Metody Dowodzenia Twierdzeń I Automatyzacja Rozumowań

Wykład 7: Dedukcja Naturalna

III rok kognitywistyki UAM, 2016–2017

Systemy dedukcji naturalnej pochodzą od Gerharda Gentzena (1909–1945) oraz Stanisława Jaśkowskiego (1906–1965). Systemy te miały m.in. reprezentować praktykę dowodową matematyków. Twierdzenia matematyczne składają się z założeń oraz tezy. Zakładamy, że zachodzą założenia i staramy się wyprowadzić z nich tezę. Tak więc, twierdzenie o założeniach $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ oraz tezie φ ma strukturę:

$$(\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \ldots \wedge \psi_n) \rightarrow \varphi$$

Na mocy praw importacji i eksportacji formuła ta jest równoważna formule:

$$\psi_1 \rightarrow (\psi_2 \rightarrow (\ldots \rightarrow (\psi_n \rightarrow \varphi) \ldots))$$

Charakterystyczne dla dowodów w systemach dedukcji naturalnej jest to, że korzystamy w nich jedynie z reguł wprowadzania lub opuszczania stałych logicznych. Kolejne kroki dowodowe polegają właśnie na zastosowaniu takich reguł. Opracowano wiele różnych stylizacji dedukcji naturalnej, co przekłada się m.in. na sposób zapisywania dowodów.

W niniejszej prezentacji wybieramy system dedukcji naturalnej pochodzący od Jaśkowskiego. Przedstawimy go w stylizacji proponowanej przez Słupeckiego i Borkowskiego, która nazywana jest *metodą dowodów założeniowych*. Jest to ujęcie dość tradycyjne, stale jednak obecne w dydaktyce logiki. Ograniczymy się do przedstawienia tego ujęcia dla klasycznego rachunku zdań. Plan na dziś (i prawdopodobnie także na następne zajęcia):

1. Podamy reguły pierwotne wykorzystywane w dowodach założeniowych w KRZ (w stylu Słupeckiego-Borkowskiego).
2. Podamy przykłady dowodów wprost oraz nie wprost.
3. Wskażemy niektóre reguły wtórne systemu.
4. Rozważymy przykłady dowodów z dodatkowymi założeniami.
5. Rozważymy przykłady dowodów rozgałęzionych.
6. Podamy informacje o bardziej współczesnych ujęciach dedukcji naturalnej.

1 Reguły pierwotne

Zbiór reguł pierwotnych systemu założeniowego oznaczymy przez jas. Należą doń:

(RO) *Reguła odrywania*. Jeśli do dowodu należy implikacja oraz jej poprzednik, to do dowodu wolno dołączyć następnik tej implikacji. W zapisie symbolicznym:

$$\frac{\varphi \to \psi \quad \varphi}{\psi}$$

Ta reguła to zatem reguła *opuszczania implikacji*. Reguła *dołączania implikacji* ma w tym systemie dowodowym specjalny status: tradycyjnie mówi się przy tym o tzw. *dodatkowych założeniach dowodu* (o czym za chwilę).

(DK) *Reguła dołączania koniunkcji*. Do dowodu wolno dołączyć koniunkcję, o ile oba jej człony należą do dowodu.

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}$$

(OK) *Reguła opuszczania koniunkcji*. Jeśli do dowodu należy koniunkcja, to wolno dołączyć do dowodu każdy z jej członów.

$$\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi} \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi}$$

(DA) *Reguła dołączania alternatywy*. Jeśli do dowodu należy jakaś formuła, to do dowodu wolno dołączyć alternatywę, której jednym z członów jest ta formuła.

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi} \qquad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi}$$

(OA) *Reguła opuszczania alternatywy*. Jeśli do dowodu należy alternatywa oraz negacja jednego z jej członów, to do dowodu dołączyć można pozostały człon tej alternatywy:

$$\frac{\varphi \vee \psi \quad \neg\varphi}{\psi} \qquad \frac{\varphi \vee \psi \quad \neg\psi}{\varphi}$$

(DR) *Reguła dołączania równoważności*. Do dowodu wolno dołączyć równoważność, o ile należy do dowodu implikacja, której poprzednikiem jest pierwszy człon tej równoważności, a następnikiem drugi jej człon, jak i implikacja odwrotna.

$$\frac{\varphi \to \psi \quad \psi \to \varphi}{\varphi \equiv \psi}$$

(OR) *Reguła opuszczania równoważności*. Jeśli do dowodu należy równoważność, to wolno dołączyć do dowodu zarówno implikację, której poprzednikiem jest pierwszy człon tej równoważności, a następnikiem drugi jej człon, jak i implikację odwrotną.

$$\frac{\varphi \equiv \psi}{\varphi \to \psi} \qquad \frac{\varphi \equiv \psi}{\psi \to \varphi}$$

W systemie zaproponowanym przez Jaśkowskiego nie zakładano reguły opuszczania alternatywy jako reguły pierwotnej, przyjmowano natomiast jeszcze następujące reguły pierwotne:

(RK) *Reguła kontrapozycji*. Jeśli do dowodu należy implikacja, której poprzednikiem jest negacja jednej formuły, a następnikiem negacja drugiej formuły, to do dowodu można dołączyć implikację, której poprzednikiem jest druga formuła, a następnikiem pierwsza formuła.

$$\frac{\neg\varphi \to \neg\psi}{\psi \to \varphi}$$

(DP) *Reguła dodawania poprzedników*. Jeśli do dowodu należą dwie implikacje o takim samym następniku, to do dowodu wolno dołączyć implikację o tymże następniku i o poprzedniku będącym alternatywą poprzedników tych implikacji.

$$\frac{\varphi \to \chi \quad \psi \to \chi}{(\varphi \vee \psi) \to \chi}$$

Korzystając z reguł pierwotnych z jas można wyprowadzić, jako reguły wtórne, (RK) oraz (DP). Regułę (OA) można wyprowadzić w oryginalnym systemie Jaśkowskiego.

2 Tezy systemu założeniowego

2.1 Tezy

Dowodem założeniowym (wprost) formuły $(\psi_1 \to (\psi_2 \to \ldots \to (\psi_n \to \varphi)\ldots))$ nazywamy każdy ciąg formuł taki, że:

1. pierwsze n elementów tego ciągu to formuły $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ (założenia dowodu)

2. wszystkie pozostałe elementy tego ciągu (kroki dowodowe) powstają z elementów wcześniejszych poprzez zastosowanie którejś z pierwotnych reguł dowodowych (dowodzi się też metatwierdzenia ustalającego, że w dowodach założeniowych korzystać możemy z wyprowadzonych wcześniej reguł wtórnych lub tez wcześniej udowodnionych)

3. ostatnim elementem tego ciągu jest formuła φ.

Piszemy $\{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n\} \vdash_{jas} \varphi$, gdy formuła:

$$(\psi_1 \to (\psi_2 \to \ldots \to (\psi_n \to \varphi) \ldots))$$

ma dowód założeniowy.

Dowody założeniowe zapisujemy w postaci ciągów formuł, z komentarzami uzasadniającymi każdy krok dowodowy, co zobaczymy za chwilę w przykładach.

Przez indukcję określamy zbiór T_{jas} *tez systemu założeniowego KRZ* opartego na regułach jas:

1. $\chi \in T^0_{jas}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba naturalna $n \geqslant 0$ oraz formuły $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \varphi$ takie, że: χ jest identyczna z

   $$(\psi_1 \to (\psi_2 \to \ldots \to (\psi_n \to \varphi) \ldots))$$

   oraz $\varphi \in C_{jas}(\{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n\})$ (gdzie C_{jas} to operacja konsekwencji wyznaczona przez reguły z jas, zob. wykład drugi).

2. $\chi \in T^{k+1}_{jas}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\chi \in T^k_{jas}$ lub istnieją liczby naturalne $n \geqslant 0$, $i < n$ oraz formuły $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \varphi$ takie, że:

   (a) χ jest identyczna z $(\psi_1 \to (\psi_2 \to \ldots \to (\psi_i \to \varphi) \ldots))$

   (b) $\psi_{i+1}, \psi_{i+2}, \ldots, \psi_n \in T^k_{jas}$

   (c) $\varphi \in C_{jas}(\{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n\})$.

$\chi \in T_{jas}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje m taka, że $\chi \in T^m_{jas}$.

Jeśli $\chi \in T^m_{jas}$, to mówimy, że χ jest *tezą stopnia* m systemu założeniowego KRZ. Jeśli χ jest tezą stopnia m i $m \leqslant n$, to χ jest też oczywiście tezą stopnia n. Jeśli $\chi \in T_{jas}$, to mówimy, że χ jest *tezą* systemu założeniowego KRZ.

Podaną tu indukcyjną definicję zbioru tez systemu założeniowego KRZ przytaczamy za: Pogorzelski, W.A. 1975. *Klasyczny rachunek zdań. Zarys teorii.* PWN, Warszawa (strona 188).

Dowodzi się, że zbiory tez: aksjomatycznego i założeniowego systemu KRZ są równe. Oznacza to, że metoda dowodów założeniowych jest trafna i pełna.

2.2 Kilka przykładów

Prawo komutacji: $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\psi \to (\varphi \to \chi))$

Należy dowieść, że z założeń $\varphi \to (\psi \to \chi), \psi, \varphi$ można otrzymać χ, używając reguł ze zbioru jas.

1.	$\varphi \to (\psi \to \chi)$	założenie
2.	ψ	założenie
3.	φ	założenie
4.	$\psi \to \chi$	RO: 1,3
5.	χ	RO: 4,2.

Zauważmy, że ten dowód jest taki sam, jak dowód prawa komutacji w aksjomatycznym ujęciu KRZ, przy wykorzystaniu Twierdzenia o Dedukcji Wprost.

Prawo eksportacji: $((\varphi \wedge \psi) \to \chi) \to (\varphi \to (\psi \to \chi))$

Trzeba pokazać, że z założeń $(\varphi \wedge \psi) \to \chi$, φ, ψ można otrzymać χ.

1.	$(\varphi \wedge \psi) \to \chi$	założenie
2.	φ	założenie
3.	ψ	założenie
4.	$\varphi \wedge \psi$	DK: 2,3
5.	χ	RO: 1,4.

Zauważ, że *planowanie* dowodu jest w tej metodzie prostsze, niż w metodzie aksjomatycznej.

Prawo importacji: $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \wedge \psi) \to \chi)$

Trzeba pokazać, że z założeń $\varphi \to (\psi \to \chi)$, $\varphi \wedge \psi$ można otrzymać χ.

1.	$\varphi \to (\psi \to \chi)$	założenie
2.	$\varphi \wedge \psi$	założenie
3.	φ	OK: 2
4.	ψ	OK: 2
5.	$\psi \to \chi$	RO: 1,3
6.	χ	RO: 5,4.

Zwróć uwagę na różne możliwości kolejności wykonania poszczególnych kroków dowodu.

Prawo sylogizmu hipotetycznego: $(\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$

Trzeba pokazać, że z założeń: $\varphi \to \psi$, $\psi \to \chi$ oraz φ można otrzymać χ.

1.	$\varphi \to \psi$	założenie
2.	$\psi \to \chi$	założenie
3.	φ	założenie
4.	ψ	RO: 1,3
5.	χ	RO: 2,3.

Prawo Fregego: $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$

Trzeba pokazać, że z założeń: $\varphi \to (\psi \to \chi)$, $\varphi \to \psi$ oraz φ można otrzymać χ.

1.	$\varphi \to (\psi \to \chi)$	założenie
2.	$\varphi \to \psi$	założenie
3.	φ	założenie
4.	ψ	RO: 2,3
5.	$\psi \to \chi$	RO: 1,3
6.	χ	RO: 5,4.

3 Przykłady reguł wtórnych

Przez *regułę wtórną* (*wyprowadzalną*) rozumiemy tu każdą regułę wnioskowania, z której przesłanek wyprowadzić można jej wniosek.

Reguła sylogizmu hipotetycznego:

$$\frac{\varphi \to \psi \qquad\qquad \psi \to \chi}{\varphi \to \chi}$$

Trzeba pokazać, że z założeń: $\varphi \to \psi$ i $\psi \to \chi$ można otrzymać $\varphi \to \chi$.

1.	$\varphi \to \psi$	założenie
2.	$\psi \to \chi$	założenie
3.	$(\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$	prawo sylogizmu hipotetycznego
4.	$(\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi)$	RO: 3,1
5.	$\varphi \to \chi$	RO: 4,2.

Reguła Fregego:

$$\frac{\varphi \to (\psi \to \chi) \qquad\qquad \varphi \to \psi}{\varphi \to \chi}$$

Trzeba pokazać, że z założeń: $\varphi \to (\psi \to \chi)$ oraz $\varphi \to \psi$ można otrzymać $\varphi \to \chi$.

1.	$\varphi \to (\psi \to \chi)$	założenie
2.	$\varphi \to \psi$	założenie
3.	$(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$	prawo Fregego
4.	$(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)$	RO: 3,1
5.	$\varphi \to \chi$	RO: 4,2.

4 Dowody nie wprost

Zachodzi Twierdzenie o Dowodach Nie Wprost:

Jeśli $\{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n\} \cup \{\neg\varphi\} \vdash_{jas} \chi$ oraz $\{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n\} \cup \{\neg\varphi\} \vdash_{jas} \neg\chi$ dla pewnej formuły χ, to $\{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n\} \vdash_{jas} \varphi$.

Twierdzenie to pozwala zatem na stosowanie w systemie założeniowym *dowodów nie wprost*: aby pokazać, że z założeń $\{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n\}$ można wyprowadzić φ, wystarczy pokazać, że z założeń $\{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \neg\varphi\}$ można wyprowadzić w systemie założeniowym KRZ parę formuł wzajem sprzecznych.

Nadto, z twierdzenia tego możemy korzystać również przy dowodzeniu wyprowadzalności reguł wtórnych systemu założeniowego KRZ.

W dowodzie nie wprost formuły $\psi_1 \to (\psi_2 \to (\ldots \to (\psi_n \to \varphi)\ldots))$ (czyli wyprowadzeniu φ z założeń $\{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n\}$ metodą nie wprost) dopisujemy do założeń $\neg\varphi$, czyli *założenie dowodu nie wprost* (w skrócie: z.d.n.) i staramy się wyprowadzić z tych założeń parę formuł wzajem sprzecznych. Gdy to się powiedzie, φ jest konsekwencją $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ w systemie założeniowym KRZ. Symbolu $\perp$ używamy tu na oznaczenie sprzeczności.

Dla przykładu, dowód nie wprost formuły $\neg\neg\varphi \to \varphi$ jest następujący:

1.	$\neg\neg\varphi$	założenie
2.	$\neg\varphi$	z.d.n.
3.	$\perp$	sprzeczność: 1, 2.

Na mocy powyższego, możemy w dalszych dowodach stosować wtórną regułę *opuszczania negacji* ON: $\frac{\neg\neg\varphi}{\varphi}$.

Prawo: $\varphi \to \neg\neg\varphi$

1.	φ	założenie
2.	$\neg\neg\neg\varphi$	z.d.n.
3.	$\neg\varphi$	ON: 2
4.	$\perp$	sprzeczność: 1, 3.

Z tez $\varphi \to \neg\neg\varphi$ i $\neg\neg\varphi \to \varphi$ otrzymujemy, na mocy reguły DR tezę: $\varphi \equiv \neg\neg\varphi$.

Na mocy powyższego, możemy w dalszych dowodach stosować wtórną regułę *dołączania negacji* DN:

$$\frac{\varphi}{\neg\neg\varphi}.$$

Prawo kontrapozycji: $(\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$

1.	$\varphi \to \psi$	założenie
2.	$\neg\psi$	założenie
3.	$\neg\neg\varphi$	z.d.n.
4.	$\neg\neg\varphi \to \varphi$	prawo podwójnej negacji
5.	φ	RO: 4,3
6.	ψ	RO: 1,5
7.	$\perp$	sprzeczność: 2, 6.

Pokażemy, że: $\{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi\} \vdash_{jas} \neg\varphi$

1.	$\varphi \rightarrow \psi$	założenie
2.	$\neg\psi$	założenie
3.	$\neg\neg\varphi$	z.d.n.
4.	φ	ON: 3
5.	ψ	RO: 1,4
6.	$\perp$	sprzeczność: 2, 5.

Pokazaliśmy więc, że regułą wtórną jest reguła *modus tollendo tollens* MT:

$$\frac{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi}{\neg\varphi}.$$

5 Dowody z dodatkowymi założeniami

Kolejna wielce użyteczna technika dowodowa w systemie założeniowym KRZ polega na korzystaniu z tzw. *dodatkowych założeń dowodu*. Jest to procedura następująca:

1. Czynimy w dowodzie *dodatkowe założenie* φ.
2. Jeśli z założenia φ (oraz wcześniejszych kroków dowodu) możemy wyprowadzić formułę ψ, to do dowodu wolno włączyć formułę $\varphi \rightarrow \psi$.
3. Z kroków wyprowadzenia ψ z φ **nie wolno** korzystać **poza tym wyprowadzeniem**. Zwykle stosuje się stosowną numerację: jeśli dodatkowe założenie φ ma numer $n.1.$, a wyprowadzona z niego formuła ma numer $n.m.$, to z kroków o numerach od $n.1.$ do $n.m.$ **nie** korzystamy w dowodzie głównym.

Pokażemy, że tezą jest: $((\varphi \vee \psi) \rightarrow (\chi \wedge \vartheta)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \chi) \wedge (\psi \rightarrow \vartheta))$

1.	$(\varphi \vee \psi) \rightarrow (\chi \wedge \vartheta)$	założenie
1.1.	φ	założenie dodatkowe
1.2.	$\varphi \vee \psi$	DA: 1.1.
1.3.	$\chi \wedge \vartheta$	RO: 1,1.2.
1.4.	χ	OK: 1.3.
2.	$\varphi \rightarrow \chi$	1.1.⇒1.4.
2.1.	ψ	założenie dodatkowe
2.2.	$\varphi \vee \psi$	DA: 2.1.
2.3.	$\chi \wedge \vartheta$	RO: 1,2.2.
2.4.	ϑ	OK: 2.3.
3.	$\psi \rightarrow \vartheta$	2.1.⇒2.4.
4.	$(\varphi \rightarrow \chi) \wedge (\psi \rightarrow \vartheta)$	DK: 2,3.

Pokażemy, że tezą jest: $(\varphi \to \psi) \to ((\chi \to \vartheta) \to (\neg(\psi \vee \vartheta) \to \neg(\varphi \vee \chi)))$

1.	$\varphi \to \psi$	założenie
2.	$\chi \to \vartheta$	założenie
3.	$\neg(\psi \vee \vartheta)$	założenie
4.	$\neg\neg(\varphi \vee \chi)$	z.d.n.
5.	$\varphi \vee \chi$	ON: 4
5.1.	φ	założenie dodatkowe
5.2.	ψ	RO: 1,5.1.
5.3.	$\psi \vee \vartheta$	DA: 5.2.
6.	$\varphi \to (\psi \vee \vartheta)$	5.1.⇒5.3.
7.	$\neg\varphi$	MT: 6,3
8.	χ	OA: 5,7
9.	ϑ	RO: 2,8
10.	$\psi \vee \vartheta$	DA: 9
11.	$\perp$	sprzeczność: 3, 10.

6 Dalsze przykłady

Pokażemy, że wyprowadzalna jest reguła $\frac{\varphi, \neg\varphi}{\psi}$.

1.	φ	założenie
2.	$\neg\varphi$	założenie
3.	$\varphi \vee \psi$	DA: 1
4.	ψ	OA: 3,2.

Regułę $\frac{\varphi, \neg\varphi}{\psi}$ nazywamy regułą Dunsa Scotusa (RDS).
Pokażemy, że tezą jest: $\varphi \to (\neg\varphi \to \psi)$

1.	φ	założenie
2.	$\neg\varphi$	założenie
3.	ψ	RDS: 1,2.

Pokażemy, że tezą jest: $\neg(\varphi \vee \psi) \to \neg\varphi \wedge \neg\psi$

1.	$\neg(\varphi \vee \psi)$	założenie
1.1.	φ	założenie dodatkowe
1.2.	$\varphi \vee \psi$	DA: 1.1.
2.	$\varphi \to (\varphi \vee \psi)$	1.1.$\Rightarrow$1.2.
3.	$\neg\varphi$	MT: 2,1
3.1.	ψ	założenie dodatkowe
3.2.	$\varphi \vee \psi$	DA: 3.1.
4.	$\psi \to (\varphi \vee \psi)$	3.1.$\Rightarrow$3.2.
5.	$\neg\psi$	MT: 4,1
5.	$\neg\varphi \wedge \neg\psi$	DK: 3,5.

Pokażemy, że tezą jest: $(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \to \neg(\varphi \vee \psi)$

1.	$\neg\varphi \wedge \neg\psi$	założenie
2.	$\neg\neg(\varphi \vee \psi)$	z.d.n.
3.	$\varphi \vee \psi$	ON: 2
4.	$\neg\varphi$	OK: 1
5.	$\neg\psi$	OK: 1
6.	ψ	OA: 3,4
7.	$\bot$	sprzeczność: 5, 6.

Dwie udowodnione wyżej tezy dają łącznie prawo *negowania alternatywy*:

$$\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi$$

Regułą wtórną jest zatem reguła *negowania alternatywy* NA: $\frac{\neg(\varphi \vee \psi)}{\neg\varphi \wedge \neg\psi}$.

Pokażemy, że tezą jest: $\neg(\varphi \wedge \psi) \to \neg\varphi \vee \neg\psi$

1.	$\neg(\varphi \wedge \psi)$	założenie
2.	$\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$	z.d.n.
3.	$\neg\neg\varphi \wedge \neg\neg\psi$	NA: 2
4.	$\neg\neg\varphi$	OK: 3
5.	$\neg\neg\psi$	OK: 3
6.	φ	ON: 4
7.	ψ	ON: 5
8.	$\varphi \wedge \psi$	DK: 6,7.
9.	$\bot$	sprzeczność: 1, 8.

Pokażemy, że tezą jest: $(\neg\varphi \vee \neg\psi) \to \neg(\varphi \wedge \psi)$

1.	$\neg\varphi \vee \neg\psi$	założenie
2.	$\neg\neg(\varphi \wedge \psi)$	z.d.n.
3.	$\varphi \wedge \psi$	ON: 2
4.	φ	OK: 3
5.	ψ	OK: 3
6.	$\neg\neg\varphi$	DN: 4
7.	$\neg\psi$	OA: 1,6.
8.	$\bot$	sprzeczność: 5, 7.

Dwie udowodnione wyżej tezy dają łącznie prawo *negowania koniunkcji*:

$$\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$$

Regułą wtórną jest zatem reguła *negowania koniunkcji* NK: $\frac{\neg(\varphi\wedge\psi)}{\neg\varphi\vee\neg\psi}$.

Dygresja: Teodycea i kule w płocie. Pokażemy, że następujące wnioskowanie jest dedukcyjne:

> *Bóg jest miłosierny, o ile jest doskonały. Jeśli Bóg jest doskonały i stworzył Świat, to w Świecie nie ma Zła. Jednak w Świecie jest Zło. Ponadto, Bóg przecież stworzył Świat. Zatem Bóg nie jest doskonały lub nie jest miłosierny.*

1. p — Bóg jest doskonały.
2. q — Bóg jest miłosierny.
3. r — Bóg stworzył Świat.
4. s — W Świecie jest Zło.

Pokażemy zatem, że: $\{p \to q, (p \wedge r) \to \neg s, s, r\} \vdash_{jas} \neg p \vee \neg q$

1.	$p \to q$	założenie
2.	$(p \wedge r) \to \neg s$	założenie
3.	s	założenie
4.	r	założenie
5.	$\neg\neg s$	DN: 3
6.	$\neg(p \wedge r)$	MT: 2,5
7.	$\neg p \vee \neg r$	NK: 6
8.	$\neg\neg r$	DN: 4
9.	$\neg p$	OA: 7,8
10.	$\neg p \vee \neg q$	DA: 9.

Zauważmy, że w dowodzie nie korzystano z pierwszego założenia.

7 Sprzeczne zbiory formuł

Zbiór formuł X jest (syntaktycznie) *sprzeczny*, jeśli istnieje formuła φ taka, że $X \vdash_{jas} \varphi$ oraz $X \vdash_{jas} \neg\varphi$. Jeśli X nie jest sprzeczny, to mówimy, że X jest (syntaktycznie) *niesprzeczny*.

Na mocy Twierdzenia o Zwartości wykazanie syntaktycznej sprzeczności zbioru formuł X polega na zbudowaniu dowodu założeniowego, którego przesłankami są elementy jakiegoś *skończonego* podzbioru zbioru X i w którego wierszach znajduje się para formuł wzajem sprzecznych.

Pokażemy, że $\{\varphi \vee \neg\psi, \chi \to \psi, \neg(\vartheta \wedge \neg\chi), \vartheta \wedge \neg\varphi\}$ jest sprzecznym zbiorem formuł.

1.	$\varphi \vee \neg\psi$	założenie
2.	$\chi \to \psi$	założenie
3.	$\neg(\vartheta \wedge \neg\chi)$	założenie
4.	$\vartheta \wedge \neg\varphi$	założenie
5.	ϑ	OK: 4
6.	$\neg\varphi$	OK: 4
7.	$\neg\psi$	OA: 1,6
8.	$\neg\chi$	MT: 2,7
9.	$\vartheta \wedge \neg\chi$	DK: 5,8
10.	$\bot$	sprzeczność: 3, 9.

Pokażemy, że $\{\neg\chi \wedge \psi,\ \varphi \to (\psi \to (\chi \vee \neg\vartheta)),\ \varphi,\ \vartheta \wedge (\psi \to \chi)\}$ jest sprzeczny.

1.	$\neg\chi \wedge \psi$	założenie
2.	$\varphi \to (\psi \to (\chi \vee \neg\vartheta))$	założenie
3.	φ	założenie
4.	$\vartheta \wedge (\psi \to \chi)$	założenie
5.	$\neg\chi$	OK: 1
6.	ψ	OK: 1
7.	$\psi \to (\chi \vee \neg\vartheta)$	RO: 2,3
8.	$\chi \vee \neg\vartheta$	RO: 7,6
9.	$\neg\vartheta$	OA: 8,5
10.	$\psi \to \chi$	OK: 4
11.	χ	RO: 10,6
12.	$\bot$	sprzeczność: 5, 11.

8 Dowody rozgałęzione

Podamy jeszcze parę przykładów *dowodów rozgałęzionych* (dowodów przez rozważenie przypadków).

Dowód rozgałęziony wprost formuły $(\psi_1 \to (\psi_2 \to \ldots (\psi_n \to \chi) \ldots))$ uważamy za zakończony, jeśli:

- (a) istnieje wyprowadzenie χ z **każdego** z dodatkowych założeń $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_m$
- (b) alternatywa $\chi_1 \vee \chi_2 \vee \ldots \vee \chi_m$ jest jednym z wierszy wyprowadzenia formuły χ.

Uzasadnienie. Jeśli (a), to do dowodu χ można dołączyć wszystkie implikacje $\chi_i \to \chi$, dla $1 \leqslant i \leqslant m$. Na mocy reguły dodawania poprzedników, można też dołączyć formułę: $(\chi_1 \vee \chi_2 \vee \ldots \vee \chi_m) \to \chi$. Na mocy (b) i reguły odrywania otrzymujemy χ.

Pokażemy, że tezą jest: $(\varphi \vee (\psi \wedge \chi)) \to (\varphi \vee \psi)$

1.	$\varphi \vee (\psi \wedge \chi)$	założenie
1.1.	φ	założenie dodatkowe
1.2.	$\varphi \vee \psi$	DA: 1.1.
2.1.	$\psi \wedge \chi$	założenie dodatkowe
2.2.	ψ	OK: 2.1.
2.3.	$\varphi \vee \psi$	DA: 2.2.
3.	$\varphi \vee \psi$	1; 1.1.⇒1.2.; 2.1.⇒2.3.

Komentarz w ostatnim wierszu czytamy: mamy alternatywę 1, wyprowadzenie 1.1.⇒1.2. formuły $\varphi \vee \psi$ z pierwszego członu alternatywy 1 oraz wyprowadzenie 2.1.⇒2.3. formuły $\varphi \vee \psi$ z drugiego członu alternatywy 1, czyli dowód rozgałęziony formuły $(\varphi \vee (\psi \wedge \chi)) \to (\varphi \vee \psi)$ jest zakończony.

Pokażemy, że tezą jest: $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \vee \chi) \to (\psi \vee \chi))$

1.	$\varphi \to \psi$	założenie
2.	$\varphi \vee \chi$	założenie
2.1.	φ	założenie dodatkowe
2.2.	ψ	RO: 1,2.1.
2.3.	$\psi \vee \chi$	DA: 2.2.
3.	$\psi \to (\psi \vee \chi)$	2.1.⇒2.3.
3.1.	χ	założenie dodatkowe
3.2.	$\psi \vee \chi$	DA: 3.1.
4.	$\chi \to (\psi \vee \chi)$	3.1.⇒3.2.
5.	$\psi \vee \chi$	2; 3; 4

To inny (bardziej skrupulatny) zapis dowodu rozgałęzionego.
Pokażemy, że tezą jest: $((\varphi \to \psi) \wedge (\chi \to \vartheta)) \to ((\varphi \vee \chi) \to (\psi \vee \vartheta))$

1.	$(\varphi \to \psi) \wedge (\chi \to \vartheta)$	założenie
2.	$\varphi \vee \chi$	założenie
3.	$\varphi \to \psi$	OK: 1
4.	$\chi \to \vartheta$	OK: 1
4.1.	φ	założenie dodatkowe
4.2.	ψ	RO: 3,4.1.
4.3.	$\psi \vee \vartheta$	DA: 4.2.
5.	$\varphi \to (\psi \vee \vartheta)$	4.1.⇒4.3.
5.1.	χ	założenie dodatkowe
5.2.	ϑ	RO: 4,5.1.
5.3.	$\psi \vee \vartheta$	DA: 5.2.
6.	$\chi \to (\psi \vee \vartheta)$	5.1.⇒5.3.
7.	$\psi \vee \vartheta$	2; 5; 6

9 Dedukcja naturalna w innych stylizacjach

Propozycja w Fitting 1990:

1. Reguła wprowadzania implikacji: $\frac{[\varphi ... \psi]}{\varphi \to \psi}$
2. Reguły dla stałych: $\frac{\bot}{\varphi}$, $\frac{}{\top}$
3. Reguły dla negacji: $\frac{\varphi \quad \neg\varphi}{\bot}$, $\frac{[\varphi ... \bot]}{\neg\varphi}$, $\frac{[\neg\varphi ... \bot]}{\varphi}$
4. Reguły dla α-formuł: $\frac{\alpha}{\alpha_1}$, $\frac{\alpha}{\alpha_2}$, $\frac{\alpha_1 \quad \alpha_2}{\alpha}$
5. Reguły dla β-formuł: $\frac{\neg\beta_1 \quad \beta}{\beta_2}$, $\frac{\neg\beta_2 \quad \beta}{\beta_1}$, $\frac{[\neg\beta_1 ... \beta_2]}{\beta}$, $\frac{[\neg\beta_2 ... \beta_1]}{\beta}$

Zapis $[\varphi \ldots \psi]$ należy tu rozumieć tak samo, jak w omówionych wyżej przypadkach dowodów z dodatkowymi założeniami: oznacza on, że mamy wyprowadzenie ψ z założenia φ. Stosowane bywają różne kaligrafie: pudełka otaczające wyprowadzenia, kreski pionowe wyróżniające poddowody, drzewa, itd.

10 Wykorzystywana literatura

10.1 Dowody założeniowe

1. Borkowski, L. 1991. *Wprowadzenie do logiki i teorii mnogości.* Wydawnictwo Naukowe KUL, Lublin.

2. Georgacarakos, G.N., Smith, R. 1979. *Elementary formal logic.* McGraw-Hill Book Company.

3. Pogorzelski, W.A. 1975. *Klasyczny rachunek zdań. Zarys teorii.* PWN, Warszawa.

4. Pogorzelski, W.A. 1992. *Elementarny słownik logiki formalnej.* Białystok.

5. Słupecki, J., Borkowski, L. 1962. *Elementy logiki matematycznej i teorii mnogości.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

6. Słupecki, J., Hałkowska, K, Piróg-Rzepecka, K. 1999. *Logika matematyczna.* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

7. Surma, S. 1967. Twierdzenia o dedukcji niewprost. *Studia Logica* **XX**, 151–166.

10.2 Ujęcia bardziej nowoczesne

1. Fitting, M. 1996. *First-Order Logic and Automated Theorem Proving*. Springer, Berlin.

2. Negri, S., von Plato, J. 2001. *Structural Proof Theory*. Cambridge University Press, Cambridge.

3. Troelstra, A.S., Schwichtenberg, H. 2000. *Basic Proof Theory*. Cambridge University Press, Cambridge.

JERZY POGONOWSKI
Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
www.kognitywistyka.amu.edu.pl
http://logic.amu.edu.pl/index.php/Dydaktyka
pogon@amu.edu.pl