy między prawdą a prawdą konieczną. Po drugie, są tacy, którzy wierzą, że nic nie jest koniecznie prawdziwe, a stąd dla dowolnego zdania p, zdanie $\boldsymbol{N}p$ (p jest koniecznie prawdziwe) jest po prostu fałszywe! A po trzecie, są i tacy, którzy twierdzą, że słowa „koniecznie prawdziwe” nie niosą jakiegokolwiek sensu. Tak więc, każde z tych nastawień filozoficznych odrzuca logikę modalną ze swoich własnych powodów. W istocie, pewien bardzo znany filozof wsławił się sugestią, że nowoczesna logika modalna została poczęta w grzechu. Na co Boolos bardzo stosownie odpowiedział: „Jeśli nowoczesna logika modalna została poczęta w grzechu, to została wybawiona przez Gödlowskość”. [W oryginale: *If modern modal logic was conceived in sin, then it has been redeemed through Gödliness.*]

Ten dodatek nie rości sobie pretensji do kompletności:

- ani jako przedstawienie wszystkich treści *Forever Undecided*,
- ani jako wprowadzenie do logiki dowodliwości.

Staraliśmy się jedynie pokazać próbkę możliwości popularyzacji wiedzy o logice modalnej i jej zastosowaniach. Zachęcamy do lektury książki Smullyana!

Przykład trzeci maszyny logiczne Smullyana

Smullyan skonstruował cały szereg maszyn logicznych, które drukują zdania „mówiące” coś o nich samych.

Maszyny: Craiga, Fergussona i McCullocha, przedstawione w *Jaki jest tytuł tej książki?* oraz *Dama czy tygrys?* są już znane polskiemu czytelnikowi.

Tu przedstawimy pewną maszynę Smullyana, opisaną w *Forever Undecided.*

Dla pełnego zrozumienia jej działania potrzebna jest znajomość wybranych logik modalnych: logiki epistemicznej oraz logiki dowodliwości (logiki Gödla-Löba).

Malcolm Fergusson, gdy usłyszał o twierdzeniach Gödla i Löba, z miejsca zabrał się za konstrukcję maszyny, którą z zachwytem pokazał swoim przyjaciołom.

Ku ich zadowoleniu udowodnił, że maszyna jest niesprzeczną i stabilną maszyną typu G, a szczególne upodobanie znalazł w demonstracji, że maszyna, chociaż niesprzeczna, nigdy nie może dowieść własnej niesprzeczności!

Maszyna ilustruje w niezwykle prosty i pouczający sposób podstawowe idee zawarte w Pierwszym oraz Drugim Twierdzeniu Gödla jak również w Twierdzeniu Löba.

Niżej podajemy opis działania maszyny Fergussona oraz pewne ważne fakty jej dotyczące.

Opis pochodzi z rozdziału 26 *Forever Undecided*. W rozdziale tym znajdujemy też opis dwóch innych maszyn, który tu pominiemy.

Maszyna drukuje różnorakie zdania zbudowane z *siedemnastu symboli*. Pierwsze siedem z tych symboli to następujące:

$$\begin{array}{ccccccc} P & \perp & \rightarrow & (&) & d & , \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array}$$

Pod każdym z tych symboli podpisano jego *numer Gödlowski*.

Pozostałe dziesięć symboli to znane cyfry 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0. Tym cyfrom przyporządkowujemy numery Gödlowskie w następujący sposób. Numerem Gödlowskim cyfry 1 jest 89 (8 po której następuje jedna 9); numerem Gödlowskim cyfry 2 jest 899 (8 po której następują dwie 9); i tak dalej, aż do cyfry 0, której numerem Gödlowskim jest 89999999999 (8 po której następuje dziesięć 9).

Tak więc, każdy z siedemnastu symboli uzyskuje numer Gödlowski.

Dla danego wyrażenia złożonego, odnajdujemy jego numer Gödlowski przez zastąpienie każdego symbolu jego numerem Gödlowskim — dla przykładu, numerem Gödlowskim wyrażenia $(P \perp \rightarrow \perp)$ jest 412325. Inny przykład: numerem Gödlowskim $P35$ jest 18999899999.

Dla dowolnego wyrażenia E, przez $\overline{E}$ rozumiemy numer Gödlowski E (zapisany jako ciąg cyfr 1, 2, ..., 0).

Nie każda liczba jest numerem Gödlowskim jakiegoś wyrażenia (na przykład, 88 nie jest numerem Gödlowskim żadnego wyrażenia).

Jeśli n *jest* numerem Gödlowskim jakiegoś wyrażenia, to będziemy czasem odwoływać się do tego wyrażenia jako do n-tego wyrażenia. (Dla przykładu, Pd jest szesnastym wyrażeniem, $\perp$ jest drugim wyrażeniem.)

Maszyna jest *samoodnosząca się* (do siebie) w tym sensie, że wyrażenia drukowane przez maszynę stwierdzają, co maszyna może, a czego nie może wydrukować. Wyrażenie nazywamy *drukowalnym*, jeśli maszyna może je wydrukować.

Symbol „P" oznacza „drukowalne" i dla dowolnego wyrażenia E zbudowanego z podanych siedemnastu symboli, jeśli chcemy zapisać zdanie stwierdzające, że E jest drukowalne, to piszemy nie PE, lecz $P\overline{E}$ (tj., P po którym następuje numer Gödlowski E).

Dla przykładu, zdaniem stwierdzającym, że $(P \perp \rightarrow \perp)$ jest drukowalne jest $P\overline{(P \perp \rightarrow \perp)}$ — tj. $P412325$.

Dla dowolnych wyrażeń X oraz Y, Fergusson zdefiniował *diagonalizację* X *względem* Y jako wyrażenie $(X(\overline{X}, \overline{Y}) \rightarrow Y)$.

Symbol „*d*" jest skrótem dla „diagonalizacja" — i dla dowolnych wyrażeń X oraz Y, wyrażenie $Pd(\overline{X}, \overline{Y})$ jest zdaniem stwierdzającym, że diagonalizacja X względem Y jest drukowalna.

Zdefiniujemy teraz, co to znaczy, że wyrażenie jest *zdaniem (maszynowym)* i co to znaczy, że zdanie jest *prawdziwe*.

- (1) $\perp$ jest zdaniem i $\perp$ jest fałszywe.
- (2) Dla dowolnego wyrażenia X, wyrażenie $P\overline{X}$ jest zdaniem i jest ono prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy wyrażenie X jest drukowalne.
- (3) Dla dowolnych wyrażeń X oraz Y, wyrażenie $Pd(\overline{X}, \overline{Y})$ jest zdaniem i jest ono prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy wyrażenie $(X(\overline{X}, \overline{Y}) \rightarrow Y)$ — które jest diagonalizacją X względem Y — jest drukowalne.
- (4) Dla dowolnych zdań X oraz Y, wyrażenie $(X \rightarrow Y)$ jest zdaniem i jest ono prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy albo X nie jest prawdziwe, albo Y jest prawdziwe.

Rozumie się, że żadne wyrażenie nie jest zdaniem (maszynowym), jeśli nie zostało otrzymane zgodnie z powyższymi regułami. Spójniki logiczne $\neg, \wedge, \vee, \equiv$ są definiowane z $\rightarrow$ oraz $\perp$ w znany sposób.

Podamy teraz reguły ustalające, co maszyna może wydrukować. Maszyna jest zaprogramowana do kolejnego drukowania nieskończonej listy zdań.

Pewne zdania, nazywane *aksjomatami* mogą zostać wydrukowane na każdym etapie tego procesu. Wśród aksjomatów są wszystkie tautologie. (tak więc, dla dowolnej tautologii X, maszyna może wydrukować X kiedy tylko chce, niezależnie od tego, co dotąd wydrukowała lub czego nie wydrukowała w poprzednich etapach.)

Dalej, maszyna jest zaprogramowana tak, że dla dowolnych zdań X oraz Y, jeśli na pewnym etapie maszyna wydrukowała już X oraz $X \rightarrow Y$, to może wydrukować Y. Tak więc, maszyna jest *typu 1* (w tym sensie, że zbiór zdań drukowalnych jest typu 1).

Ponieważ jest prawdą, że jeśli X oraz $X \rightarrow Y$ są oba drukowalne, to Y też jest drukowalne, to zdanie $(P\overline{X} \wedge P\overline{(X \rightarrow Y)}) \rightarrow P\overline{Y}$ jest prawdziwe; lub, co na jedno wychodzi, zdanie $P\overline{(X \rightarrow Y)} \rightarrow (P\overline{X} \rightarrow P\overline{Y})$ jest prawdziwe. Maszyna „wie" zatem o prawdziwości wszystkich zdań postaci $P\overline{(X \rightarrow Y)} \rightarrow (P\overline{X} \rightarrow P\overline{Y})$ i przyjmuje je jako aksjomaty. Tak więc, maszyna jest *typu 2*.

Następnie, jeśli maszyna kiedykolwiek wydrukuje zdanie X, to „wie" ona, że wydrukowała X i prędzej czy później wydrukuje prawdziwe zdanie $P\overline{X}$. (Zdanie $P\overline{X}$ *jest* prawdziwe, ponieważ X zostało wydrukowane.) A więc maszyna jest normalna, a stąd jest *typu 3*.

Ponieważ maszyna jest normalna, więc dla dowolnego zdania X, zdanie $\overline{P\overline{X} \to P\overline{P\overline{X}}}$ jest prawdziwe. Czyli maszyna jest początkowo „świadoma" prawdziwości wszystkich takich zdań oraz przyjmuje je jako aksjomaty. Zatem maszyna jest *typu 4*.

Jest jeszcze jedna rzecz, którą maszyna potrafi robić, a jest to rzecz dość istotna. Dla dowolnych wyrażeń X oraz Y, zdanie $Pd(\overline{X}, \overline{Y})$ jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy $(X(\overline{X}, \overline{Y}) \to Y)$ jest drukowalne, co z kolei zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy zdanie $P\overline{(X(\overline{X}, \overline{Y}) \to Y)}$ jest prawdziwe. Zatem następujące zdanie jest prawdziwe: $Pd(\overline{X}, \overline{Y}) \equiv P\overline{(X(\overline{X}, \overline{Y}) \to Y)}$. Maszyna „wie" o prawdziwości wszystkich takich zdań i przyjmuje je jako aksjomaty. Te aksjomaty nazywane są *aksjomatami przekątniowymi.*

Aksjomaty:

- *Grupa 1.* Wszystkie tautologie.
- *Grupa 2.* Wszystkie zdania postaci $P\overline{(X \to Y)} \to (P\overline{X} \to P\overline{Y})$.
- *Grupa 3.* Wszystkie zdania postaci $P\overline{X} \to P\overline{P\overline{X}}$.
- *Grupa 4 (aksjomaty przekątniowe).* Wszystkie zdania postaci $Pd(\overline{X}, \overline{Y}) \equiv P\overline{(X(\overline{X}, \overline{Y}) \to Y)}$, gdzie X oraz Y są dowolnymi wyrażeniami (niekoniecznie zdaniami).

Reguły operowania:

- (1) Aksjomaty mogą zostać wydrukowane na każdym etapie.
- (2) Dla dowolnych już wydrukowanych zdań X oraz $(X \to Y)$, maszyna może wydrukować Y.
- (3) Dla dowolnego wydrukowanego już zdania X, maszyna może wydrukować $P\overline{X}$.

Rozumie się, że jedynym sposobem wydrukowania przez maszynę jakiegoś zdania X na pewnym etapie jest zastosowanie się do powyższych reguł.

Zatem, X jest drukowalne na danym etapie *tylko* wtedy, gdy zachodzi jeden z następujących trzech warunków: (1) X jest aksjomatem; (2) istnieje zdanie Y takie, że Y oraz $(Y \to X)$ zostały już wydrukowane na etapie wcześniejszym; (3) istnieje zdanie Y takie, że X jest zdaniem $P\overline{Y}$ oraz Y zostało już wydrukowane na etapie wcześniejszym.

Uwagi. Dla każdego zdania X, niech $\boldsymbol{B}X$ będzie zdaniem $P\overline{X}$. Symbol „$\boldsymbol{B}$" *nie* należy do języka maszyny; używamy go do *mówienia o* maszynie. Używamy „$\boldsymbol{B}$" jako odpowiadającego operacji, która przyporządkowuje każdemu zdaniu X zdanie $P\overline{X}$.

Gdy mówimy, że maszyna jest typu 4, rozumiemy przez to, że jest ona typu 4 ze względu na tę operację $\boldsymbol{B}$. W istocie, bez aksjomatów przekątniowych, system aksjomatyczny tej maszyny jest *systemem modalnym* K_4. Zobaczymy wkrótce, że dodanie aksjomatów przekątniowych daje nam pełną moc *systemu modalnego G*.

Dowodliwość. Zdefiniowaliśmy dla każdego zdania maszyny co to znaczy, że zdanie to jest *prawdziwe*, a więc każde zdanie maszyny wyraża określone zdanie, które może być prawdziwe lub może być fałszywe.
Uwaga. Dotąd *proposition* oddawaliśmy zawsze jako *zdanie*. Teraz mamy:

- *zdania (maszyny)* (w oryginale *sentences*) — zdania języka przedmiotowego,

- oraz zdania metajęzyka (w oryginale *propositions*), tj. języka, w którym *mówimy o* maszynie, jej zdaniach (maszynowych), itp.

W przypadkach, gdy mogłoby to prowadzić do nieporozumień, w dalszym ciągu będziemy dodawać określenie *maszynowe*, gdy mowa będzie o zdaniach drukowanych przez maszynę.

Powiemy, że maszyna *dowodzi* danego zdania, gdy drukuje ona zdanie maszynowe, które wyraża to dane zdanie. Dla przykładu, zdanie maszynowe $\neg P2$ wyraża zdanie stwierdzające, że maszyna jest niesprzeczna (ponieważ 2 jest numerem Gödlowskim $\perp$), a więc jeśli maszyna wydrukowała $\neg P2$, to udowodniła swoją własną niesprzeczność. Gdyby maszyna wydrukowała $P2$, to udowodniłaby swoją własną *sprzeczność*.

Powiemy, że maszyna jest *ścisła*, jeśli wszystkie zdania dowodliwe przez maszynę są prawdziwe.

Powiemy, że maszyna jest *niesprzeczna*, jeśli nie może ona dowieść $\perp$, oraz że jest *stabilna*, jeśli dla każdego zdania (maszynowego) X, jeśli $P\overline{X}$ jest drukowalne, to drukowalne jest też X.
Zwrotność. Przechodzimy teraz do dowodu, że maszyna jest Gödlowska, a faktycznie, zwrotna.

- (1) Znajdziemy zdanie G takie, że zdanie $G \equiv \neg P\overline{G}$ — tj. zdanie $G \equiv (P\overline{G} \to \perp)$ — jest drukowalne.

- (2) Pokażemy, że dla dowolnego zdania Y istnieje zdanie X takie, że zdanie $X \equiv (P\overline{X} \to Y)$ jest drukowalne.

Uwaga. Problem 1 jest szczególnym przypadkiem problemu 2, a więc najpierw rozwiążemy problem 2.

Przypomnijmy, że:

- warunek wspomniany w problemie (2) nazywamy *zwrotnością*;

- *systemem typu G* nazywamy system modalny typu 4, w którym dowodliwe są wszystkie zdania postaci $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}p \to q) \to \boldsymbol{B}p$.

Niech Y będzie dowolnym zdaniem. Dla dowolnego wyrażenia Z, zdanie $Pd(\overline{Z}, \overline{Y}) \equiv P\overline{(Z(\overline{Z}, \overline{Y}) \to Y)}$ jest drukowalne (ponieważ jest jednym z aksjomatów przekątniowych).

Weźmiemy za Z wyrażenie Pd i otrzymujemy wtedy, że $Pd(\overline{Pd}, \overline{Y}) \equiv P\overline{(Pd(\overline{Pd}, \overline{Y}) \to Y)}$ jest drukowalne.

Ponieważ maszyna jest typu 1, więc wynika stąd, że następujące zdanie jest drukowalne:

$$(Pd(\overline{Pd},\overline{Y}) \to Y) \equiv (P\overline{(Pd(\overline{Pd},\overline{Y}) \to Y)} \to Y)$$

Tak więc, zdanie $X \equiv (P\overline{X} \to Y)$ jest drukowalne, gdzie X jest zdaniem $(Pd(\overline{Pd},\overline{Y}) \to Y)$.

Problem 1 jest szczególnym przypadkiem problemu 2, gdy za Y weźmiemy $\perp$. Tak więc, zdaniem Gödla G dla tej maszyny jest $Pd(\overline{Pd},\overline{\perp}) \to\perp$ — tj., zdanie $(Pd(16,2) \to\perp)$.

Co stwierdza zdanie $Pd(16,2)$?

Mówi ono, że diagonalizacja szesnastego wyrażenia względem drugiego wyrażenia jest drukowalna. Wyrażeniem szesnastym jest Pd, a wyrażeniem drugim jest $\perp$, a więc $Pd(16,2)$ mówi, że diagonalizacja Pd względem $\perp$ jest drukowalna, ale ta diagonalizacja to zdanie $(Pd(16,2) \to\perp)$ — tj. właśnie samo zdanie G!

A więc $Pd(16,2)$ mówi, że G *jest* drukowalne, a stąd $(Pd(16,2) \to\perp)$ — które jest zdaniem G — mówi, że G *nie jest* drukowalne (lub, co na jedno wychodzi, że drukowalność G implikuje fałsz logiczny). Tak więc, G mówi, że G nie jest drukowalne; G jest *prawdziwe* wtedy i tylko wtedy, gdy G nie jest drukowalne.

Zatem G stwierdza swoją własną niedrukowalność. Oto, w miniaturce, pomysłowa idea Gödla otrzymywania samoodniesienia.

Zdanie $G \equiv \neg P\overline{G}$ — tj. zdanie $G \equiv (P\overline{G} \to\perp)$ — jest nie tylko prawdziwe, ale także drukowalne (jest ono jednym z aksjomatów przekątniowych).

Ponieważ maszyna jest normalna i jest typu 1, wynika stąd na mocy Pierwszego Twierdzenia Gödla o Niezupełności, że jeśli maszyna jest niesprzeczna, to G nie jest drukowalne, a jeśli maszyna jest dodatkowo stabilna, to również $\neg G$ nie jest drukowalne.

A więc, *jeśli* maszyna jest jednocześnie niesprzeczna i stabilna, to zdanie G jest nierozstrzygalne w systemie zdań, które maszyna może wydrukować.

Maszyna jest faktycznie typu 4, a ponieważ jest Gödlowska — zdanie $G \equiv \neg P\overline{G}$ jest drukowalne — więc z Drugiego Twierdzenia Gödla o Niedowodliwości Niesprzeczności wynika, że jeśli maszyna jest niesprzeczna, to nie może ona dowieść swojej własnej niesprzeczności — tj. nie może wydrukować zdania $\neg P2$.

Nadto, jeśli maszyna jest niesprzeczna, to zdanie $\neg P2$ jest *prawdziwe*, a stąd jest innym przykładem zdania prawdziwego, którego maszyna nie może wydrukować.

Co więcej, maszyna jest zwrotna (problem 2), a będąc typu 4, musi być Löbowska (na mocy Twierdzenia Löba), a więc dla dowolnego zdania X, jeśli $P\overline{X} \to X$ jest drukowalne, to drukowalne jest X. Ponieważ każdy zwrotny Löbowski system typu 4 jest typu G, więc wynika stąd, że maszyna jest typu G.

Poprawność, ścisłość i niesprzeczność Maszyny Fergussona.

Pokazaliśmy, że *jeśli* maszyna Fergussona jest niesprzeczna, to nie może udowodnić swojej własnej niesprzeczności.

Ale skąd wiemy, czy maszyna jest, czy nie jest niesprzeczna?

Udowodnimy teraz, że maszyna jest nie tylko niesprzeczna, ale że jest też całkowicie ścisła — tj., że każde zdanie wydrukowane przez maszynę jest prawdziwe.

Pokazaliśmy już, że wszystkie *aksjomaty* maszyny są prawdziwe, ale prześledźmy uważnie to rozumowanie.

Aksjomaty Grupy 1 są wszystkie tautologiami, a stąd są z pewnością prawdziwe.

Jeśli chodzi o aksjomaty Grupy 2, to powiedzieć, że $P\overline{(X \to Y)} \to (P\overline{X} \to \overline{Y})$ jest prawdziwe to tyle, co powiedzieć, że jeśli oba $P\overline{(X \to Y)}$ oraz $P\overline{X}$ są prawdziwe, to takie jest też $P\overline{Y}$, czyli to samo, co powiedzieć, że jeśli $(X \to Y)$ oraz X są oba drukowalne, to takie jest też Y.

A tak oczywiście jest, na mocy Operacji 2.

Tak więc, aksjomaty Grupy 2 są wszystkie prawdziwe.

Jeśli chodzi o aksjomaty Grupy 3, powiedzieć, że $P\overline{X} \to P\overline{P\overline{X}}$ jest prawdziwe, to tyle, co powiedzieć, że jeśli $P\overline{X}$ jest prawdziwe, to takie jest też $P\overline{P\overline{X}}$.

To z kolei jest tym samym, co powiedzenie, że jeśli X jest drukowalne, to takie jest też $P\overline{X}$ — a tak jest rzeczywiście, na mocy Operacji 3.

Jeśli chodzi o aksjomaty przekątniowe, to $Pd(\overline{X}, \overline{Y})$ jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy $(X(\overline{X}, \overline{Y}) \to Y)$ jest drukowalne, a tak jest wtedy i tylko wtedy, gdy $P\overline{(X(\overline{X}, \overline{Y}) \to Y)}$ jest prawdziwe.

Zatem $Pd(\overline{X}, \overline{Y}) \equiv P\overline{(X(\overline{X}, \overline{Y}) \to Y)}$ jest prawdziwe.

Wiemy teraz, że wszystkie aksjomaty maszyny są prawdziwe, ale musimy pokazać, że wszystkie zdania *drukowalne* są prawdziwe.

Przypomnijmy, że maszyna drukuje zdania na pewnych *etapach*.

Chcemy teraz ustanowić następujący lemat, twierdzenie i wniosek:

- **Lemat.** Jeśli X jest zdaniem wydrukowanym na pewnym etapie i wszystkie zdania wydrukowane do tego etapu są prawdziwe, to X jest prawdziwe.

- **Twierdzenie.** Każde zdanie wydrukowane przez maszynę jest prawdziwe.

- **Wniosek.** Maszyna jest jednocześnie niesprzeczna i stabilna.

Dowody.

Najpierw udowodnimy lemat. Załóżmy, że wszystkie dotąd wydrukowane zdania są prawdziwe; mamy pokazać, że X jest prawdziwe.

Przypadek 1. X jest aksjomatem. Wtedy X jest prawdziwe (jak już udowodniliśmy).

Przypadek 2. Istnieje zdanie Y takie, że Y oraz $(Y \to X)$ zostały już wydrukowane. Wtedy z przyjętego założenia Y oraz $(Y \to X)$ są oba prawdziwe, a więc X jest prawdziwe.

Przypadek 3. X jest postaci $P\overline{Y}$, gdzie Y jest zdaniem, które już zostało wydrukowane. Ponieważ Y zostało wydrukowane, więc $P\overline{Y}$ jest prawdziwe — tj. X jest prawdziwe.

To kończy dowód lematu.

Dowód Twierdzenia.

Maszyna jest zaprogramowana tak, aby wydrukować wszystkie drukowalne zdania w jakimś określonym ciągu $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ Przez X_n rozumiemy zdanie wydrukowane na etapie n.

Pierwsze zdanie wydrukowane przez maszynę (zdanie X_1) musi być aksjomatem (ponieważ dotąd maszyna nie wydrukowała żadnych zdań), a stąd X_1 musi być prawdziwe.

Jeśli powyższa lista zawierałaby jakiekolwiek zdanie fałszywe, to musiałaby istnieć *najmniejsza* liczba n taka, że X_n jest fałszywe — to jest, musiałoby istnieć *pierwsze* zdanie fałszywe wydrukowane przez maszynę. Wiemy, że n nie jest równe 1 (ponieważ X_1 jest prawdziwe), a zatem n jest większe od 1. Znaczy to, że maszyna drukuje zdanie fałszywe na etapie n, ale na wszystkich wcześniejszych etapach drukowała wyłącznie zdania prawdziwe. Przeczy to jednak lematowi.

Zatem maszyna nigdy nie może wydrukować jakichkolwiek zdań fałszywych.

Dowód Wniosku.

Ponieważ maszyna jest ścisła (na mocy Twierdzenia), więc $\perp$ nigdy nie może zostać wydrukowane, ponieważ $\perp$ jest fałszywe. Zatem maszyna jest niesprzeczna.

Następnie, przypuśćmy, że $P\overline{X}$ jest drukowalne. Wtedy $P\overline{X}$ jest prawdziwe (na mocy Twierdzenia), co oznacza, że X jest drukowalne. Zatem maszyna jest stabilna.

Widzimy teraz, że maszyna Fergussona *jest* niesprzeczna, ale nigdy nie potrafi dowieść swojej niesprzeczności. Tak więc i ty i ja (równie dobrze jak Fergusson) wiemy, że maszyna jest niesprzeczna, ale biedna maszyna wiedzy tej nie ma!

O dalszych wynikach związanych z „maszynową” interpretacją twierdzeń metalogicznych traktuje rozdział 28 *Forever Undecided*. W szczególności, podane są związki między maszynami logicznymi a samostosowalnymi systemami modalnymi.

Przykład czwarty: ptaki kombinatoryczne

Pokazujemy wybrane fragmenty tłumaczenia książki Raymonda Smullyana *To Mock a Mockingbird*, które ukazało się w 2007 roku nakładem *Książki i Wiedzy*, pod tytułem *Przedrzeźniać Przedrzeźniacza*.

Obok zagadek o Rycerzach (mówiących zawsze prawdę) oraz Łotrach (mówiących zawsze fałsz), książka zawiera zagadki logiczne, w których w formie popularnej przedstawia się *logikę kombinatoryczną*. Zarówno logika kombinatoryczna, jak i *rachunek lambda* należą do niezbędnika teoretycznego każdego, kto zajmuje się zastosowaniami logiki w informatyce.

Przedstawimy w tym dodatku informacje:

- O historii logiki kombinatorycznej;
- Ptaki Smullyana jako interpretacje kombinatorów;
- Kilka ważnych Ptaków;
- Przykład: paradoks Curry'ego;
- Ptak Gödla;
- Dodatek: śpiewy Ptaków.

O historii logiki kombinatorycznej

- Church, A. 1941. *Calculi of Lambda-conversion.* (Annals of Mathematical Studies 6), Princeton University Press, Princeton.
- Curry, H.B. 1930. Grundlagen der kombinatorischen Logik. *American Journal of Mathematics* **52**, 509–536, 789–834.
- Curry, H.B., Feys, R. 1958. *Combinatory Logic, Vol. 1.* North-Holland, Amsterdam. Klasyczna monografia z logiki kombinatorycznej.
- Schönfinkel, M. 1924. Über die Bausteine der mathematischen Logik. *Mathematische Annalen* **92**, 305–316. Pierwsza praca o logice kombinatorycznej. Przekład angielski (On the building blocks of mathematical logic) w: van Heijenoort, J. (ed.) 1967. *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic*. Harvard University Press, Cambridge, 355–366. Przekład francuski (Sur les éléments de construction de la logique mathématique), z komentarzem, w: *Math. Inform. Sci. Humaines* No. **112**, 1990, 5–26, 59.

Kilka słów o historii.

- *Moses Schönfinkel*.
- *Alonzo Church*.
- *Haskell Curry*.
- *Stephen Cole Kleene*.
- *John Barkley Rosser*.
- *Henk Barendregt*.
- Rachunek *lambda*. Rachunki *typów*.
- *Zastosowania* (m.in., informatyczne).

Kilka nowszych opracowań:

- Barendregt, H.P. 1981. *The Lambda Calculus.* North-Holland, Amsterdam. [1984 (rev. ed.)].
- Hindley, J.R., Lercher, B., Seldin, J.P. 1972. *Introduction to Combinatory Logic.* Cambridge University Press, London.
- Hindley, J.R., Seldin, J.P. 1986. *Introduction to Combinators and λ-Calculus.* Cambridge University Press, Cambridge.
- Révész, G.E.1988. *Lambda-Calculus, Combinators and Functional Programming.* Cambridge University Press, Cambridge.

W sieci dostępne są dość liczne nowsze opracowania. W szczególności, znaleźć można programy wyprowadzające jedne kombinatory z innych. Może warto dodać, że stworzenie niektórych z tych programów było bezpośrednio inspirowane książką *To Mock a Mockingbird*.

Nowsze opracowania dotyczące historii logiki kombinatorycznej:

- Cardone, F., Hindley, J.R. 2006. History of lambda-calculus and combinatory logic. *Handbook of the History of Logic* vol. **5**. [Nie miałem dostępu do tego tekstu.]
- Seldin, J.P. 2006. The Logic of Curry and Church. *Handbook of the History of Logic* vol. **5**. [Korzystałem z tekstu dostępnego w sieci.]

Ptaki Smullyana jako interpretacje kombinatorów

Pewien czarujący las jest zamieszkany przez gadające Ptaki. Dla dowolnych Ptaków A oraz B, jeśli wypowiesz nazwę Ptaka B do Ptaka A, to A odpowie, wypowiadając do ciebie nazwę jakiegoś Ptaka; będziemy Ptaka z tej odpowiedzi oznaczać AB. Zamiast stale używać dziwacznego zwrotu: „odpowiedź A na usłyszenie nazwy B" będziemy mówić krótko „odpowiedź A na B".

Nadto, dla dowolnych trzech Ptaków A, B oraz C, Ptak $A(BC)$ niekoniecznie jest tym samym Ptakiem, co Ptak $(AB)C$. Ptak $A(BC)$ jest odpowiedzią A na Ptaka BC, podczas gdy Ptak $(AB)C$ jest odpowiedzią Ptaka AB na Ptaka C.

Złożenie. Dla dowolnych Ptaków A, B oraz C (niekoniecznie różnych) mówimy, że Ptak C **składa** A z B, jeśli dla każdego Ptaka x zachodzi następujący warunek: $Cx = A(Bx)$.

Prozą, oznacza to, że odpowiedź C na x jest taka sama, jak odpowiedź A na odpowiedź B na x.

Przedrzeźniacze. Przez *przedrzeźniacza* rozumiemy Ptaka M takiego, że dla dowolnego Ptaka x zachodzi następujący warunek:

$$Mx = xx$$

M jest nazywany przedrzeźniaczem z tego prostego powodu, że jego odpowiedź na dowolnego Ptaka x jest taka sama, jak odpowiedź Ptaka x na siebie samego — innymi słowy, M *naśladuje* x jeśli chodzi o odpowiedź na x. Oznacza to, że jeśli wypowiesz x do M lub wypowiesz x do niego samego, to otrzymasz w każdym przypadku taką samą odpowiedź.

Może się zdarzyć, że gdy wypowiesz B do A, to A wypowie do ciebie tego samego Ptaka B. Jeśli tak jest, to oznacza to, że A **lubi** B. Symbolicznie, to, że A lubi B znaczy, że $AB = B$.

Ptak x jest nazywany **egocentrycznym** (czasami *narcystycznym*), jeśli lubi samego siebie, tj. gdy odpowiedź x na x brzmi x. Symbolicznie, x jest egocentryczny, gdy $xx = x$.

Wiadomo, że nasz las spełnia następujące dwa warunki:

- C_1 *Warunek składania*. Dla dowolnych dwóch Ptaków A oraz B (różnych lub nie) istnieje Ptak C taki, że dla dowolnego Ptaka x zachodzi $Cx = A(Bx)$. Innymi słowy, dla dowolnych Ptaków A i B istnieje Ptak C, który składa A z B.

- C_2 *Warunek przedrzeźniacza*. W lesie jest przedrzeźniacz M.

Jedna z plotek głosi, że każdy Ptak w lesie lubi co najmniej jednego Ptaka.

Wedle innej z plotek, istnieje co najmniej jeden Ptak, który nie lubi żadnego Ptaka.

Jest interesujące, że można ustalić, która z tych plotek jest wiarygodna posługując się wyłącznie warunkami C_1 oraz C_2.

Która z plotek jest prawdziwa?

Rozwiązanie, choć niedługie, jest niezwykle pomysłowe. Opiera się ono na zasadzie wywodzącej się w ostatecznym rozrachunku z prac Kurta Gödla.

Pierwsza pogłoska jest prawdziwa: każdy Ptak A lubi co najmniej jednego Ptaka.

Dowód.

Weźmy dowolnego Ptaka A.

Wtedy, na mocy warunku C_1 istnieje Ptak C, który składa A z przedrzeźniaczem M.

Zatem dla dowolnego Ptaka x mamy $A(Mx) = Cx$.

Ponieważ równanie to zachodzi dla *każdego* Ptaka x, więc możemy podstawić C za x otrzymując równanie $A(MC) = CC$.

Ale $MC = CC$, ponieważ M jest przedrzeźniaczem, a więc w równaniu $A(MC) = CC$ możemy podstawić CC za MC otrzymując w ten sposób równanie $A(CC) = CC$.

Oznacza to, że A lubi Ptaka CC!

W skrócie, jeśli C jest dowolnym Ptakiem, który składa A z M, to A lubi Ptaka CC.

Nadto, A lubi MC, ponieważ MC jest tym samym Ptakiem, co CC.

Oznacza to, w szczególności, że przedrzeźniacz M lubi co najmniej jednego Ptaka E.

Pokażemy, że E musi być egocentryczny.

Po pierwsze, $ME = E$, ponieważ M lubi E.

Ale także $ME = EE$, ponieważ M jest przedrzeźniaczem.

Tak więc E oraz EE są oba identyczne z Ptakiem ME, a zatem $EE = E$.

Oznacza to, że E lubi E, tj. że E jest egocentryczny.

Własności Ptaków

Bluebird	Drozd	$Bxyz = x(yz)$
Cardinal	Kardynał	$Cxyz = xzy$
Dove	Gołąb	$Dxyzw = xy(zw)$
Eagle	Orzeł	$Exyzwv = xy(zwv)$
Finch	Zięba	$Fxyz = zyx$
Goldfinch	Szczygieł	$Gxyzw = xw(yz)$
Hummingbird	Koliber	$Hxyz = xyzy$
Identity bird	Ptak identycznościowy	$Ix = x$
Jay	Sójka	$Jxyzw = xy(xwz)$
Kestrel	Pustułka	$Kxy = x$
Lark	Skowronek	$Lxy = x(yy)$
Mockingbird	Przedrzeźniacz	$Mx = xx$
Owl	Sowa	$Oxy = y(xy)$
Queer bird	Dziwoptak	$Qxyz = y(xz)$
Quixotic bird	Donkiszotówka	$Q_1xyz = x(zy)$
Quirky bird	Dziwolągwa	$Q_3xyz = z(xy)$
Robin	Rudzik	$Rxyz = yzx$
Sage bird	Ptak Mędrzec	$\Theta x = x(\Theta x)$
Starling	Szpak	$Sxyz = xz(yz)$
Thrush	Drozdon	$Txy = yx$
Turing bird	Ptak Turinga	$Uxy = y(xxy)$
Vireo	Wireonek	$Vxyz = zxy$
Warbler	Gajówka	$Wxy = xyy$
Converse warbler	Gajówka odwrotna	$W'xy = yxx$

Ptaki ogwiazdkowane

Kardynał jednokrotnie usunięty	$C^{*}xyzw = xywz$
Kardynał dwukrotnie usunięty	$C^{**}xyzwv = xyzvw$
Gajówka jednokrotnie usunięta	$W^{*}xyz = xyzz$
Gajówka dwukrotnie usunięta	$W^{**}xyzw = xyzww$

Smullyan omawia jeszcze wiele innych Ptaków. Pokazuje, jak jedne kombinatory mogą być definiowane w terminach innych.

Jak (obecnie) wiadomo, wszystkie kombinatory mogą zostać wyprowadzone z K oraz S. Dla przykładu: $((SKK)x) = (SKKx) = (Kx(Kx)) = x$, czyli $Ix = SKKx$ dla dowolnych x. (To ekstensjonalna równość termów).

Smullyan jednak wcześniej pokazuje inne wyprowadzenia, przygotowując czytelnika do wizyty w Lesie Mistrzów (rozdział 18), gdzie objaśnia ogólne zasady wyprowadzania wszystkich kombinatorów z S oraz K.

Oto niektóre przykłady (tylko wyniki):

Wyprowadzenia z B ***oraz*** T

Drozd	$Bxyz = x(yz)$	BBT
Kardynał	$Cxyz = xzy$	$B(T(BBT))(BBT)$
Zięba	$Fxyz = zyx$	$B(TT)(B(BBB)T)$
Wireonek	$Vxyz = zxy$	BCT
Dziwoptak	$Qxyz = y(xz)$	CB
Donkiszotówka	$Q_1xyz = x(zy)$	BCB
Dziwolągwa	$Q_3xyz = z(xy)$	BT
Szczygieł	$Gxyzw = xw(yz)$	BBC

W tekście pokazuje się, że $C = B(T(BBT))(BBT)$.
Nadto, $C = RRR$ oraz $F = ETTET$ i $V = CF$.

***Wyprowadzenie z** B**,** T **oraz** M*

Podwójny przedrzeźniacz	$M_2xy = xy(xy)$	BM
Skowronek	$Lxy = x(yy)$	QM
Gajówka	$Wxy = xyy$	$C(BMR)$
Gajówka odwrotna	$W'xy = yxx$	BMR
Koliber	$Hxyz = xyzy$	$BW(BC)$
Szpak	$Sxyz = xz(yz)$	$B(BW)(BBC)$
Sowa	$Oxy = y(xy)$	QQW
Ptak Turinga	$Uxy = y(xxy)$	LO

W tekście pokazuje się, że $R = BBT$.
Nadto, $Q = CB$, $W' = CWS$, $S = BW^*G$, $O = BWQ$, $O = SI$, $U = L(SI)$.

Oprócz wyprowadzeń jednych Ptaków z innych, Smullyan podaje w swoich zagadkach pewne ogólne zasady, obowiązujące w rachunku kombinatorów. Dla przykładu:

- pokazuje się, co „robią” poszczególne Ptaki: permutowanie, nawiasowanie, składanie, lubienie (punkty stałe);
- pokazuje się różne *bazy* — układy kombinatorów, z których wyprowadzić można wszystkie pozostałe;
- rozważa się tworzenie różnego rodzaju *reduktów* kombinatorów;
- pokazuje się specjalną rolę, pełnioną przez Ptaki mędrców; ogólniej: pokazuje się rolę *zasady punktu stałego*; itd.

Aby sformułować zasadę punktu stałego w jej najbardziej ogólnej postaci, przypuśćmy, że bierzemy dowolną liczbę zmiennych $x, y, z, \ldots$ i piszemy dowolne równanie postaci:

$$Axyz\ldots = (- - -)$$

gdzie $(- - -)$ jest dowolnym wyrażeniem zbudowanym z tych zmiennych oraz litery A.

Zasada punktu stałego mówi, że takie równanie zawsze można rozwiązać względem A — innymi słowy, istnieje ptak A taki, że dla dowolnych ptaków $x, y, z, \ldots$ jest prawdą, że:

$$Axyz\ldots = (- - -).$$

Smullyan podaje dwie metody uzasadnienia zasady punktu stałego.

Dla przykładu, istnienie Ptaka mędrca jest tylko szczególnym przypadkiem zasady punktu stałego — przypadkiem, gdzie $(---)$ jest wyrażeniem $x(Ax)$.

Z zasady punktu stałego, istnieje wtedy Ptak A taki, że dla każdego Ptaka x:

$$Ax = x(Ax).$$

Taki Ptak A jest ***Ptakiem mędrcem***.

Szczególnym przypadkiem zasady punktu stałego jest także to, że każdy Ptak lubi co najmniej jednego Ptaka (jak widzieliśmy przed chwilą).

Z zasady punktu stałego będziemy korzystać kilkakrotnie nieco później.

Na początku leśni bogowie stworzyli las z dwoma jedynie Ptakami — szpakiem S oraz pustułką K.

W lesie byli już ludzie.

Nowe Ptaki stale powoływane były do istnienia w następujący sposób.

Człowiek wyśpiewywał imię pewnego istniejącego już Ptaka y do istniejącego Ptaka x; wtedy x odpowiadał wyśpiewując imię istniejącego już bądź jeszcze nieistniejącego Ptaka, ale cudowne w tym było to, że gdy x nazywał nieistniejącego Ptaka, to Ptak taki zaczynał istnieć!

Tak generowane były stale nowe Ptaki.

Bogowie lasu postąpili mądrze rozpoczynając od szpaka i pustułki, ponieważ z tych dwóch Ptaków można wygenerować wszystkie ptaki kombinatoryczne.

Oczywiście, to tylko legenda, ale dostarcza strawy duchowej.

Niektórzy historycy ornitologii łączyli ją z historią Adama i Ewy, choć to, którym z Ptaków S i K był Adam, a którym Ewa, bywało przedmiotem ostrych kontrowersji.

Historycy mężczyźni chcieli widzieć w S Adama, ale wiele kobiet historyków uważało to za męski szowinizm.

Potrzeba dalszych badań, aby dokonać ostatecznych rozstrzygnięć w tej materii.

Starożytni historycy chińscy myślą o S jako o *yang*, o K jako o *yin*, a o ich połączeniu jako o wszechogarniającym *Tao*.

Legenda w pewnym stopniu *jakoś* polega na prawdzie, ponieważ istotnie wszystkie Ptaki kombinatoryczne są wyprowadzalne właśnie jedynie z dwóch Ptaków S oraz K.

Wyrażenia budowane są z liter S, K, I oraz zmiennych x, y, z, w, v i być może dalszych, w razie potrzeby. Niech α oznacza dowolną ze zmiennych. Dla dowolnego wyrażenia X, nazwijmy wyrażenie X_1 α-reduktem X, jeśli zachodzą następujące dwa warunki:

1. Zmienna α nie występuje w X_1.
2. Zachodzi relacja $X_1\alpha = X$.

Nie oznacza to, że $X_1\alpha$ koniecznie **jest** wyrażeniem X, ale tylko to, że równanie $X_1\alpha = X$ jest wyprowadzalne z warunków definiujących S oraz K.

Dla przykładu, „$KK\alpha$" oraz „K" są różnymi wyrażeniami, ale relacja $KK\alpha = K$ zachodzi, na mocy warunku definiującego pustułkę — mianowicie dla *dowolnych* x oraz y, $Kxy = x$.

Dla danego wyrażenia X oraz zmiennej α, w jaki sposób znajdujemy α-redukt X? Można to zawsze uczynić poprzez skończoną liczbę zastosowań następujących czterech zasad:

Zasada 1. Jeśli X składa się jedynie ze zmiennej α występującej samotnie, to I jest α-reduktem X.

W innym sformułowaniu, I jest α-reduktem α.

Powód: Zmienna α nie jest oczywiście częścią wyrażenia I oraz $I\alpha = \alpha$ zachodzi. Zatem I spełnia oba warunki dla bycia α-reduktem α.

Zasada 2. Jeśli X jest wyrażeniem, w którym zmienna α nie występuje, to KX jest α-reduktem X.

Powód jest oczywisty: ponieważ α nie występuje w X, więc nie występuje w KX, a relacja $KX\alpha = X$ zachodzi.

Zasada 3. Jeśli X jest wyrażeniem złożonym $Y\alpha$ i α nie występuje w Y, to samo Y jest α-reduktem X.

W innym sformułowaniu, jeśli α nie występuje w Y, to Y jest α-reduktem $Y\alpha$. Powody są oczywiste.

Dla przykładu, yz jest x-reduktem yzx, ponieważ x nie występuje w yz oraz yz *jest* wyrażeniem E takim, że $Ex = yzx$. Także KyI jest x-reduktem $KIyx$, ale KIy *nie* jest y-reduktem $KIyx$!

Zasada 4. Przypuśćmy, że X jest wyrażeniem złożonym YZ i że Y_1 jest α-reduktem Y, a Z_1 jest α-reduktem Z. Wtedy wyrażenie SY_1Z_1 jest α-reduktem X.

Powód: Relacje $Y_1\alpha = Y$ oraz $Z_1\alpha = Z$ obie zachodzą, z założenia, i relacja $SY_1Z_1\alpha = Y_1\alpha(Z_1\alpha)$ zachodzi, a stąd zachodzi relacja $SY_1Z_1\alpha = YZ = X$. Nadto α nie występuje ani w Y_1 ani w Z_1 — z założenia, że Y_1 oraz Z_1 są odpowiednio α-reduktami Y oraz Z — stąd α nie występuje w SY_1Z_1. Zatem SY_1Z_1 jest wyrażeniem X_1, w którym α nie występuje i które ma tę własność, że zachodzi relacja $X_1\alpha = X$.

Zauważmy, że Zasada 4 redukuje problem znajdowania α-reduktu wyrażenia złożonego YZ do problemu znalezienia α-reduktów krótszych wyrażeń Y oraz Z. Aby znaleźć jeden z nich bądź oba, może być znowu potrzebna Zasada 4, a może znów i znów, ale ponieważ rozważane wyrażenia są coraz krótsze, więc proces ten musi się zakończyć.

Rozważmy pewne przykłady. Przypuśćmy, że chcemy znaleźć x-redukt wyrażenia $yx(xy)$. W notacji nieskróconej jest to $(yx)(xy)$.

Widzimy, że Zasada 4 jest jedyną, którą można bezpośrednio zastosować, a więc musimy najpierw znaleźć x-redukt yx oraz x-redukt xy.

Na mocy Zasady 3, y jest x-reduktem yx. Jeśli chodzi o xy, to musimy znowu skorzystać z Zasady 4: ponieważ I jest x-reduktem x oraz Ky jest x-reduktem y, więc, na mocy Zasady 4, $SI(Ky)$ jest x-reduktem xy.

A więc y jest x-reduktem yx, a $SI(Ky)$ jest x-reduktem xy; zatem, na mocy Zasady 4, $Sy(SI(Ky)))$ jest x-reduktem $yx(xy)$. Można sprawdzić, że $Sy(SI(Ky))x = yx(xy)$.

Z drugiej strony, przypuśćmy, że chcielibyśmy znaleźć y-redukt $(yx)(xy)$. Musimy najpierw znaleźć y-redukt yx oraz y-redukt xy. Jeśli chodzi o pierwszy z nich, to ponieważ I jest y-reduktem y oraz Kx jest y-reduktem x, więc $SI(Kx)$ jest y-reduktem yx. Jeśli chodzi o drugi z nich, to x jest y-reduktem xy. A więc $SI(Kx)$ jest y-reduktem yx oraz x jest y-reduktem xy, a stąd, na mocy Zasady 4, $S(SI(Kx))x$ jest y-reduktem $yx(xy)$. Łatwo sprawdzić, że relacja $S(SI(Kx))xy = yx(xy)$ zachodzi.

Gdy wiemy teraz, jak znaleźć α-redukt X, dla dowolnej zmiennej α i dowolnego wyrażenia X, to możemy z S, K oraz I wyprowadzić dowolny kombinator potrzebny do wykonania dowolnego wymaganego działania. Jeśli X ma tylko jedną zmienną — powiedzmy x — i życzymy sobie znaleźć kombinator A taki, że zachodzi relacja $Ax = X$, to za A bierzemy dowolny x-redukt X.

Przypuśćmy, że mamy wyrażenie X z dwiema zmiennymi — powiedzmy x oraz y — i szukamy kombinatora A takiego, że zachodzi $Axy = X$.

Najpierw znajdujemy y-redukt X — nazwijmy go X_1 — a następnie znajdujemy x-redukt X_1 — nazwijmy go X_2, a wtedy X_2 jest kombinatorem, którego szukamy.

Dla przykładu, przypuśćmy, że potrzebujemy kombinatora A takiego, że dla dowolnych x oraz y, $Axy = yx(xy)$. Znaleźliśmy już y-redukt $yx(xy)$ — a mianowicie $S(SI(Kx))x$. Musimy teraz znaleźć x-redukt $S(SI(Kx))x$. Możemy zorganizować pracę następująco:

1. 1. $K(SI)$ jest x-reduktem SI.
2. 2. K jest x-reduktem Kx.
3. 3. Zatem $S(SI)K$ jest x-reduktem $SI(Kx)$.
4. 4. KS jest x-reduktem S.
5. 5. Stąd, zgodnie z krokami 4 i 3 oraz Zasadą 4,
   $$S(S(KS)(S(SI)K))I$$
   jest x-reduktem $S(SI(Kx))x$.
6. 6. I jest x-reduktem x
7. 7. Zatem, zgodnie z krokami 5 i 6 oraz Zasadą 4,
   $$S(S(KS)(S(SI)K))I$$
   jest x-reduktem $S(SI(Kx))x$ i jest kombinatorem A działającym tak jak sobie życzyliśmy: $Axy = yx(xy)$.

W skrócie, jeśli X jest wyrażeniem o dokładnie dwóch zmiennych x oraz y, to kombinator, który nadaje się dla X — przez co rozumiemy, że relacja $Axy = X$ zachodzi — jest odnajdywany przez wyszukanie x-reduktu dla y-reduktu dla X — takie wyrażenie nazywamy $x - y$-reduktem X.

Jeśli X zawiera trzy zmienne x, y oraz z, to znajdujemy A przez odszukanie x-reduktu dla y-reduktu dla z-reduktu X — takie wyrażenie nazywamy $x - y - z$-reduktem X.

Opisaną wyżej redukcję można przeprowadzić dla dowolnej skończonej liczby zmiennych.

Ptaki logiczne

Propozycja Barendregta.

Wartości logiczne (Ptaki zdaniowe):

- t (***Prawda***) — Pustułka K
- f (***Fałsz***) — Ptak KI.

Wtedy $txy = Kxy = x$ oraz $fxy = KIxy = Iy = y$. Ptaka x nazywamy ***zdaniowym***, jeśli $x = t$ lub $x = f$. (Ekstensjonalna równość termów.)

Jeśli p, q oraz r są Ptakami zdaniowymi, to mamy np.:
$pqr = (p\&q) \vee (\neg p\&r)$ lub, co jest tym samym,
$pqr = (p \to q)\&(\neg p \to r)$.
Odczytać to można jako: 'jeśli p, to q; w przeciwnym razie r.

Dokładniej, można zdefiniować kombinatory odpowiadające funktorom prawdziwościowym.

Funktory prawdziwościowe jako kombinatory.

- Ptak ***negacji***. $Nx = xft$. Za N można wziąć Vft, gdzie V jest ***wireonkiem***. $Vxyz = zxy$.
- Ptak ***koniunkcji***. $cxy = xyf$. Za c można wziąć Rf, gdzie R jest ***rudzikiem***. $Rxyz = yzx$.
- Ptak ***alternatywy***. $dxy = xty$. Za d można wziąć Tt, gdzie T jest ***drozdonem***. $Txy = yx$.
- Ptak ***implikacji***. $ixy = xyt$. Za i można wziąć Rt, gdzie R jest ***rudzikiem***.
- Ptak ***równoważności***. $exy = xy(Ny)$. Za e można wziąć CSN, gdzie C jest kardynałem, S jest szpakiem, a N jest Ptakiem negacji. $Sxyz = xz(yz)$, $Cxyz = xzy$.

Ptaki arytmetyczne

Liczebniki i operacja następnika.

Niech σ będzie Ptakiem Vf (tj. Ptakiem $V(KI)$). Nazwijmy σ Ptakiem ***następnika***. Dla każdej liczby naturalnej n określimy Ptaka $\bar{n}$, reprezentującego tę liczbę. Przez n^+ oznaczamy następnik n.

Za $\bar{0}$ bierzemy Ptaka identycznościowego I. Za $\bar{1}$ bierzemy Ptaka $\sigma\bar{0}$; za $\bar{2}$ bierzemy $\sigma\bar{1}$; za $\bar{3}$ bierzemy $\sigma\bar{2}$ i tak dalej.

Stąd $\bar{0} = I$; $\bar{1} = \sigma\bar{0}$; $\bar{2} = \sigma(\sigma\bar{0})$; $\bar{3} = \sigma(\sigma(\sigma\bar{0}))$ i tak dalej.

Tak więc, $\bar{0} = I$; $\bar{1} = VfI$; $\bar{2} = Vf(VfI)$; $\bar{3} = Vf(Vf(VfI))$ i tak dalej.

Ptak Z (***wykrywacz zera***) określony jest jako Tt. Wtedy: $Z\bar{0} = TtI = It = t$ oraz $Z\overline{n^+} = Tt\overline{n^+} = \overline{n^+}t = Vf\bar{n}t = tf\bar{n} = f$.

Ptak P (***poprzednika***) określony jest jako Tf. Wtedy dla dowolnej liczby n, $P\overline{n^+} = Tf\overline{n^+} = \overline{n^+}f = Vf\bar{n}f = ff\bar{n} = \bar{n}$.

Dodawanie $\oplus$.

Operacja dodawania jest jednoznacznie określona poprzez następujące dwa warunki, dla dowolnych liczb n oraz m:

1. $n + 0 = n$
2. $n + m^+ = (n + m)^+$. To jest, n plus następnik m jest następnikiem $n + m$.

Szukamy zatem Ptaka A takiego, że dla wszystkich n oraz m:

1. $A\bar{n}\bar{0} = \bar{n}$
2. $A\bar{n}\overline{m^+} = \sigma(A\bar{n}\bar{m})$ lub, co jest tym samym, dla dowolnego dodatniego m, $A\bar{n}\bar{m} = \sigma(A\bar{n}(P\bar{m}))$.

Tak więc A musi spełniać warunek, że dla dowolnych n oraz m, będących 0 lub dodatnich, $A\bar{n}\bar{m} = Z\bar{m}\bar{n}(\sigma(A\bar{n}(P\bar{m})))$. Taki Ptak A istnieje na mocy zasady punktu stałego, a więc za $\oplus$ bierzemy dowolnego takiego Ptaka.

Mnożenie $\otimes$.

Zauważmy, że mnożenie jest jedyną operacją spełniającą następujące dwa warunki:

1. Dla dowolnej liczby n, $n \cdot 0 = 0$.
2. Dla dowolnych liczb n oraz m, $n \cdot m^+ = (n \cdot m) + n$.

Chcemy zatem mieć Ptaka A takiego, że dla każdych n oraz m, $A\bar{n}\bar{m} = (Z\bar{m})\bar{0}((\oplus)(A(\bar{n}(P\bar{m}))\bar{n}))$.

Znowu, taki Ptak A może zostać odnaleziony na mocy zasady punktu stałego i bierzemy za $\otimes$ takiego Ptaka.

Potęgowanie $\odot$.

Operacja potęgowania spełnia następujące dobrze znane prawa:

1. $n^0 = 1$
2. $n^{m^+} = n^m \cdot n$.

Szukamy zatem Ptaka $\odot$ takiego, że dla wszystkich n, $\odot\bar{n}\bar{0} = 1$, oraz dla każdej dodatniej liczby m, $\odot\bar{n}\overline{m^+} = \otimes(\odot\bar{n}\bar{m})\bar{n}$.

Równoważnie, szukamy Ptaka $\odot$ takiego, że dla wszystkich n oraz m, $\odot\bar{n}\overline{m^+} = Z\bar{m}\bar{1}(\otimes(\odot\bar{n}\bar{m})\bar{n})$.

Znowu, taki Ptak $\odot$ może zostać odnaleziony na mocy zasady punktu stałego.

Smullyan pokazuje, jak wygląda znana procedura ***arytmetyzacji składni*** w terminach kombinatorów.

Mamy wtedy możliwość wysłowienia znanych twierdzeń metalogicznych w aparaturze pojęciowej rachunku kombinatorów.

W szczególności, przedstawiony jest dowód, iż nie istnieje ***Ptak Idealny***, tj. nie istnieje efektywna procedura rozstrzygania, czy zachodzi ekstensjonalna równość termów X_1 oraz X_2, dla dowolnych termów X_1, X_2 języka logiki kombinatorycznej.

Ze względu na sporą liczbę pojęć pomocniczych potrzebnych do omówienia tych zagadnień, nie możemy dowodu tego pokazać w tej prezentacji.

Dygresja: kombinatory a rachunek lambda

Smullyan nie pokazuje w swoim tekście związków między rachunkiem kombinatorów a *rachunkiem lambda*, jak sądzę, z powodów dydaktycznych.

Przypomnijmy, że mamy transformacje między tymi rachunkami, pozwalające przekładać wyrażenia jednego z nich na drugi.

Przekład KL kombinatorów na λ-termy:

- $KL[K] = \lambda x.\lambda y.x$
- $KL[S] = \lambda x.\lambda y.\lambda z.(xz(yz))$
- $KL[(K_1K_2)] = (KL[K_1]KL[K_2])$.

Dla innych kombinatorów ten przekład jest równie oczywisty; np.: $KL[I] = \lambda x.x$, $KL[C] = \lambda x.\lambda y.\lambda z.(xzy)$, $KL[B] = \lambda x.\lambda y.\lambda z.(x(yz))$.

Przekład LK λ-termów na kombinatory:

- $LK[v] = v$
- $LK[(L_1L_2)] = (LK[L_1]LK[L_2])$
- $LK[\lambda x.L] = (K\ LK[L])$ (jeśli x nie jest wolna w L)
- $LK[\lambda x.x] = I$
- $LK[\lambda x.\lambda y.L] = LK[\lambda x.LK[\lambda y.L]]$ (jeśli x jest wolna w L)
- $LK[\lambda x.(L_1L_2)] = (S\ LK[\lambda x.L_1]LK[\lambda x.L_2])$.

Uwaga. Przekład KL nie jest odwrotnością przekładu LK.

Przykład: paradoks Curry'ego

„W tym lesie" mówił Byrd [Ptasi socjolog w Lesie Curry'ego] „pewne Ptaki śpiewają w pewne dni. Moim celem było ustalenie, które Ptaki w jakich dniach śpiewają.

„Cóż, mamy tu bardzo szczególnego Ptaka P. Nie znam jego gatunku, ale to nieważne. Ważną zaś rzeczą jest to, że dla dowolnych Ptaków x oraz y, różnych bądź nie, zachodzą następujące prawa:

- *Prawo 1.* Jeśli y śpiewa danego dnia, to Pxy śpiewa tegoż dnia.
- *Prawo 2.* Jeśli x nie śpiewa danego dnia, to Pxy śpiewa tego dnia.
- *Prawo 3.* Jeśli ptak x oraz Ptak Pxy *oba* śpiewają danego dnia, to y śpiewa tego dnia.
- *Prawo 4.* Dla każdego Ptaka x istnieje Ptak y taki, że y śpiewa w te i dokładnie w te dni, gdy śpiewa Pyx."

Twierdzenie. *W Lesie Curry'ego* **wszystkie** *Ptaki śpiewają we* **wszystkie** *dni.*
Dowód.

Zauważmy najpierw, że z pierwszych dwóch praw Byrda wynika, iż jeśli y śpiewa we wszystkie dni, w których śpiewa x, to Ptak Pxy musi śpiewać we wszystkie dni.

Powód: Przypuśćmy, że y śpiewa we wszystkie dni, w których śpiewa x.

Rozważmy teraz dowolny dzień. Albo x śpiewa tego dnia, albo nie.

Jeśli x nie śpiewa, to Pxy śpiewa, na mocy drugiego prawa Byrda.

Przypuśćmy teraz, że x śpiewa tego dnia.

Wtedy y także śpiewa tego dnia (bo założono, że y śpiewa każdego dnia, którego x śpiewa), a stąd Pxy musi śpiewać tego dnia, na mocy pierwszego prawa Byrda.

Dowodzi to, że niezależnie od tego, czy x śpiewa, czy nie śpiewa danego dnia, Ptak Pxy tego dnia śpiewa. Stąd Pxy śpiewa każdego dnia.

Pokażemy teraz, że dla dowolnego danego Ptaka x, śpiewa on każdego dnia.

Na mocy Prawa 4 istnieje Ptak y który śpiewa w te i dokładnie w te dni, gdy śpiewa Pyx.

Rozważmy teraz dowolny dzień, w którym y śpiewa.

Pyx także śpiewa tego dnia, na mocy Prawa 4, a ponieważ y śpiewa tego dnia, więc x śpiewa tego dnia, na mocy Prawa 3.

Dowodzi to, że x śpiewa we wszystkie dni, w których y śpiewa, a stąd Pyx śpiewa każdego dnia, na mocy rozumowania z poprzedniego paragrafu.

Wtedy, ponieważ y śpiewa w te same dni, co Pyx, więc ptak y śpiewa we wszystkie dni.

Zatem, dowolnego zupełnie dnia, Ptaki y oraz Pyx oba śpiewają, a stąd x też tego dnia śpiewa, na mocy Prawa 3.

Dowodzi to, że x śpiewa każdego dnia.

- Przypuśćmy, że mamy do dyspozycji pierwsze trzy prawa Byrda, ale zamiast prawa czwartego mamy informację, że w lesie jest skowronek. Czy wtedy wynika stąd, że wszystkie Ptaki śpiewają we wszystkie dni?

- Przypuśćmy, że w miejsce informacji o skowronku podano nam informację, że w lesie jest kardynał; czy wynikałoby stąd, że wszystkie Ptaki śpiewają każdego dnia?

- Przypuśćmy, że wiemy o obecności *obu*: skowronka *oraz* kardynała; czy wynika stąd, że wszystkie Ptaki śpiewają każdego dnia?

Gdybyśmy mieli do dyspozycji jedynie samego L lub jedynie samego C, to nie widać sposobu, aby udowodnić, że wszystkie ptaki śpiewają każdego dnia, jednak gdy mamy jednocześnie *oba* C oraz L, to możemy wyprowadzić Prawo 4 w sposób następujący.

Ponieważ obecny jest skowronek L, więc każdy Ptak lubi co najmniej jednego Ptaka; [Smullyan podaje dowód, że x lubi $Lx(Lx)$ w jednym z wcześniejszych rozdziałów].

Weźmy teraz dowolnego Ptaka x.

Wtedy ptak CPx lubi pewnego Ptaka y, co oznacza, że $CPxy = y$, a stąd $y = CPxy$.

Ale także $CPxy = Pyx$, a zatem $y = Pyx$.

Wtedy oczywiście y śpiewa w dokładnie te same dni, co Pyx, ponieważ y **jest** Ptakiem Pyx!

Zatem Prawo 4 zachodzi.

Znowu przypuśćmy, że dysponujemy pierwszymi trzema prawami Byrda, ale nie czwartym.

Czy potrafisz znaleźć **pojedynczego** ptaka kombinatorycznego, którego obecność implikowałaby, że każdego dnia śpiewają wszystkie ptaki?

Przypuśćmy, że zamiast obecności obu C oraz L mamy obecnego Ptaka A spełniającego warunek $Axyz = x(zz)y$.

Wtedy dla dowolnych ptaków x oraz y, $APxy = P(yy)x$.

Stąd $APx(APx) = P(APx(APx))x$, a więc $y = Pyx$, gdzie y jest ptakiem $APx(APx)$.

Przypuśćmy, że zamiast mówić o ptakach, mówimy o *zdaniach*. Przypuśćmy też, że zamiast mówić, że ptak śpiewa lub nie śpiewa danego dnia, mówimy, że zdanie jest prawdziwe lub że jest fałszywe. Dla dowolnych zdań x oraz y, niech Pxy *będzie zdaniem mówiącym, że x jest fałszywe lub y jest prawdziwe*, albo, co jest tym samym, że jeśli x jest prawdziwe, to takie jest też y. Pierwsze trzy prawa Byrda odpowiadają następującym podstawowym prawom logiki:

- *Prawo 1.* Jeśli y jest prawdziwe, to Pxy jest prawdziwe.
- *Prawo 2.* Jeśli x jest fałszywe, to Pxy jest prawdziwe.
- *Prawo 3.* Jeśli x oraz Pxy są oba prawdziwe, to takie jest też y.

Przypuśćmy teraz, że dodamy czwarte prawo, które odpowiada czwartemu prawu Byrda:

Prawo 4. Dla każdego zdania x istnieje zdanie y takie, że zdanie y oraz zdanie Pyx są albo oba prawdziwe albo oba fałszywe.

Otrzymujemy wtedy paradoks: wszystkie zdania są prawdziwe.

Przypuśćmy, że rozważamy teraz dowolną kolekcję bytów zwanych *obiektami* i przypuśćmy, że dysponujemy pewną operacją, która zastosowana do obiektu x oraz obiektu y daje pewien obiekt xy. Mamy wtedy coś, co nazywa się *systemem aplikacyjnym*, w którym obiekt xy jest nazywany wynikiem *zastosowania (aplikacji) x* do y. W systemach aplikacyjnych w poprzednich rozdziałach naszymi „obiektami" były Ptaki, a za xy braliśmy odpowiedź x na y. Logika kombinatoryczna bada systemy aplikacyjne o pewnych szczególnych własnościach, wśród których jest istnienie rozmaitych kombinatorów, z włączeniem C, którego nazywaliśmy *kardynałem*, oraz L, którego nazywaliśmy *skowronkiem*. Przypuśćmy teraz, że „obiekty", które badamy, obejmują wszystkie zdania, prawdziwe i fałszywe, jak również inne obiekty, *kombinatory*. Przypuśćmy, że mamy obiekt P taki, że dla dowolnych *zdań* x oraz y obiekt Pxy jest zdaniem mówiącym, że albo x jest fałszywe albo y jest prawdziwe. Jeśli x oraz y nie są oba zdaniami, to Pxy jest w dalszym ciągu dobrze określonym obiektem i może być lub nie być zdaniem, zależnie od natury x oraz y.

Prawa 1, 2 oraz 3 oczywiście zachodzą, *o ile x oraz y są zdaniami!* Nadto, zakładając, że obecne są C oraz L, dla dowolnego obiektu x musi istnieć obiekt y taki, że

$y = Pyx$, jak widzieliśmy w rozwiązaniu problemu 2. W szczególności, dla dowolnego *zdania* x musi istnieć *obiekt* y taki, że $y = Pyx$, ale ten y nie musi być zdaniem! W istocie, y *nie może* być zdaniem, ponieważ gdyby był, to Pyx także byłoby zdaniem i to tym samym zdaniem, co y, co znaczyłoby, że zachodzi Prawo 4 i wpadlibyśmy znowu w paradoks Curry'ego. A więc droga wyjścia z paradoksu polega na uświadomieniu sobie, że choć aksjomaty logiki kombinatorycznej implikują, iż istnieje pewien *obiekt* y taki, że $y = Pyx$, to taki y nie może być zdaniem. Niektóre wcześniejsze systemy, które próbowały połączyć logikę zdaniową z logiką kombinatorów były nieostrożne w tym względzie i okazały się być sprzeczne. Jednak, jak zauważył Haskell Curry, paradoksy te nie powstały z winy samej logiki kombinatorycznej, były one wynikiem niewłaściwego zastosowania logiki kombinatorycznej do logiki zdaniowej.

Ptak Gödla

W rozdziale 17 książki Smullyana wędrujemy wraz z inspektorem Craigiem przez **Las Gödla**. Ptasim socjologiem w tym lesie jest niejaki Profesor **Giuseppe Baritoni**.

„A w *tym* lesie" objaśniał Baritoni „nie jest dla nas ważne, które Ptaki śpiewają w jakie dni; ważnym problemem jest, które Ptaki w ogóle potrafią śpiewać! Nie wszystkie Ptaki z tego lasu potrafią śpiewać. Mamy mnóstwo słowików, i wszystkie one śpiewają, jak pewnie zdołałeś zauważyć."

„Czy słowiki są *jedynymi* ptakami, które śpiewają, czy też są jeszcze inne?" — zapytał Craig.

Zanim poznamy odpowiedź na to pytanie, ustalmy pewne fakty dotyczące Lasu Gödla.

Wszystkie Ptaki są zamężne (żonate). Dla dowolnego Ptaka x przez x' oznaczam **współmałżonka** x. Dla dowolnych Ptaków x oraz y, Ptak $x'y$ śpiewa wtedy i tylko wtedy, gdy xy nie śpiewa.

Każdy Ptak x ma pewnego wyróżnionego krewniaka x^* nazywanego **towarzyszem** x. Ptak x^* jest taki, że dla każdego ptaka y, Ptak x^*y śpiewa wtedy i tylko wtedy, gdy Ptak $x(yy)$ śpiewa.

Istnieje **szczególny Ptak** $\mathcal{N}$ taki, że kiedy tylko wyśpiewasz słowika do $\mathcal{N}$, to $\mathcal{N}$ odpowie nazywając Ptaka, który śpiewa, ale gdy wyśpiewasz do $\mathcal{N}$ dowolnego Ptaka, który nie jest słowikiem, to $\mathcal{N}$ odpowie nazywając Ptaka, który nie śpiewa. Innymi słowy, Ptak $\mathcal{N}x$ śpiewa wtedy i tylko wtedy, gdy x jest słowikiem.

Zakładamy zatem, że (w tym lesie):

- *Warunek 1.* Wszystkie słowiki (w tym lesie) śpiewają.
- *Warunek 2.* $x'y$ śpiewa wtedy i tylko wtedy, gdy xy nie śpiewa.
- *Warunek 3.* x^*y śpiewa wtedy i tylko wtedy, gdy $x(yy)$ śpiewa.
- *Warunek 4.* $\mathcal{N}x$ śpiewa wtedy i tylko wtedy, gdy x jest słowikiem.

Szukamy Ptaka śpiewającego $\mathcal{G}$, który nie jest słowikiem.

Ptak $\mathcal{G}$ zaczął potem być znany jako **Ptak Gödlowski**, ponieważ metoda Craiga znajdowania go naśladowała metodę Gödla znajdowania prawdziwego zdania, które nie jest dowodliwe w pewnym systemie aksjomatycznym.

Kluczem do tego naśladownictwa jest to, że Ptaki śpiewające odpowiadają zdaniom prawdziwym, a słowiki odpowiadają zdaniom *dowodliwym*. Tak więc, Ptak śpiewający, który nie jest słowikiem odpowiada zdaniu prawdziwemu, które nie jest dowodliwe w rozważanym systemie aksjomatycznym.

C: Jeśli wiesz jak znaleźć ptaka x i jak znaleźć ptaka y, to czy wiesz, jak znaleźć ptaka xy?

B: Niekoniecznie; jednakże, jeśli wiem jak zlokalizować x i znam *nazwę* y, to mogę znaleźć ptaka xy; po prostu idę do x i wyśpiewuję nazwę y. Wtedy x *nazywa* ptaka xy. A gdy już znam nazwę xy, to potrafię go znaleźć, ponieważ potrafię znaleźć dowolnego ptaka, którego nazwę znam.

C: Jeśli znasz nazwę ptaka x, to czy potrafisz znaleźć nazwę współmałżonka x?

B: Tak; mam kompletną listę, z której wiem, kto z kim jest żonaty.

C: Jeśli znasz nazwę ptaka x, to jesteś zdolny również odnaleźć nazwę jego towarzysza x^*?

B: Tak; mam stosowną listę.

C: Czy znasz nazwę tego szczególnego ptaka $\mathcal{N}$?

B: Tak; jego nazwą jest po prostu litera $\mathcal{N}$.

C: Potrafię cię zaprowadzić do śpiewającego ptaka, który nie jest słowikiem.

Ptaka $\mathcal{G}$ odnaleźli w sposób następujący.

Baritoni znał już nazwę Ptaka $\mathcal{N}$, a stąd po zajrzeniu do swojej pierwszej listy, znał też nazwę Ptaka $\mathcal{N}'$ — współmałżonka $\mathcal{N}$. Wtedy, zaglądając na swoją drugą listę, Baritoni znalazł nazwę Ptaka $\mathcal{N}'^*$.

Dla uniknięcia zamieszania, odwołujmy się do Ptaka $\mathcal{N}'^*$ jako do A. Obaj mężczyźni znaleźli potem Ptaka A, zbliżyli się do niego i wyśpiewali mu jego własne imię. A odpowiedział nazywając Ptaka AA. Wtedy obaj byli w stanie odnaleźć AA.

Udowodnimy teraz, że AA musi być Ptakiem, który śpiewa, a nie jest słowikiem.

Niech $\mathcal{G}$ będzie Ptakiem AA — innymi słowy, $\mathcal{G}$ jest Ptakiem $\mathcal{N}'^*\mathcal{N}'^*$ — i udowodnimy, że $\mathcal{G}$ śpiewa, ale nie jest słowikiem.

Ptak A ma tę własność, że dla dowolnego Ptaka x, Ptak Ax śpiewa wtedy i tylko wtedy, gdy xx nie jest słowikiem. Jest tak z następującego powodu. $\mathcal{N}'^*x$ śpiewa wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{N}'(xx)$ śpiewa, na mocy Warunku 3, a $\mathcal{N}'(xx)$ śpiewa wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{N}(xx)$ nie śpiewa, co jest prawdą wtedy i tylko wtedy, gdy xx *nie* jest słowikiem, ponieważ $\mathcal{N}xx$ śpiewa wtedy i tylko wtedy, gdy xx *jest* słowikiem, na mocy Warunku 4. Zbierając razem te trzy fakty widzimy, że $\mathcal{N}'^*x$ śpiewa wtedy i tylko wtedy, gdy xx nie jest słowikiem, a ponieważ $\mathcal{N}'^*$ jest Ptakiem A, Ax śpiewa wtedy i tylko wtedy, gdy xx nie jest słowikiem.

Ponieważ jest prawdą, że dla *każdego* Ptaka x, Ptak Ax śpiewa wtedy i tylko wtedy, gdy xx nie jest słowikiem, więc jest to prawdą, gdy x jest Ptakiem A, a zatem AA śpiewa wtedy i tylko wtedy, gdy AA nie jest słowikiem. Oznacza to, że albo AA śpiewa i nie jest słowikiem, albo AA nie śpiewa i jest słowikiem. Jednakże wszystkie słowiki śpiewają, jak podano w Warunku 1, czyli drugi człon alternatywy jest wykluczony. Zatem AA śpiewa, lecz nie jest słowikiem.

Spędzili zatem cały dzień w lesie i udało im się znaleźć Ptaka $\mathcal{G}_1$, który śpiewał, a nie był słowikiem. Szczęśliwym trafem $\mathcal{G}_1$ okazał się być Ptakiem różnym od $\mathcal{G}$, choć nie można tego było przewidzieć.

Niech A_1 będzie Ptakiem $\mathcal{N}^{*\prime}$ raczej niż $\mathcal{N}^{\prime *}$. Wtedy A_1 jest niekoniecznie Ptakiem A, ale także ma tę własność, że dla dowolnego Ptaka x, Ptak $A_1 x$ śpiewa wtedy i tylko wtedy, gdy $A_1 x$ nie jest słowikiem.

Wynika z tego na mocy takiego samego rozumowania, że Ptak $A_1 A_1$ — nazwijmy go $\mathcal{G}_1$ — śpiewa, ale nie jest słowikiem.

Sumując, Ptak $\mathcal{N}^{\prime *}\mathcal{N}^{\prime *}$ oraz Ptak $\mathcal{N}^{*\prime}\mathcal{N}^{*\prime}$ są oba Ptakami, które śpiewają i żaden z nich nie jest słowikiem.

Autorstwo tego sprytnego rozumowania przypisać należy w ostatecznym rozrachunku Kurtowi Gödlowi.

Ptaki tworzyły rozmaite towarzystwa. O Ptaku A mówimy, że **reprezentuje** on zbiór Ptaków $\mathcal{S}$ jeśli dla każdego Ptaka x w $\mathcal{S}$ Ptak Ax jest Ptakiem śpiewającym oraz dla każdego Ptaka x spoza $\mathcal{S}$ Ptak Ax jest Ptakiem nieśpiewającym — innymi słowy, dla każdego Ptaka x, Ptak Ax śpiewa wtedy i tylko wtedy, gdy x jest członkiem $\mathcal{S}$. Zbiór Ptaków jest nazywany **towarzystwem**, jeśli jest reprezentowany przez jakiegoś Ptaka. Dla przykładu, zbiór słowików tworzy towarzystwo, ponieważ zbiór ten jest reprezentowany przez Ptaka $\mathcal{N}$.

Czy zbiór wszystkich ptaków śpiewających tworzy towarzystwo? Można na to pytanie odpowiedzieć na podstawie Warunku 2 oraz Warunku 3 Baritoniego. Nadto, z samego Warunku 3 można udowodnić, że każde towarzystwo musi zawierać co najmniej jednego Ptaka, który śpiewa lub nie mieć w swoim gronie co najmniej jednego Ptaka, który nie śpiewa. *Jak to udowodnić i jakie to ma znaczenie dla problemu, czy Ptaki śpiewające tworzą towarzystwo?*

Najpierw udowodnimy na podstawie Warunku 3, że dowolne towarzystwo musi albo zawierać pewnego śpiewaka albo wykluczać pewnego nieśpiewaka.

Weźmy dowolne towarzystwo $\mathcal{S}$. Wtedy $\mathcal{S}$ jest reprezentowane przez pewnego Ptaka A. Rozważmy teraz Ptaka A^*. Dla każdego Ptaka x, Ptak A^*x śpiewa wtedy i tylko wtedy, gdy $A(xx)$ śpiewa, zgodnie z Warunkiem 3. Nadto, $A(xx)$ śpiewa wtedy i tylko wtedy, gdy xx jest członkiem $\mathcal{S}$, ponieważ A reprezentuje $\mathcal{S}$. Zatem, A^*x śpiewa wtedy i tylko wtedy, gdy xx jest członkiem $\mathcal{S}$. Ponieważ jest to prawdą dla każdego Ptaka x, więc w szczególności A^*A^* śpiewa wtedy i tylko wtedy, gdy A^*A^* jest członkiem $\mathcal{S}$. A więc jeśli A^*A^* śpiewa, to jest on członkiem $\mathcal{S}$, a stąd w $\mathcal{S}$ jest śpiewający Ptak A^*A^*. Z drugiej strony, jeśli A^*A^* nie śpiewa, to A^*A^* nie jest członkiem $\mathcal{S}$, a więc poza $\mathcal{S}$ jest co najmniej jeden nieśpiewający Ptak — a mianowicie A^*A^*. Dowodzi to, że każde towarzystwo $\mathcal{S}$ albo ma za członka co najmniej jednego śpiewającego Ptaka, albo wyklucza członkostwo co najmniej jednego nieśpiewającego Ptaka.

Przypuśćmy teraz, że zbiór wszystkich śpiewających Ptaków tworzy towarzystwo. Otrzymamy stąd następującą sprzeczność.

Zbiór wszystkich śpiewających Ptaków byłby reprezentowany przez jakiegoś Ptaka A. Wtedy z Warunku 2 Ptak A', współmałżonek A, reprezentowałby zbiór wszystkich Ptaków, które *nie* śpiewają.

Oznaczałoby to, że zbiór wszystkich Ptaków nieśpiewających tworzy towarzystwo, ale to jest niemożliwe, ponieważ zbiór ten ani nie zawiera żadnego śpiewającego Ptaka ani nie wyklucza pewnego nieśpiewającego Ptaka. Zatem zbiór wszystkich Ptaków śpiewających nie jest reprezentowany przez żadnego Ptaka — nie jest on towarzystwem.

Rozwiązanie tego problemu, wraz z Warunkiem 1 oraz Warunkiem 4, dostarcza też alternatywnego dowodu, iż istnieje Ptak śpiewający, który nie jest słowikiem. Ponieważ zbiór Ptaków śpiewających nie tworzy towarzystwa, a zbiór słowików tworzy towarzystwo, na mocy Warunku 4, więc owe dwa zbiory nie są identyczne. Jednak wszystkie słowiki śpiewają, na mocy Warunku 1, a stąd pewien śpiewający Ptak nie jest słowikiem.